Динамические системы, 2015, том 5(33), №3-4, 193–202

УДК 514.12

О группах отражений, действующих на нецилиндрических поверхностях

А. И. Криворучко

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: ai.krivoruchko@yandex.ru*

Аннотация. Каждой бесконечной группе G, порожденной отражениями и действующей на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, сопоставлена матрица, обладающая следующими свойствами: (1) число строк матрицы равно числу линейных оболочек G-орбит направлений симметрии группы; (2) матрица образована линейными формами, естественным образом определяемыми отражениями, которые группе принадлежат; (3) ранг матрицы над кольцом полиномиальных функций меньше числа ее строк. Эта матрица может использоваться при вычислении инвариантов группы G.

Ключевые слова: квадратичная форма, бесконечная группа отражений, алгебра инвариантов

Введение

Как следует из результатов работ [2], [8] и др., линейная классификация нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном линейном пространстве V сводится к задаче о строении групп, порожденных объединением поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений, т. е. таких множеств $M_1, \dots, M_n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(А) Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ множество M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i, что означает следующее: отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$ и P сопряжена d относительно φ_i.

(Б) Если два отражения принадлежат $M_1 \cup \dots \cup M_n$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Пусть G — группа, порожденная объединением множеств $M_1, \dots, M_n$, которые удовлетворяют условиям (А), (Б). Как показали А. Е. Залесский [12] и А. Е. Велесько [1], алгебра полиномиальных инвариантов такой группы может не быть свободной и не обязательно является конечно порожденной. Для изучения строения алгебры инвариантов группы G, при выполнении некоторых дополнительных условий, в работах [4], [5], [10] была построена соответствующая этим условиям матрица ξ, обладающая следующими свойствами:

1) число строк матрицы ξ равно n;

2) элементы матрицы ξ — линейные формы, определяемые принадлежащими множеству $M_1 \cup \dots \cup M_n$ отражениями;

3) каждый минор порядка n матрицы ξ равен 0.

Эти свойства матрицы ξ позволяют получать такие соотношения между ее элементами, применяя которые, можно найти как образующие алгебры инвариантов группы G, так и канонические уравнения G-инвариантных алгебраических поверхностей (см., например, [9], [3] и [10]). Однако при построении матрицы использовался алгоритм, реализация которого существенно зависела от выбора базисов плоскостей $A_1, \dots, A_n$ и базиса пространства. Не ясно было, как изменяется сопоставляемая группе матрица при изменении этих базисов. Поэтому вычисление элементов матрицы ξ приходилось выполнять заново для каждого рассматриваемого линейного класса плоскостей и их базисов, и, учитывая отсутствие линейной классификации n-ок плоскостей уже при $n > 4$, результаты вычисления сложно было предугадать.

В связи с этим возникает *следующая задача*:

Для группы G, порожденной объединением множеств $M_1, \dots, M_n$, которые удовлетворяют условиям (A) и (B), и базиса пространства V получить "явное" описание матрицы ξ.

Цель работы — решение указанной задачи.

1. Основные результаты

Пусть M — непустое множество отражений относительно гиперплоскостей конечномерного вещественного линейного пространства V, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма, A — линейное подпространство пространства V, и при этом отражение относительно гиперплоскости $P \subset V$ в направлении вектора $d \in V$ принадлежит M тогда и только тогда, когда $d \in A$ и P сопряжена d относительно φ.

При выполнении этих условий M называется *квадратичным множеством отражений*, определяемым плоскостью A и квадратичной формой φ, а плоскость, являющаяся пересечением семейства, состоящего из плоскости A и всех гиперплоскостей отражений, принадлежащих M, называется *особой плоскостью* (или плоскостью особых направлений) для множества M.

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть

M_i — квадратичное множество отражений, определяемое квадратичной формой φ_i и плоскостью $A_i \subseteq V$;

$\mu_i : A_i \to V^*$ — отображение, сопоставляющее каждому вектору $v \in A_i$ линейную форму, сопряженную v относительно φ_i;

k_i, m_i — целые неотрицательные числа;

$$b_i := \{b_{i,1}, \dots, b_{i,k_i},\ c_{i,1}, \dots, c_{i,m_i}\} \tag{1.1}$$

— базис особой плоскости S_i множества M_i, и при этом

$$b := \{b_{i,j} \ : \ 1 \le i \le n\, ;\ 1 \le j \le k_i\} \tag{1.2}$$

— базис плоскости $S_1 + \dots + S_n$.

Тогда однозначно определена вещественная матрица D, для которой

$$\begin{aligned}(c_{1,1}\ \dots\ c_{1,m_1}\ \ c_{2,1}\ \dots\ c_{2,m_2}\ \ \dots\dots\ \ c_{n,1}\ \dots\ c_{n,m_n}) = \\ = (b_{1,1}\ \dots\ b_{1,k_1}\ \ b_{2,1}\ \dots\ b_{2,k_2}\ \ \dots\dots\ \ b_{n,1}\ \dots\ b_{n,k_n})\, D.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Положим

$$\xi := (\mu_1(c_{1,1})\ \dots\ \mu_1(c_{1,m_1})) \oplus \dots \oplus (\mu_n(c_{n,1})\ \dots\ \mu_n(c_{n,m_n})) - \\ - ((\mu_1(b_{1,1})\ \dots\ \mu_1(b_{1,k_1})) \oplus \dots \oplus (\mu_n(b_{n,1})\ \dots\ \mu_n(b_{n,k_n})))\, D. \qquad (1.4)$$

Определенное выше семейство $\{b_1, \dots, b_n, b\}$ будем называть *базисной системой n-ки плоскостей* $S_1, \dots, S_n$, а матрицу ξ — *матрицей, определяемой базисной системой* $\{b_1, \dots, b_n, b\}$ *и отображениями* $\mu_1, \dots, \mu_n$.

Каждый минор матрицы ξ является полиномиальным отображением пространства V в поле $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Теорема 1. *Вещественное линейное пространство, порожденное всеми минорами порядка n матрицы ξ, не зависит от выбора базисной системы n-ки плоскостей* $S_1, \dots, S_n$.

Теорема 2. *Если множества* $M_1, \dots, M_n$ *поэлементно коммутируют между собой, а группа, порожденная множеством* $M_1 \cup \dots \cup M_n$, *действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности пространства V, то каждый минор порядка n матрицы ξ равен* 0.

Как уже отмечалось во введении, эти теоремы позволяют для группы G, порожденной объединением поэлементно коммутирующих между собой множеств $M_1, \dots, M_n$, получить соотношения между элементами матрицы ξ, используемые затем для вычисления инвариантов группы G и построения поверхностей, на которых действует G. При этом из теоремы 1 следует, что система соотношений, получаемая между элементами матрицы ξ на основании теоремы 2, по существу не зависит от выбора базисов особых плоскостей множеств $M_1, \dots, M_n$.

Замечание 1. Для каждого i, удовлетворяющего равенству $k_i = 0$ (соответственно, $m_i = 0$) и каждого j считаем, что в равенствах (1.1)–(1.3) отсутствует вектор $b_{i,j}$ (соответственно, $c_{i,j}$), а в равенстве (1.4) матрица $(\mu_i(b_{i,1})\ \dots\ \mu_i(b_{i,k_i}))$ (соответственно, матрица $(\mu_i(c_{i,1})\ \dots\ \mu_i(c_{i,m_i})))$ является пустой матрицей-строкой, обозначаемой далее символом $0_{1,0}$; при этом если

$$W := \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,q} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{p,1} & \dots & w_{p,q} \end{pmatrix},$$

то полагаем

$$0_{1,0} \oplus W := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{1,1} & \dots & w_{1,q} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{p,1} & \dots & w_{p,q} \end{pmatrix}, \quad W \oplus 0_{1,0} := \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,q} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{p,1} & \dots & w_{p,q} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(см. [11]).

Замечание 2. Матрица ξ однозначно определяется отображениями $\mu_1, \dots, \mu_n$ и матрицей

$$\beta := (c_{1,1}\ \dots\ c_{1,m_1}) \oplus \dots \oplus (c_{n,1}\ \dots\ c_{n,m_n}) - \\ - ((b_{1,1}\ \dots\ b_{1,k_1}) \oplus \dots \oplus (b_{n,1}\ \dots\ b_{n,k_n}))\, D,$$

которая уже от этих отображений не зависит.

Замечание 3. Пусть n-ка плоскостей $S_1, \ldots, S_n$ является прямой суммой n-ок плоскостей $S_1^1, \ldots, S_n^1$ и $S_1^2, \ldots, S_n^2$, и для каждого $i \in \{1;\, 2\}$ матрица $\xi^{(i)}$ определяется базисной системой $(b_1^i, \ldots, b_n^i,\ b^i)$ n-ки плоскостей $S_1^i, \ldots, S_n^i$ и сужениями на эти плоскости отображений $\mu_1, \ldots, \mu_n$, а матрица ξ определяется базисной системой $(b_1^1 \cup b_1^2, \ldots, b_n^1 \cup b_n^2,\ b^1 \cup b^2)$ n-ки плоскостей $S_1, \ldots, S_n$ и отображениями $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда из (1.4) следует, что матрица ξ, с точностью до перестановки ее столбцов, совпадает с блочной матрицей $[\xi^{(1)}\ \xi^{(2)}]$. Аналогичным свойством обладает и матрица β, определенная в замечании 2.

2. Доказательства теорем

Далее используются обозначения из п. 1. Кроме того, если p, q — целые неотрицательные числа, то I_p — единичная матрица порядка p (пустая, если $p = 0$), а $0_{p,q}$ — нулевая (p, q)-матрица (пустая, если $p\,q = 0$); если X — матрица, то $X[i, j]$ — ее элемент, номера строки и столбца которого равны, соответственно, i и j.

Если $\mathcal{Y}$ — массив матриц, являющийся блочным разбиением некоторой (однозначно определяемой этим разбиением) матрицы Y, то $[\mathcal{Y}]$ обозначает матрицу Y.

Пусть
$$\{s_{1,1}, \ldots, s_{1,r_1}\},\ \ldots,\ \{s_{n,1}, \ldots, s_{n,r_n}\},\ \{s_1, \ldots, s_k\} \tag{2.1}$$
— базисы плоскостей $S_1, \ldots, S_n$, $S_1 + \cdots + S_n$ соответственно, $B_1, \ldots, B_n$ — однозначно определяемые этими базисами вещественные матрицы, для которых
$$(s_{i,1}\ \ldots\ s_{i,r_i}) = (s_1\ \ldots\ s_k)\, B_i \quad (1 \le i \le n). \tag{2.2}$$
При этом
$$k_1 + m_1 = r_1\,,\ \ \ldots\ ,\ \ k_n + m_n = r_n\,,\ \ k_1 + \cdots + k_n = k\,.$$

Положим
$$\eta_{i,p} := \mu_i(s_{i,p}), \quad \eta_i := (\eta_{i,1}\ \ldots\ \eta_{i,r_i}) \quad (1 \le i \le n;\ 1 \le p \le r_i),$$
$$\eta := \begin{bmatrix} B_1 & \ldots & B_n \\ \multicolumn{3}{c}{\eta_1 \oplus \cdots \oplus \eta_n} \end{bmatrix}.$$

Для любой матрицы X, элементы которой — отображения из V в $\mathbb{R}$ (в том числе, и вещественные числа, отождествляемые с постоянными отображениями), пусть $L(X)$ обозначает линейное вещественное пространство, порожденное всеми минорами матрицы X, порядок которых равен числу строк этой матрицы (для определенности, если таких миноров нет, то $L(X)$ — нулевое пространство).

Лемма. *Пусть для базисов* (1.1), (1.2), (2.1) *плоскостей* $S_1, \ldots, S_n$, $S_1 + \cdots + S_n$ *выполняются равенства*
$$(s_{i,1}\ \ldots\ s_{i,r_i}) = (b_{i,1}\ \ldots\ b_{i,k_i}\ c_{i,1}\ \ldots\ c_{i,m_i}) \quad (1 \le i \le n), \tag{2.3}$$
$$(s_1\ \ldots\ s_k) = (b_{1,1}\ \ldots\ b_{1,k_1}\ b_{2,1}\ \ldots\ b_{2,k_2}\ \ldots\ldots\ b_{n,1}\ \ldots\ b_{n,k_n}). \tag{2.4}$$
Тогда $L(\eta) = L(\xi)$.

Доказательство. Пусть $B'_1,\, B''_1, \dots,\, B'_n,\, B''_n$ — вещественные матрицы, однозначно определяемые равенствами

$$(b_{i,1}\ \dots\ b_{i,k_i}) = (s_1\ \dots\ s_k)\,B'_i, \quad (c_{i,1}\ \dots\ c_{i,m_i}) = (s_1\ \dots\ s_k)\,B''_i \quad (1 \le i \le n), \tag{2.5}$$

$$\eta'_i := (\mu_i(b_{i,1})\ \dots\ \mu_i(b_{i,k_i})), \quad \eta''_i := (\mu_i(c_{i,1})\ \dots\ \mu_i(c_{i,m_i})) \quad (1 \le i \le n),$$

$$\eta' := \begin{bmatrix} B'_1 & \dots & B'_n & B''_1 & \dots & B''_n \\ \eta'_1 \oplus \dots \oplus \eta'_n & & & \eta''_1 \oplus \dots \oplus \eta''_n & & \end{bmatrix}, \quad \eta'' := \begin{bmatrix} I_k & D \\ \eta'_1 \oplus \dots \oplus \eta'_n & \eta''_1 \oplus \dots \oplus \eta''_n \end{bmatrix},$$

$$m := m_1 + \dots + m_n, \quad \nu := \begin{bmatrix} I_k & 0_{k,\,m} \\ \eta'_1 \oplus \dots \oplus \eta'_n & \xi \end{bmatrix}$$

(для каждого i, удовлетворяющего равенству $k_i = 0$ (соответственно, $m_i = 0$) матрицы B'_i и η'_i (соответственно, B''_i и η''_i) является пустыми матрицами).

Очевидно, что

$$B_i = [B'_i\ B''_i], \quad \eta_i = [\eta'_i\ \eta''_i] \quad (1 \le i \le n).$$

Следовательно, матрица η, с точностью до перестановки ее столбцов, совпадает с матрицей η'. Из (2.2), (2.5) и (1.3) получаем:

$$[B'_1\ \dots\ B'_n] = I_k, \quad [B''_1\ \dots\ B''_n] = D.$$

Значит, $\eta' = \eta''$. Но

$$\eta'' \begin{bmatrix} I_k & -D \\ 0_{m,\,k} & I_m \end{bmatrix} = \nu.$$

При этом каждый минор порядка n матрицы ξ совпадает с некоторым минором порядка $k+n$ матрицы ν, а каждый ненулевой минор порядка $k+n$ матрицы ν совпадает с некоторым минором порядка n матрицы ξ. □

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\tilde{b}_i = \{\tilde{b}_{i,1}, \dots,\, \tilde{b}_{i,\tilde{k}_i},\, \tilde{c}_{i,1}, \dots,\, \tilde{c}_{i,\tilde{m}_i}\} \quad (1 \le i \le n),$$

$$\tilde{b} := \{\tilde{b}_{i,j}\ :\ 1 \le i \le n\,;\ 1 \le j \le \tilde{k}_i\},$$

и при этом $\{\tilde{b}_1, \dots,\, \tilde{b}_n,\, \tilde{b}\}$ — базисная система n-ки плоскостей $S_1, \dots,\, S_n$, а $\tilde{\xi}$ — матрица, определяемая этой базисной системой и отображениями $\mu_1, \dots,\, \mu_n$. Полагая

$$(\tilde{s}_{i,1}\ \dots\ \tilde{s}_{i,r_i}) := (\tilde{b}_{i,1}\ \dots\ \tilde{b}_{i,\tilde{k}_i}\ \tilde{c}_{i,1}\ \dots\ \tilde{c}_{i,\tilde{m}_i}) \quad (1 \le i \le n),$$

$$(\tilde{s}_1\ \dots\ \tilde{s}_k) := (\tilde{b}_{1,1}\ \dots\ \tilde{b}_{1,\tilde{k}_1}\ \tilde{b}_{2,1}\ \dots\ \tilde{b}_{2,\tilde{k}_2}\ \dots\dots\ \tilde{b}_{n,1}\ \dots\ \tilde{b}_{n,\tilde{k}_n}),$$

получаем базисы

$$\{\tilde{s}_{1,1}, \dots,\, \tilde{s}_{1,r_1}\}, \dots, \{\tilde{s}_{n,1}, \dots,\, \tilde{s}_{n,r_n}\},\ \{\tilde{s}_1, \dots,\, \tilde{s}_k\}$$

плоскостей $S_1, \dots,\, S_n,\, S_1 + \dots + S_n$ соответственно. Применяя лемму к этим базисам и к базисной системе $\{\tilde{b}_1, \dots,\, \tilde{b}_n,\, \tilde{b}\}$, получаем, что $L(\tilde{\xi}) = L(\tilde{\eta})$.

Пусть теперь

$$C,\ C_1, \ldots, C_n,\ \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n$$

— вещественные матрицы, однозначно определяемые равенствами

$$(\tilde{s}_1\ \ldots\ \tilde{s}_k) = (s_1\ \ldots\ s_k)\, C, \tag{2.6}$$

$$(\tilde{s}_{i,1}\ \ldots\ \tilde{s}_{i,r_i}) = (s_{i,1}\ \ldots\ s_{i,r_i})\, C_i = (\tilde{s}_1\ \ldots\ \tilde{s}_k)\, \tilde{B}_i \quad (1 \le i \le n). \tag{2.7}$$

Положим

$$\tilde{\eta}_i := (\mu_i(\tilde{s}_{i,1})\ \ldots\ \mu_i(\tilde{s}_{i,r_i})) \quad (1 \le i \le n) \tag{2.8}$$

(если некоторое r_i равно 0, то $(s_{i,1}\ \ldots\ s_{i,r_i})$, $(\tilde{s}_{i,1}\ \ldots\ \tilde{s}_{i,r_i})$, η_i, $\tilde{\eta}_i$, B_i, C_i, $\tilde{B}_i$ — пустые матрицы),

$$\tilde{\eta} := \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \quad \ldots \quad \tilde{B}_n \\ \tilde{\eta}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{\eta}_n \end{bmatrix}.$$

Из (2.6)–(2.8) и линейности отображений $\mu_1, \ldots, \mu_n$ следует, что

$$\tilde{B}_i = C\, B_i\, C_i, \quad \tilde{\eta}_i = \eta_i\, C_i \quad (1 \le i \le n),$$

и поэтому

$$\tilde{\eta} = (C \oplus I_n)\, \eta\, (C_1 \oplus \cdots \oplus C_n).$$

Следовательно, $L(\tilde{\eta}) = L(\eta)$. При этом, по лемме, $L(\eta) = L(\xi)$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть группа G, порожденная объединением поэлементно коммутирующих множеств $M_1, \ldots, M_n$, действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности пространства V, а для базисов (1.1), (1.2), (2.1) плоскостей $S_1, \ldots, S_n$, $S_1 + \cdots + S_n$ выполняются равенства (2.2)–(2.4).

Из [5] следует, что для некоторых целых положительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и ω базис $\{s_1, \ldots, s_k\}$ плоскости $S_1 + \cdots + S_n$ содержится в таком базисе

$$\{a_{i,j}\,,\ s_l\,,\ c_q\ :\ 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le \alpha_i\,;\ 1 \le l \le k;\ 1 \le q \le \omega\}$$

пространства V, который вместе с соответствующим двойственным базисом

$$(x_{i,j}\,,\ y_l,\ z_q\ :\ 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le \alpha_i\,;\ 1 \le l \le k;\ 1 \le q \le \omega)$$

удовлетворяет следующим условиям: для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$A_i = \langle a_{i,j}\ :\ 1 \le j \le \alpha_i \rangle \oplus S_i,$$

$$\mu_i(a_{i,j}) = \varepsilon_{i,j}\, x_{i,j},\ \text{где } |\varepsilon_{i,j}| = 1 \quad (1 \le j \le \alpha_i),$$

$$\eta_{i,p} = \mu_i(s_{i,p}) \in \langle z_1, \ldots, z_\omega \rangle \quad (1 \le p \le r_i).$$

Пусть F — рациональный инвариант группы G, $\bar{z}$ — список координатных функций $z_1, \ldots, z_\omega$, и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots, r_i\}$, $t_{i,p} \in \mathbb{R}$

$$F_i := \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \varepsilon_{i,j}\, x_{i,j}^2\,, \quad T_{i,p}(t_{i,p}) := 2\, t_{i,p}\, (x_{i,1} + \varepsilon_{i,1}^{-1} t_{i,p}\, \eta_{i,p}),$$

$R_{i,p}(t_{i,p})$ — отражение в направлении вектора $a_{i,1} + t_{i,p}\, s_{i,p}$ относительно гиперплоскости $\ker(x_{i,1} + \varepsilon_{i,1}^{-1} t_{i,p}\, \eta_{i,p})$.

Тогда, во-первых, существует $g \in \mathbb{R}(x_{1,1}, \ldots, x_{n,1}, y_1, \ldots, y_k, \bar{z})$, для которого в поле рациональных функций пространства V выполняется равенство

$$F = g(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_k, \bar{z}),$$

причем если F — полиномиальный инвариант, то $g \in \mathbb{R}[x_{1,1}, \ldots, x_{n,1}, y_1, \ldots, y_k, \bar{z}]$.

Во-вторых, из (2.2) следует, что

$$s_{i,p} = \sum_{l=1}^{k} B_i[l,p] s_l \quad (1 \le i \le n\,;\ 1 \le p \le r_i),$$

и $R_{i,p}(t_{i,p})$ имеет координатное представление

$$\begin{cases} x'_{i,1} = -x_{i,1} - 2\varepsilon_{i,1}^{-1} t_{i,p}\, \eta_{i,p}\,, \\ y'_l = y_l - 2\, B_i[l,p]\, t_{i,p}\, (x_{i,1} + \varepsilon_{i,1}^{-1} t_{i,p}\, \eta_{i,p}) \quad (1 \le l \le k), \\ \text{остальные координаты не меняются.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{i,1}\, (x'_{i,1})^2 = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{i,1}\, (x_{i,1})^2 + \eta_{i,p}\, T_{i,p}(t_{i,p}), \quad y'_l = y_l - B_i[l,p]\, T_{i,p}(t_{i,p}) \quad (1 \le l \le k). \tag{2.9}$$

Пусть $\mathcal{F}$ — поле рациональных функций над $\mathbb{R}$ от переменных

$$x_{i,j},\ y_l,\ z_q \quad (1 \le i \le n;\ 1 \le j \le \alpha_i\,;\ 1 \le l \le k;\ 1 \le q \le \omega),$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ — расширение поля $\mathcal{F}$ переменными

$$\tau_{1,1}, \ldots, \tau_{1,r_1}, \tau_{2,1}, \ldots, \tau_{2,r_2}, \ldots, \tau_{n,1}, \ldots, \tau_{n,r_n}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{T}_{i,p} := 2\, \tau_{i,p}\, (x_{i,1} + \varepsilon_{i,1}^{-1} \tau_{i,p}\, \eta_{i,p}) \quad (1 \le i \le n,\ 1 \le p \le r_i),$$

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j\,; \\ 0, & \text{если } i \ne j\,. \end{cases}$$

Из (2.9), а также из инвариантности F относительно группы G получаем в поле $\mathcal{F}$ следующие равенства:

$$\begin{aligned} g\big(F_1 + \delta_{i,1}\, \eta_{i,p}\, T_{i,p}(t_{i,p}), \ldots, F_n + \delta_{i,n}\, \eta_{n,p}\, T_{i,p}(t_{i,p}),& \\ y_1 - B_i[1,p]\, T_{i,p}(t_{i,p}), \ldots, y_k - B_i[k,p]\, T_{i,p}(t_{i,p}), \bar{z}\big) &= \\ = g(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_k, \bar{z}) \quad (1 \le i \le n\,;\ 1 \le p \le r_i\,;\ t_{i,p} \in \mathbb{R}).& \end{aligned}$$

Но тогда в поле $\tilde{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} g\big(F_1 + \delta_{i,1}\, \eta_{i,p}\, \tilde{T}_{i,p}, \ldots, F_n + \delta_{i,n}\, \eta_{n,p}\, \tilde{T}_{i,p}, y_1 - B_i[1,p]\, \tilde{T}_{i,p}, \ldots, y_k - B_i[k,p]\, \tilde{T}_{i,p}, \bar{z}\big) &= \\ = g(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_k, \bar{z}) \quad (1 \le i \le n;\ 1 \le p \le r_i).& \end{aligned} \tag{2.11}$$

При этом множество

$$\{F_i\,,\,\tilde{T}_{i,p}\,,\,y_l\,,\,z_q\ :\ 1\le i\le n\,;\ 1\le p\le r_i\,;\ 1\le l\le k\,;\ 1\le q\le \omega\}$$

элементов поля $\tilde{\mathcal{F}}$ алгебраически независимо над $\mathbb{R}$. Отсюда и из (2.11) в поле $\tilde{\mathcal{F}}$ получаем:

$$\begin{aligned} g\big(F_1+\delta_{i,1}\,\eta_{i,p}\,\tau_{i,p}\,,\dots,\,F_n+\delta_{i,n}\,\eta_{n,p}\,\tau_{i,p}\,,\,y_1\,-B_i[1,p]\,\tau_{i,p}\,,\dots,\,y_k-B_i[k,p]\,\tau_{i,p}\,,\,\bar{z}\big) \;=\\ =\;g(F_1\,,\dots,\,F_n\,,\,y_1\,,\dots,\,y_k\,,\,\bar{z})\quad(1\le i\le n;\ 1\le p\le r_i), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} g\Big(F_1+\sum\nolimits_p\eta_{1,p}\,\tau_{1,p}\,,\dots,\,F_n+\sum\nolimits_p\eta_{n,p}\,\tau_{n,p}\,,\\ y_1-\sum\nolimits_{i,p}B_i[1,p]\,\tau_{i,p}\,,\dots,\,y_k-\sum\nolimits_{i,p}B_i[k,p]\,\tau_{i,p}\,,\,\bar{z}\Big)\;=\\ =\;g(F_1\,,\dots,\,F_n\,,\,y_1\,,\dots,\,y_k\,,\,\bar{z}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Рассмотрим в $\mathcal{F}$ следующую систему уравнений с упорядоченным множеством неизвестных (2.10):

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_p B_1[1,p]\,\tau_{1,p}+\dots+\sum_p B_n[1,p]\,\tau_{n,p}=y_1\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_p B_1[k,p]\,\tau_{1,p}+\dots+\sum_p B_n[k,p]\,\tau_{n,p}=y_k\,,\\ \sum_p \eta_{1,p}\,\tau_{1,p}=-F_1\,,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_p \eta_{n,p}\,\tau_{n,p}=-F_n\,. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Матрица η, с точностью до перестановки ее столбцов, совпадает с матрицей системы уравнений (2.13).

Допустим, что хотя бы один минор порядка n матрицы ξ не равен 0. Тогда, по доказанной выше лемме, хотя бы один минор порядка $n+k$ матрицы η не равен 0 и, значит, система уравнений (2.13) имеет решение в поле $\mathcal{F}$. Подставляя в равенство (2.12) вместо переменных из списка (2.10) их значения, удовлетворяющие системе уравнений (2.13), получаем:

$$F=g(0,\dots,\,0,\,0,\dots,\,0,\,\bar{z}).$$

Но это противоречит предположению о том, что G действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности пространства V. □

3. Заключение

В работе каждой группе G, порождаемой объединением поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений $M_1,\dots,\,M_n$, сопоставлены множество $\mathcal{M}$ линейных форм, определяемых отражениями, принадлежащими множеству $M_1\cup\dots\cup M_n$, и матрица $\xi(G)$, имеющая n строк и образованная некоторыми из этих линейных форм. Доказано, что если группа G действует на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, то все миноры порядка n матрицы $\xi(G)$ равны 0. Приравнивая эти миноры к 0, получаем систему полиномиальных уравнений, неизвестными в которых являются линейные формы, принадлежащие $\mathcal{M}$. Решая систему уравнений, мы приходим к некоторым соотношениям между линейными формами, принадлежащими $\mathcal{M}$. Полученные соотношения могут использоваться при вычислении инвариантов группы G. В работах [4]–[6] и [10] таким способом были найдены образующие алгебры рациональных инвариантов (а при дополнительных ограничениях — и алгебры полиномиальных инвариантов) группы G в случае, когда каждое собственное подсемейство семейства особых плоскостей множеств $M_1, \ldots, M_n$ свободно.

Предполагается на основе результатов, полученных в работе, найти алгебру инвариантов группы G при некоторых других взаимных расположениях особых плоскостей множеств $M_1, \ldots, M_n$.

Список цитируемых источников

1. *Велесько А. Е.* Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР. — 1986. — Т. 30, №2. — С. 105–107.

   Veles'ko, A. E. (1986). The existence of groups generated by reflections, with infinitely generated rings of invariants. Dokl. Akadem. Nauk BSSR (in Russian), 30 (2), 105–107.

2. *Игнатенко В. Ф.* Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. — 1998. — Т. 50, №10. — С. 1324–1340.

   Ignatenko, V. F. (1998). Diametral theory of algebraic surfaces and geometric theory of invariants of groups generated by reflections. III. Ukrainian Mathematical Zournal, 50 (10), 1324–1340.

3. *Комиссаренко Е. В.* О полноте и невырожденности некоторых бесконечных групп отражений // Ученые записки ТНУ, серия “Математика. Механика. Информатика и кибернетика”. Симферополь, 2007. — Т. 20, №2. — С. 21–30.

   Komissarenko, E. V. (2007). About the completeness and non-degeneracy of some infinite reflection groups. Uchenye zapiski TNU, series “Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics” (in Russian), 20 (2), 21–30.

4. *Комиссаренко Е. В., Криворучко А. И.* Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, сер. “Матем. Мех. Информ. и киберн”. Симферополь, 2005. — Т. 18, №1. — С. 10–18.

   Komissarenko, E. V., Krivouchko A. I. (2005). On the invariants of infinite reflection groups with four linear spans of orbits of directions of symmetries // Uchenye zapiski TNU, series “Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics” (in Russian), 18 (1), 10–18.

5. *Криворучко А. И.* О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. — 1999. — Вып. 18. — С. 170–177.

   Krivoruchko, A. I. (1999) On rational invariants of special groups generated by reflections. Dinamicheskie sistemy (in Russian), 18, 170–177.

6. *Криворучко А. И.* О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16. — С. 124–129.

   Krivoruchko, A. I. (2000). On polynomial invariants of special groups generated by reflections. Dinamicheskie sistemy (in Russian), 16, 124–129.

7. *Криворучко А. И.* О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. “математика”. — 2001. — Т. 14, №1. — С. 60–64.

   Krivoruchko, A. I. (2001). On a cross-ratio of a quadruple of linear spans of orbits of directions of simmetries of infinite reflection group. Uchenye zapiski TNU, series “mathematics” (in Russian), 99 (1), 60–64.

8. *Криворучко А. И.* О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — №1. — С. 78–92.

   Krivoruchko, A. I. (2003). On a structure of a set of orbits of reflections of infinite reflection group. TVIM (in Russian), no. 1, 78–92.

9. *Криворучко А. И.* О вырожденных матрицах, образованных линейными формами // Таврический вестник информатики и математики. — 2005. — №2. — С. 26–46.

   Krivoruchko, A. I. (2005). On the degenerate matrices formed by linear forms // TVIM (in Russian), no. 2, 26–46.

10. *Криворучко А. И.* Об одном классе бесконечных групп отражений // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24, №1. — С. 59–70.

    Krivouchko, A. I. (2011). On some infinite reflection groups. Uchenye zapiski TNU, series "Physico-mathematical sciences" (in Russian), 24 (1), 59–70.

11. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Исследования по теории представлений: Записки научного семинара ЛОМИ. — Л.: Наука, 1972. — Т. 28. — С. 5–31.

    Nazarova, L. A., & *Reuter, A. V.* (1972). Representations of partially ordered sets. Investigations on the theory of representations. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) (in Russian), 28, 5–31.

12. *Zalesskii, A. E.* (1983). The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free. Arch. Math., 41 (5), 434–437.

Получена 06.11.2015