Динамические системы, 2015, том 5(33), №3-4, 139–147

УДК 517.9

Бифуркация высокомодовых автоколебаний в параболическом уравнении с малой диффузией и отклонением пространственной переменной

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150000.

Аннотация. Рассматривается бифуркации автоколебаний в краевой задаче параболического типа с отклонением пространственной переменной. Бифуркационная задача рассмотрена для бесконечномерных критических случаев. Применяется известный формализм метода нормальных форм, на основе которого удается получить некоторые универсальные системы эволюционных уравнений. Установившиеся режимы этих уравнений позволяют определить структуру решений исходной краевой задачи. Характерной чертой этих решений является сильная осцилляция по пространственной переменной, также возможны ситуации, когда при уменьшении параметра, стоящего перед коэффициентом диффузии, происходит бесконечная смена "рождения" и "гибели" устойчивой автоволны.

Ключевые слова: параболическое уравнение, бифуркация, нормальная форма, отклонение по пространству, автоволна

Введение

В работах [1,2] рассмотрены вопросы о бифуркациях автоколебаний в системах нелинейных параболических уравнений с малой диффузией при условии, когда критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия определяется "обыкновенным" уравнением (с нулевым коэффициентом диффузии). В настоящей статье рассматривается существенно более сложная задача, когда критический в задаче об устойчивости состояния равновесия случай обусловлен взаимодействием малой диффузии и "обыкновенной" частью. Сложность задачи о бифуркации автоколебаний в исследуемых ниже ситуациях подчеркивает то обстоятельство, что размерность критических случаев равна бесконечности. Применяя известный формализм метода нормальных форм, удается получить некоторые универсальные системы эволюционных уравнений, установившиеся режимы которых, как оказывается, позволяют определить структуру решений исходной системы уравнений. Отметим, что характерной чертой этих решений является сильная осцилляция по пространственной переменной. Обратим внимание еще на один интересный факт: возможны ситуации, когда при уменьшении параметра, стоящего перед коэффициентом диффузии, происходит бесконечная смена "рождения" и "гибели" устойчивой автоволны.

Исследуемый ниже класс параболических уравнений с отклонениями пространственного аргумента позволяет проиллюстрировать все возможные ситуации для скалярного случая. Конечно, этот класс уравнений представляет и самостоятельный интерес. Некоторые близкие результаты о бифуркациях в системах параболических уравнений без отклонений пространственного аргумента приведены в работах автора [3,4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K(u_{x+s}) + F(u) \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (x \in (-\infty, \infty))\,. \tag{2}$$

Здесь u — скалярная величина, $0 < \varepsilon \ll 1$, $F(u)$ - нелинейная аналитическая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, а через $K(u_{x+s})$ обозначено выражение

$$K(u_{x+s}) = \sum_{j=1}^{n} a_j u(t, x + l_j) + \int_{-l_0}^{l_0} \rho(s) u(t, x + s) ds\,, \tag{3}$$

в котором $l_j \in (-\infty, \infty)$, $j = 0, \dots, n$; а функция $\rho(s)$ кусочно непрерывна.

Формальная часть резко упрощается, если несколько сузить класс операторов $K(u_{x+s})$. Поэтому ниже все утверждения иллюстрируются для тех случаев, когда в (1) имеем

$$K(u_{x+s}) = -\frac{1}{2} A[u(t, x + l) + u(t, x - l)] + \frac{1}{2} B[u(t, x + ml) + u(t, x - ml)]\,, \tag{4}$$

где

$$2\pi > l > 0, \quad m > 0, \quad A > 0 \tag{5}$$

В качестве пространства начальных условий краевой задачи (1), (2) фиксируем пространство C всех непрерывных и 2π-периодических функций с метрикой

$$\| * \| = \max_x | * |.$$

Используя результаты работы [5], заключаем, что задача Коши для (1), (2) локально разрешима, т.е. для каждой $\phi(x) \in C$ найдется такое $t_0 > 0$, и такая функция $u(t, x)$, которая определена при $t \in (0, t_0], x \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяет тождествам (1), (2) и

$$\lim_{t \to +0} u(t, x) = \phi(x).$$

Кроме этого, найдется такое $r^0 > 0$, что при выполнении априорной оценки $\|u\| \leq r^0$ задача Коши глобально разрешима в сторону возрастания t.

Вопрос об устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2), (4) связан с поведением спектра оператора

$$L\phi \equiv \varepsilon \ddot{\phi} + K(u_{x+s}), \quad \phi(x + 2\pi) \equiv \phi(x).$$

Собственные значения этого оператора такие:

$$\lambda_k = -\varepsilon k^2 - A \cos kl + ib \sin mkl, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Обозначим через S_0 тот корень уравнения $S \tan S = -2$, который принадлежит интервалу $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, и положим

$$C_0 = [S_0^2(4 + S_0^2)]^{1/4} A^{-1/2}.$$

Сформулируем сначала один простой результат об устойчивости нулевого состояния равновесия.

Теорема 1. *Пусть в* (4) *параметры* A, B *и* m *фиксированы, а параметр* l *удовлетворяет одному из неравенств*

$$l \le C\sqrt{\varepsilon}, \qquad C < C_0 \tag{6}$$

или

$$l \ge C\sqrt{\varepsilon}, \qquad C > C_0 \tag{7}$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *нулевое состояние равновесия краевой задачи* $(1), (2), (4)$ *асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство* (6), *и неустойчиво, — если* (7).

Отметим, что при условии (6) все $\lambda_k \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$ имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to +0$, а в случае (7) количество тех значений λ_k, вещественная часть которых положительна (и имеет порядок $O(1)$ при $\varepsilon \to +0$), неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$.

Ниже будем полагать, что

$$l = C_0\sqrt{\varepsilon}(1 + \mu), \qquad \mu \ll 1. \tag{8}$$

Таким образом, в задаче об устойчивости решения $u \equiv 0$ реализуется критический случай. Особенностью его является то, что при $\varepsilon \to 0$ бесконечно много точек спектра оператора L стремятся к мнимой оси.

Рассмотрим вопрос о поведении при условии (8) и при достаточно малых ε и $|\mu|$ решений краевой задачи $(1), (2), (4)$ из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Введем несколько обозначений. Сначала отметим, что

$$\lambda_k = \lambda(kl) - \varepsilon k^2 \mu(2 + \mu)(1 + \mu)^{-2},$$

$$\lambda(s) = -C_0^2 S^2 - A\cos S + ib\sin mS.$$

При $\mu = 0$ и $|S| \ne S_0$ выполнено неравенство $Re\lambda(S) < 0$, а для $S = S_0$ верны соотношения

$$Re\lambda(\pm S_0) = Re\frac{d\lambda(S)}{dS}\Big|_{S=S_0} = 0, \quad Re\frac{d^2\lambda(S)}{dS^2}\Big|_{S=S_0} < 0.$$

Тем самым при значениях S, близких к S_0 имеем

$$\lambda(s) = i\omega_0 + i\omega_1(S - S_0) - (\alpha + i\beta)(S - S_0)^2 + O(|S - S_0|^3).$$

Здесь приняты обозначения $\omega = -i\lambda(S_0) = B\sin mS_0$, $\omega_1 = Bm\cos mS_0$, $\alpha = C_0^2(1 + \frac{1}{2}S_0^2)$, $\beta = \frac{1}{2}Bm^2\sin mS_0$.

Свойства решений $(1), (2), (4)$ в случаях $\omega_1 \ne 0$ и $\omega_1 = 0$ существенно различны. Ниже отдельно остановимся на каждом из этих двух случаев.

2. Случай $\omega_1 \ne 0$. Алгоритмическая часть и результаты

Здесь удобно считать, что параметры ε и μ связаны равенством

$$\mu = \gamma\sqrt{\varepsilon}. \tag{9}$$

Установившийся режим $u(t,x,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2), (4) будем искать в виде формального ряда по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$u(t,x,\varepsilon) \;= \varepsilon^{1/4}\Big[\xi(\tau,x,\varepsilon)\exp i\eta+\bar\xi(\tau,x,\varepsilon)\exp(-i\eta)\Big]+ \\ \varepsilon^{1/2}u_2(\tau,x,\varepsilon)+\varepsilon^{3/4}u_3(\tau,x,\varepsilon)+\ldots, \qquad (10)$$

где $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$, $\eta=\omega(\varepsilon)t+n(\varepsilon)x$, $\xi(\tau,x,\varepsilon)=\xi_0(\tau,x)+\varepsilon^{1/2}\xi_1(\tau,x)+\varepsilon\xi_2(\tau,x)+\ldots$ Функция $\omega(\varepsilon)$ имеет вид

$$\omega(\varepsilon)=\omega_0+\varepsilon^{1/2}d_1+\varepsilon d_2+\ldots,$$

а величины $d_1,d_2,\ldots$ неизвестны и подлежат определению. Для выражения $n(\varepsilon)$ справедлива формула

$$n(\varepsilon)=C_0^{-1}S_0\varepsilon^{-1/2}+\theta,$$

в которой $\theta=\theta(\varepsilon)\in(-1,0]$ определяется равенством

$$\theta(\varepsilon)=\{\varepsilon^{-1/2}C_0^{-1}S_0\}-\varepsilon^{-1/2}C_0^{-1}S_0.$$

Наконец зависимость от X и η в формуле (10) 2π- периодическая, причем выражения для $u_j(t,x,\eta)(j\ge 2)$ не содержат первых гармоник по η. Подставляя в краевую задачу (1), (2), (4) вместо u формальный ряд (10) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/4}$, последовательно находим все элементы этого ряда. Так, например, на первом шаге, приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, определяем функцию $u_2(t,x,\eta)$ через $\xi_0(\tau,x)$:

$$u_2(t,x,\eta)=\frac{f_2}{A}|\xi_0(\tau,x)|^2+\frac{f_2}{A_1}\xi_0^2(\tau,x)\exp 2i\pi\eta+\frac{f_2}{A_1}\bar\xi_0^2(\tau,x)\exp(-2i\pi\eta),$$

$$A_1=4C_0^{-2}S_0^2+2iB\sin mS_0\Big[1-\cos mS_0\Big],\qquad f_j=\frac{1}{j!}F^{(j)}(0).$$

на следующем шаге приходим к уравнению относительно $u_3(t,x,\eta)$, из условий разрешимости которого получаем краевую задачу для определения $\xi_0(\tau,x)$:

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\tau} \;=\; C_0\omega_1\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\Big[\gamma C_0^{-2}S_0^2+i(\gamma S_0+\theta C_0)\omega_1-id_1\omega_0\Big]\xi_0+ \\ \Big[r_1+ir_2\Big]\xi_0^2\bar\xi_0,\quad \xi(\tau,x+2\pi)\equiv\xi(\tau,x), \qquad (11)$$

в которой

$$r_1 \;=\; 2A^{-1}f_2^2+3f_3+2f_2|A_1|^{-2}\Big[4C_0^{-2}S_0^2-A\cos 2S_0\Big],$$
$$r_2 \;=\; -2f_2^2|A_1|^{-2}B\sin mS_0\Big[1-\cos mS_0\Big].$$

Утверждение 1. *Модуль каждого определенного при всех $\tau>0$ и ограниченного при $\tau\to\infty$ решения краевой задачи* (11) *стремится (равномерно относительно x) к константе при $\tau\to\infty$.*

Для обоснования этого утверждения достаточно в уравнении для $|\xi_0(\tau,x)|$ произвести последовательно умножения на $|\xi_0(\tau,x)|^n$ $(n=1,2,\ldots)$ и взять среднее по x и по $\tau\in(-\infty,\infty)$. Константа к которой стремятся при $\tau\in(-\infty,\infty)$ модули решений (11), равна, очевидно, либо нулю, либо $\xi_0 = [-\gamma S_0^{-2}(C_0^2 r_1]^{1/2}$, если, конечно, $\gamma r_1 < 0$. Знак γ отвечает за устойчивость нулевого решения (11) и $(1),(2),(4)$, а значение r_1 имеет смысл ляпуновской величины. Наибольший интерес представляет случай, когда

$$\gamma > 0,\ r_1 < 0, \tag{12}$$

то есть ситуация в некотором смысле аналогична той, которая имеет место в условии бифуркации Андронова-Хопфа.

Ниже предполагаем, что выполнены неравенства (12). Особенностью краевой задачи (11) является то, что существует богатое множество установившихся режимов, модуль которых равен ξ_0 при всех τ, x. Так, например, при условии на $d_1 = d_{1k}$ (а этот параметр в нашем распоряжении)

$$\omega_0 d_{1k} = kC_0\omega_1(\gamma S_0 + \theta C_0) - \gamma S_0^2 r_2 (C_0^2 r_1)^{-1}$$

краевая задача (11) имеет состояние равновесия

$$\xi_k(x) = \xi_0 \exp ikx\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Кроме этого, при том же значении $d_1 = d_{1k}$ решением (11) являются периодические по τ функции $\xi_{0k}(\tau, x, \phi)$ вида $\xi_{0k}(\tau, x, \phi) = \xi_0 \exp[ikx + i\phi(\tau, x)]$, где $\phi(\tau, x) = \phi_1(\eta_1) + \phi_2(\eta_2) + \dots$, а $\eta_j = C_0\omega_1 p_j \tau + p_j x\ (p_j = \pm 1, \pm 2, \dots)$, а $\phi_j(s)$ — произвольная гладкая 2π-периодическая функция.

После определения $\xi_0(\tau, x)$ и d_{1k} находим $u_3(\tau, x, \phi)$, а на следующем шаге — $u_4(\tau, x, \phi)$. Сформулируем один простой результат.

Утверждение 2. *Функция*

$$\begin{aligned} u_k(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/4}\Big[\xi_{0k}(\tau, x, \phi) \exp i\eta_0 + \bar{\xi}_{0k}(\tau, x, \phi)\exp(-i\eta)\Big] + \\ &\quad \varepsilon^{1/2} u_2(\tau, x, \eta_0) + \varepsilon^{3/4} u_3(\tau, x, \eta) + \varepsilon u_4(\tau, x, \eta_0), \end{aligned}$$

где $\eta_0 = (\omega_0 + \varepsilon^{1/2} d_1)t + n(\varepsilon)x$, *удовлетворяет краевой задаче* $(1),(2),(4)$ *с точностью до слагаемых порядка* $\varepsilon^{5/4}$ *равномерно по* t *и по* x.

Ответ на вопрос о том, существуют ли решения $(1),(2),(4)$, "близкие"к $u_k(t, x, \varepsilon)$ частично дает следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для того, чтобы алгоритм определения элементов формального ряда (10) можно было неограниченно продолжать, необходимо и достаточно, чтобы* $\xi_0(\tau, x) = \xi_k \exp i\phi_0$, *где* ϕ_0 — *произвольная постоянная, а* $d_1 = d_{1k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

К обоснованию необходимости условия $\xi_0(\tau, x) = \xi_k(x)$ приходим, анализируя краевую задачу относительно $\xi_1(\tau, x)$. Эта краевая задача возникла в процессе применения алгоритма для $\xi_0(\tau, x) = \xi_{0k}(\tau, x, \phi)$ при учете слагаемых порядка $\varepsilon^{5/4}$. Условие разрешимости в рассматриваемом случае формулируется в виде равенства

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_1\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big)^2 + a_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

(значения a_1 и a_2 не существенны). Отсюда ясно, что $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$; а значит, и $\phi(\tau, x) \equiv const$. Обоснование достаточности приведенного выше утверждения 3 проводится стандартно.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства* (12). *Тогда для каждого номера* $k(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ *найдется такое значение* ε_k, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$ *краевая задача* (1), (2), (4) *имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение*

$$u_k(\eta, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/4}\xi_0 \cos\eta + \varepsilon^{1/2} f_2 \xi_0^2 \Big[A^{-1} + A_1^{-1} \exp 2i\eta + \bar{A}_1 \exp(-2i\eta)\Big] + \dots, \tag{13}$$

где $\eta = [\omega_0 + \varepsilon^{1/2} d_{1k} + O(\varepsilon)]t + [n(\varepsilon) + k]x$, *а через* $\dots$ *обозначены слагаемые порядка* $\varepsilon^{3/4}$ *(которые представимы в виде асимптотического ряда по степеням* $\varepsilon^{1/4}$).

Отметим, что из теоремы 2 вытекает важный вывод: при $\varepsilon \to 0$. количество устойчивых периодических решений рассматриваемой краевой задачи неограниченно возрастает.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство, подчеркивающее сложность обоснования теоремы 2. Как оказывается спектру устойчивости линеаризованной на $\xi_k(x)$ краевой задачи (11) принадлежит бесконечно много чисто мнимых собственных значений. Это, в частности, приводит к необходимости учитывать в задаче об устойчивости $u_k(\eta, \varepsilon)$ все слагаемые из (13) до коэффициентов $\varepsilon^{5/4}$) включительно.

3. Случай $\omega_1 = 0$

В отличие от равенства (9), здесь введем параметр γ по иному. Положим

$$\mu = \gamma\varepsilon. \tag{14}$$

Установившиеся режимы краевой задачи (1), (2), (4) будем искать в виде формального ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}\Big[\xi(\tau, x) \exp i\eta + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\eta)\Big] + \\ &\quad \varepsilon u_2(\tau, x, \eta) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, x, \eta) + \dots, \\ \tau &= \varepsilon t,\ \eta = \Big[\omega_0 + \varepsilon d_1 + \dots\Big] t + n(\varepsilon) x. \end{aligned} \tag{15}$$

Зависимость от аргументов x и η в (11) — 2π-периодическая. Последовательно собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$ в (1) (при $u = u(t, x, \varepsilon)$), на третьем шаге получаем уравнение для $u_3(t, x, \varepsilon)$, из условий разрешимости которого в рассматриваемом классе функций находим краевую задачу для $\xi(\tau, x)$ и d_1:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \xi}{\partial \tau} &= -\tfrac{\ddot{\lambda}(S_0)}{2} C_0^2 \tfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - i\theta\lambda(S_0) C_0^2 \tfrac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &\Big[2\gamma C_0^{-2} S_0^2 + \tfrac{\ddot{\lambda}(S_0)}{2} C_0^2 \theta^2 - i d_1 \omega_0\Big]\xi + \\ &\Big[3 f_3 + 2(A^{-1} + A_1^{-1}) f_2^2\Big] |\xi|^2 \xi, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\xi\Big|_{x=0} = \xi\Big|_{x=2\pi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=2\pi}. \tag{17}$$

Предположим, что при некотором $d_1 = d_1^0$ краевая задача (16), (17) имеет состояние равновесия $\xi_0(x)$, и линеаризуем (16), (17) на этом состоянии равновесия. В итоге получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = Lv,$$

где

$$\begin{aligned} Lv \equiv \ & -\tfrac{\ddot{\lambda}(S_0)}{2}C_0^2\tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - i\theta\lambda(S_0)C_0^2\tfrac{\partial v}{\partial x} + \\ & \Big[2\gamma C_0^{-2}S_0^2 + \tfrac{\ddot{\lambda}(S_0)}{2}C_0^2\theta^2 - id_1\omega_0\Big]v + \\ & (r_1 + ir_2)\Big[\xi_0^2(x)\bar{v} + 2|\xi_0(x)|^2 v\Big], \end{aligned}$$

$$v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=2\pi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=2\pi}.$$

Выражение Lv обращается в нуль при $v = i\xi_0(x)$ и $v = i\xi_0'(x)$. Таким образом при условии $\xi_0'(x) \not\equiv (const)\xi_0(x)$ оператор L имеет нулевое собственное значение кратности не менее двух.

Теорема 3. *Пусть для некоторых $d_1 = d_1^0$ и $\theta = \theta_0$ краевая задача* $(16),(17)$ *имеет такое состояние равновесия $\xi_0(x)$ что $\xi_0'(x) \not\equiv (const)\xi_0(x)$, и пусть два собственных значения оператора L имеют нулевую вещественную часть. Тогда найдется такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача* $(1),(2),(4)$ *имеет решением двумерный тор $u_0(t, x, \varepsilon_n)$ причем*

$$\begin{aligned} u_0(t, x, \varepsilon_n) &= \varepsilon_n^{1/2}\Big[\xi_0(x + \tau_2)\exp i(\omega_0\tau_1 + n(\varepsilon_n)x) + \\ &\quad \bar{\xi}_0(x + \tau_2)\exp -i(\omega_0\tau_1 + n(\varepsilon_n)x)\Big] + O(\varepsilon_n), \\ \tau_1' &= 1 + \varepsilon_n d_1^0 + O(\varepsilon_n^2),\ \tau_2' = O(\varepsilon_n^2), \end{aligned}$$

При этих условиях тор u_0 экспоненциально орбитально устойчив тогда и только тогда, когда у оператора L при $d_1 = d_1^0$ и $\theta = \theta_0$ нет собственных значений с положительными вещественными частями.

Отметим, что последовательность ε_n определяется из условия $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$.

Рассмотрим затем более простой случай, когда при некотором θ_0 краевая задача (16),(17) имеет состояние равновесия $\xi_k \exp ikx$ $(k - - -)$. Как и в п.2, ограничимся изучением ситуации, когда выполнены неравенства $\gamma > 0,\ r_1 < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} |\xi_k|^2 &= -|r_1|^{-1}\Big[\alpha C_0^2(k^2 + \theta_0 k + \tfrac{1}{2}\theta_0^2) - 2\gamma C_0^2 S_0^2\Big], \\ d_1 = d_{1k} &= \omega_0^{-1}\Big[r_2|\xi_k|^2 - -\beta C_0^2(k^2 + \theta_0 k + \tfrac{1}{2}\theta_0^2)\Big]. \end{aligned}$$

Очевидно, что количество таких состояний равновесия конечно. Относительно оператора L можно утверждать, что он имеет по крайней мере одно нулевое собственное значение. Для формулировки следующего утверждения введем несколько обозначений. Положим

$$\begin{aligned} Q(0, n, \theta) &= \alpha(1 + \beta^2\alpha^{-2}) + 2\gamma(1 - \beta r_2(\alpha r_1)^{-1}), \\ Q(k, n, \theta) &= \tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{n^2}{(k+\theta/2)^2} + z_k\Big)^2\Big(\tfrac{n^2}{(k+\theta/2)^2} - gz_k\Big) - \\ &\quad \tfrac{n^4}{(k+\theta/2)^4} + \tfrac{n^2}{(k+\theta/2)^2}gz_k - qz_k^2, \\ z_k &= \Big(\tfrac{2\gamma S_0}{C_0^2} - \tfrac{\alpha\theta_0^2 C_0^2}{2}\Big)\Big(k + \tfrac{\theta_0}{2}\Big)^{-2}\alpha^{-1} - 1, \\ g &= 2\Big(\tfrac{\beta r_2^2}{\alpha r_1} - 1\Big)\Big(1 + \tfrac{\beta^2}{\alpha^2}\Big)^{-1},\ q = \Big(1 + \tfrac{r_2^2}{r_1^2}\Big)\Big(1 + \tfrac{\beta^2}{\alpha^2}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что из условия $Q(k,n,\theta) \neq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ вытекает, что мнимой оси принадлежит лишь одно собственное значение линеаризованного на $\xi_k \exp ikx$ оператора L.

Теорема 4. *Пусть при некоторых* $d_1 = d_{1k}$ *и* $Q = \theta_0$ *краевая задача (16),(17) имеет состояние равновесия* $\xi_k \exp ikx$ $(\xi_k \neq 0)$ *и для* $n = 1, 2, \ldots$ *выполнены неравенства* $Q(k,n,\theta) \neq 0$. *Тогда найдется такая последовательность* $\varepsilon_{\bar{n}} \to 0$, *что краевая задача (1),(2),(4) имеет периодическое решение — бегущую волну* $u_k\big(\omega(\varepsilon_{\bar{n}})t + (n(\varepsilon_{\bar{n}} + k)x,\ \varepsilon_{\bar{n}}\big)$ *причем*

$$\omega(\varepsilon_{\bar{n}}) = \omega_0 + \varepsilon_{\bar{n}} d_{1k} + O\big(\varepsilon_{\bar{n}}^2\big),$$

$$u_k(\eta, \varepsilon_{\bar{n}}) = \varepsilon_{\bar{n}}^{1/2}\Big(\xi_k \exp i\eta + \bar{\xi}_k \exp(-i\eta)\Big) + O\big(\varepsilon_{\bar{n}}\big).$$

Решение $u_k(\eta, \varepsilon_{\bar{n}})$ *экспоненциально орбитально устойчиво, если при всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеем* $Q(k,n,\theta) > 0$, *и устойчиво, если найдется такое целое* n_0 *что* $Q(k,n_0,\theta) < 0$.

Теоремы 3 и 4 допускают обобщения на случаи, когда краевая задача (16),(17) имеет установившийся режим, не являющийся состоянием равновесия. Например, периодическому решению (16),(17) при некоторых условиях типа грубости отвечает трехмерный тор краевой задачи (1),(2),(4) соответствующей структуры. Из результатов работы [6] следует, что краевая задача (16),(17) может иметь множество различных и сложных установившихся режимов.

Обратим внимание на один интересный факт, связанный с присутствием в (16) параметра θ. Возможна ситуация, когда при $\varepsilon \to 0$ бесконечно много раз происходит "рождение" и "гибель" устойчивого периодического решения (1),(2),(4).

Для сравнения коротко остановимся на существенно более простом случае, когда $A = \varepsilon a, l = \varepsilon c$. В этой ситуации тоже бесконечно много чисел λ_k стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Процедура, подобная той, которая использовалась выше для исследования вопроса об установившихся режимах исходной краевой задачи, позволяет получить более простое уравнение для «медленной» переменной $\xi(\tau, x)$ $(\tau = \varepsilon t)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + BCm\frac{\partial \xi}{\partial x} + 2a\xi + f_2\xi^2,$$

$$\xi\Big|_{x=0} = \xi\Big|_{x=2\pi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x=2\pi}.$$

Эта краевая задача имеет ровно два (при условии $af_2 \neq 0$) состояния равновесия $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = -2f_2^{-1}a_2$. Вопрос об устойчивости ξ_1 и ξ_2 решается тривиально. То же самое в «главном» уравнении получается из (1),(2),(4) и в результате замены выражений типа u_{x+l} на $u + l\frac{\partial u}{\partial x}$. Для всех рассмотренных выше случаев подобную замену делать нельзя. Отметим, что один интересный пример рассмотрен в работе [7].

Список цитируемых источников

1. *Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Математический сборник. — 1986. — Т.130(172), №4. — С. 488-499.

   Vasil'eva A. B., Kashchenko S. A., Kolesov Yu. S., Rozov N. Kh. (1987). Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion // Math. USSR, Sb., 58(2), 491–503.

2. *Кащенко, С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. — 1988. — Т.299, №5. — С. 1049-1053.

   Kashchenko, S.A. (1988). On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. Sov. Math. Dokl., 37(2), 510-513.

3. *Кащенко, С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией. // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, №2. — С. 262-270.

   Kashchenko, S.A. (1989). Spatial features of high-mode bifurcations of two-component systems with weak diffusion. Differ. Equations, 25(2), 193-199.

4. *Кащенко С.А.* О коротковолновых бифуркациях в системах с малой диффузией. // ДАН СССР. — 1989. — Т. 307, №2. — С. 269–273.

   Kashchenko, S.A. (1989). On the shortwaves bifurcations in systems with small diffusion (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 307, 269–273.

5. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах. // Тр. ММО. — 1961. — Т. 10. — С. 297-350.

   Sobolevskiy P.Ye. (1961). On the equations of parabolic type in Banach spaces (in Russian). Trudy Mosk. Mat. Obshch., 10, 297-350.

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.

   Ahromeeva, T.S., Kurdyumov, S.P., Malineckij, G.G., Samarskij, A.A. (1992). Unsteady structure and diffusion chaos (in Russian). Moscow: Nauka.

7. *Кащенко С.А.* Бифуркационные особенности в одной модели динамики популяции, описываемой параболическим уравнением с малой диффузией и отклонением пространственной переменной // В сб. «Динамика биологических популяций». — Горький, ГГУ, 1989. — С. 83-89.

   Kashchenko, S.A. (1989). Bifurcation singularities in a single model population dynamics described by the parabolic equation with a small diffusion and deviation of spatial variable (in Russian). «Modelirovanie dinamiki populyacii», Gorkii, pp. 83-89.

Получена 22.11.2015