Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 77–83

УДК 512.74

Рациональный базис в дифференциальном поле инвариантов для группы треугольных матриц

К. К. Муминов, В. И. Чилин

Национальный университет Узбекистана,
Ташкент 100174, УЗБЕКИСТАН.
E-mail: m.muminov@rambler.ru, vladimirchil@gmail.com

Аннотация. Устанавливается явный вид конечного дифференциального рационального базиса в поле дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы всех невырожденных нижне-треугольных $n \times n$ матриц над полем действительных или комплексных чисел.

Ключевые слова: группа движений, дифференциальный инвариант действия группы

1. Введение

Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем K, где K есть поле действительных чисел R, либо поле комплексных чисел C. Обозначим через $GL\,(n, K)$ группу всех обратимых линейных преобразований пространства X, а через G произвольную подгруппу в $GL\,(n, K)$. Одной из важных задач дифференциальной геометрии является нахождение необходимых и достаточных условий, обеспечивающих эквивалентность путей и кривых, лежащих в X, при действии группы G. Для решения этой задачи, в последние годы, активно используются методы теории инвариантов, с помощью которых изучаются дифференциальные поля всех G-инвариантных дифференциальных рациональных функций для путей и описываются конечные дифференциальные рациональные базисы этих полей. Знание этих базисов позволяет дать эффективные критерии для G-эквивалентности путей и кривых. Такой подход использовался в [10], [11] при решении задачи об эквивалентности кривых относительно движений в R^n, в частности, для действия полупрямого произведения $R^n \triangleleft SL\,(n, R)$ групп R^n и $SL\,(n, R)$. В [3], [4] этим методом была решена задача об эквивалентности путей и кривых, в случае действия симплектической группы $Sp\,(2n, C)$, а в [1] — для действия групп $R^n \triangleleft O\,(n, R)$ и $R^n \triangleleft SO\,(n, R)$. В работах [5], [6] с использованием дифференциальных рациональных базисов даны необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей и кривых при действии псевдоортогональной группы $O\,(n, p, K)$, специальной псевдоортогональной группы $SO\,(n, p, K)$, а также при действии групп $K^n \triangleleft O\,(n, p, K)$ и $K^n \triangleleft SO\,(n, p, K)$.

Настоящая работа посвящена нахождению явного вида конечного дифференциального рационального базиса в поле инвариантных рациональных дифференциальных функций относительно действия группы $T(n, K)$ всех невырожденных нижнетреугольных $n \times n$-матриц над полем K.

Используются терминология и обозначения теории дифференциальных полей из [2] и теории дифференциальных инвариантов из [9].

2. Предварительные сведения

Пусть K — поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел и X — n - мерное линейное пространство над K, $n \in N$, где N — множество всех натуральных чисел. Зафиксируем базис в X и будем считать, что $X = K^n$, а каждый элемент $x \in X$ есть вектор-столбец $\{x_i\}_{i=1}^n$, где $x_i \in K$, $\quad i = 1, ..., n$. Возьмем произвольный конечный или счетный набор $E = \{\vec{x}_m\}_{m \in M}$ векторов $\vec{x}_m = (x_i^{(m)})_{i=1}^n$ из K^n, где $M = \{1, ..., k\}$ — конечное множество, либо $M = N$. Рассмотрим алгебру $K\{E\}$ всех многочленов от переменных $x_i^{(m)}$, $\quad i = 1, \ldots, n$, $m \in M$. Обозначим через $K(E)$ поле частных для кольца $K\{E\}$, т.е. $K(E)$ является полем всех рациональных функций от тех же переменных $x_i^{(m)}$, $\quad i = 1, \ldots, n$, $m \in M$. Элементы из поля $K(E)$ будем записывать в виде $f\left(\vec{x}_{m_1}, ..., \vec{x}_{m_k}\right) = f\left(x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n^{(m_1)}, x_1^{(m_2)}, \ldots, x_n^{(m_2)}, x_1^{(m_k)}, \ldots, x_n^{(m_k)}\right)$, где $\{\vec{x}_{m_j}\}_{j=1}^k \subset E$.

Пусть $GL(n, K)$ — группа всех невырожденных $n \times n$ - матриц над полем K и G - произвольная подгруппа группы $GL(n, K)$. Рассмотрим естественное действие $(g, \vec{x}) \to g\vec{x}$ группы G на линейном пространстве K^n, как обычное умножение матрицы $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ на вектор - столбец $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n \in K^n$. Говорят, что рациональная функция $f\left(\vec{x}_{k_1}, \ldots, \vec{x}_{k_m}\right)$ является G - инвариантной, если $f\left(g\vec{x}_{k_1}, \ldots, g\vec{x}_{k_m}\right) =$ $= f\left(\vec{x}_{k_1}, \ldots, \vec{x}_{k_m}\right)$ для всех $g \in G$. Ясно, что множество всех G - инвариантных рациональных функций, обозначаемое через $K(E)^G$, является подполем в $K(E)$.

Говорят, что система рациональных функций $F = \{f_i\}_{i \in I} \subset K(E)^G$ является системой образующих поля $K(E)^G$, если любой элемент $f \in K(E)^G$ может быть получен из конечного числа элементов множества F применением конечного числа раз алгебраических операций поля $K(E)^G$.

Элементы $f_1, \ldots, f_k$ из $K(E)^G$ называются алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $P(x_1, \ldots, x_k)$ от k переменных $x_1, \ldots, x_k$ с коэффициентами из поля K, что $P(f_1, \cdots, f_k) = 0$. В противном случае, система элементов $f_1, \ldots, f_k$ называется алгебраически независимой. Если набор $\{f_1, \ldots, f_k\}$ алгебраически независим и является системой образующих в поле $K(E)^G$, то говорят, что набор $\{f_1, \ldots, f_k\}$ есть рациональный базис в $K(E)^G$.

Обозначим через $T(n, K)$ группу всех невырожденных нижнетреугольных матриц, т.е. таких $\ g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, K)$, для которых $\ g_{ij} = 0\ $ при $i < j$, $\quad i, j = 1, ..., n$, $det\ g \neq 0$. Зафиксируем $k > n$ и рассмотрим конечный набор $E = \{\vec{x}_j\}_{j=1}^k = \{(x_i^{(j)})_{i=1}^n\}_{j=1}^k$ из K^n, состоящий из k векторов.

Для каждого фиксированного натуральном числа m из набора $\{1, \ldots, n\}$ рассмотрим m - мерные вектор - столбцы $\vec{x}_j(m) = \{x_i^{(j)}\}_{i=1}^m \in K^m$, $j = 1, \ldots, k$, и соответствующий определитель

$$\Delta(j_1, \ldots, j_m) = \Delta(\vec{x_{j_1}}(m), \ldots, \vec{x_{j_m}}(m)) = \begin{vmatrix} x_1^{(j_1)} & \cdots & x_1^{(j_m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^{(j_1)} & \cdots & x_m^{(j_m)} \end{vmatrix}.$$

.

Обозначим через $\psi_{m,j}(E)$ рациональную функцию из поля $K(\{\vec{x_m}\}_{m=1}^k)$, определенную равенством

$$\psi_{m,j}(E) = \frac{\Delta(1,\ldots,m-1,j)}{\Delta(1,\ldots,m-1,m)} = \frac{\Delta(\vec{x_1}(m),\ldots,\vec{x_{m-1}}(m),\vec{x_j}(m))}{\Delta(\vec{x_1}(m),\ldots,\vec{x_{m-1}}(m)\,\vec{x_m}(m))} := \psi(1,\ldots,m-1,j),$$

где $m = 1,\ldots,n-1,\ \ j = m+1,\ldots,k$ (при $m = 1$ берутся функции $\psi(j) = \frac{x_1^{(j)}}{x_1^{(1)}}$).

В [8, теорема 4] получено следующее описание конечного рационального базиса в поле $K(\{\vec{x}_m\}_{m=1}^k)^{T(n,K)}$.

Теорема 1. *Для любого конечного набора $\{\vec{x}_m\}_{m=1}^k \subset K^n$ при $k > n$ система рациональных функций $\psi(1,\ldots,m-1,j)$, $\quad m = 1,\ldots,n-1 \quad j = m+1,\ldots,k$, образует рациональный базис в поле $K(\{\vec{x}_m\}_{m=1}^k)^{T(n,K)}$.*

3. Дифференциальные инварианты группы $T(n,K)$.

Зафиксируем $n \in N$ и рассмотрим счетный набор $E = \{\vec{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ векторов $\vec{x}^{(m)} = (x_i^{(m)})_{i=1}^n$ из K^n. В этом случае $K\{E\}$ есть алгебра над полем K всех многочленов от счетного числа переменных $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},\quad x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)},\ldots,x_1^{(r)},\ldots,x_n^{(r)},\ldots$. Положим $d\left(x_i^{(r)}\right) = x_i^{(r+1)}$, $i = 1,\ldots,n$, $r = 0, 1, \ldots$. Ясно, что отображения d однозначно продолжается до дифференцирования в алгебре $K\{E\}$, наделяя эту алгебру структурой дифференциального кольца (d - кольца). Элементы этого d - кольца называются d — многочленами (дифференциальными многочленами). Известно [2], что дифференцирование d на дифференциальном кольце $K\{E\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле частных $K(E)$. Это поле частных вместе с дифференцированием d называется дифференциальным полем (d - полем) d - рациональных функций и обозначается через $K < E >$. Элементы поля $K < E >$ записываются в виде $f < \vec{x}^{(r_1)},\ldots,\vec{x}^{(r_k)} >$, $r_i \in N\bigcup\{0\}$, $i = 1,\ldots,k$, $k \in N$.

Если G — произвольная подгруппа в группе $GL(n,K)$, то d - рациональная функция $f < \vec{x}^{(r_1)},\ldots,\vec{x}^{(r_k)} >$ называется G - инвариантной, если $f < g\vec{x}^{(r_1)},\ldots,g\vec{x}^{(r_k)} >=$
$= f < \vec{x}^{(r_1)},\ldots,\vec{x}^{(r_k)} >$ для всех $g \in G$.

Известно, что множество всех G - инвариантных d - рациональных функций, обозначаемое через $K < E >^G$, является подполем в $K < E >$, при этом, $K < E >^G$ инвариантно относительно действия дифференцирования из $K < E >$, т.е. $(K < E >^G, d)$ также является дифференциальным полем [9].

Говорят, что система d - рациональных функций $F \subset K < E >$ является системой образующих d - поля $K < E >$, если любой элемент $f \in K < E >$ может быть получен из конечного числа элементов множества F применением конечного числа раз алгебраических операций и дифференцирования в d - поле $K < E >$.

Элементы $f_1,\ldots,f_k$ из d - поля $K < E >$ называются d - алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой d - многочлен $P(x_1,\ldots,x_k)$ от k переменных $x_1,\ldots,x_k$ с коэффициентами из поля K что $P(f_1,\ldots,f_k) = 0$. В противном случае, система элементов $f_1,\ldots,f_k$ называется d - алгебраически независимой. Если набор $\{f_1,\ldots,f_k\}$ -

d - алгебраически независим и является системой образующих в d - поле $K < E >$, то говорят, что набор $\{f_1, \ldots, f_k\}$ есть d - рациональный базис в $K < E >$ (см. например, [9]).

Для любого фиксированного натурального числа m из набора $\{1, \ldots, n\}$ рассмотрим m - мерные вектор - столбцы $\vec{x}^{(j)}(m) = \{x_i^{(j)}\}_{i=1}^{m} \in K^m$, $j = 0, 1, \ldots$, и определим d - многочлен

$$\Delta\,(\vec{x}^{(0)}(m), \ldots, \vec{x}^{(m-2)}(m), \vec{x}^{(j)}(m)) = \begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(m-2)} & x_1^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^{(0)} & x_m^{(1)} & \cdots & x_m^{(m-2)} & x_m^{(j)} \end{vmatrix}.$$

Затем определим следующие d - рациональные функции из d - поля $K < E >$

$$\psi_{0,j}(E) = \frac{x_1^{(j)}}{x_1^{(0)}}; \quad \psi_{1,j}(E) = \frac{\Delta(\vec{x}^{(0)}(2), \vec{x}^{(j)}(2))}{\Delta(\vec{x}^{(0)}(2), \vec{x}^{(1)}(2))},$$

$$\psi_{2,j}(E) = \frac{\Delta(\vec{x}^{(0)}(3), \vec{x}^{(1)}(3), \vec{x}^{(j)}(3),)}{\Delta(\vec{x}^{(0)}(3), \vec{x}^{(1)}(3), \vec{x}^{(2)}(3))}, \ldots,$$

$$\psi_{m,j}(E) = \frac{\Delta(\vec{x}^{(0)}(m), \vec{x}^{(1)}(m), \ldots, \vec{x}^{(m-1)}(m), \vec{x}^{(j)}(m))}{\Delta(\vec{x}^{(0)}(m), \vec{x}^{(1)}(m), \ldots, \vec{x}^{(m-1)}(m), \vec{x}^{(m)}(m))}, \tag{3.1}$$

где $m = 0, 1, \ldots, n-2\,, \quad j = m+1, m+2, \ldots$

Теорема 2. *В дифференциальном поле $K < E >^{T(n,K)}$ d - рациональные функции из системы (3.1) являются системой образующих, каждый конечный набор которых d - алгебраически независим.*

Доказательство. Используя равенство

$$K < E >^{T(n,K)} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} K(\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k-1)})^{T(n,K)},$$

выберем для d - рациональной функции $f \in K < E >^{T(n,K)}$ такое $k > n+1$, что $f \in K(\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k-1)})$. Из теоремы 1 следует, что следующие рациональные функции образуют рациональный базис в поле $K(\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k-1)})^{T(n,K)}$:

$$\psi_{m,j}\,(E), \quad m = 0, \ldots, n-2\,, \quad j = m+1, \ldots, k-1. \tag{3.2}$$

Следовательно, d - рациональная функция f выражается через систему рациональных функций из (3.2) с помощью конечного числа алгебраических операций из поля $K(\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k-1)})^{T(n,K)}$. Это означает, что набор рациональных функций из (3.1) является системой образующих для d - поля $K < E >^{T(n,K)}$.

Покажем, что каждый конечный набор из системы (3.1) является d - алгебраически независимым в d - поле $K < E >^{T(n,K)}$. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ - произвольные функции из системы (3.1) и они d - алгебраически зависимы, т.е. существует такой ненулевой d - многочлен $P\,(t_1, \ldots, t_\ell)$ от ℓ переменных $t_1, \ldots, t_\ell$ с коэффициентами из поля K, что

$P(\psi_1,\ldots,\psi_\ell)=0$. Это означает, что рациональные функции $\psi_1,...,\psi_\ell$ алгебраически зависимы в поле $K(\vec{x}^{(0)},\vec{x}^{(1)},\ldots,\vec{x}^{(k-1)})^{T(n,K)}$ для достаточно большого $k\in N$, а это противоречит теореме 1. Следовательно, система рациональных функций $\psi_1,\ldots,\psi_\ell$ является d - алгебраически независимой в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$.

□

4. Дифференциально рациональный базис в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$

Согласно теореме 2, систему образующих в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$ составляют функции вида

$$\psi\,(j)=\frac{\Delta\,(j)}{\Delta\,(0)}=\frac{x_1^{(j)}}{x_1^{(0)}},\quad j=1,\,2,\ldots,\quad \psi(0,1,\ldots,m-1,j)=\frac{\Delta\,(0,1,\ldots,m-1,j)}{\Delta\,(0,1,\ldots,m-1,m)}\qquad(4.1)$$

$m=1,\ldots,n-2\,,\quad j=m+1,m+2,\ldots$

Следующая теорема дает явный вид конечного d - рационального базиса в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$.

Теорема 3. *d - Рациональный базис в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$ образуют функции вида*

$$\psi(1)=\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(0)}},\ \psi(0,1,\ldots,m-1,m+1),\quad m=1,\ldots,n-1.\qquad(4.2)$$

Доказательство. При $n=2$ и $n=3$ теорема 3 доказана в [7]. Предположим, что теорема доказана при $n=k$. Это означает, что функции из семейства (4.1) выражаются d - рационально через функции $\psi(1)$, $\psi(0,1,\ldots,m-1,m)$, $m=1,\ldots,k-1$. Пусть теперь $n=k+1$. Для функции $\psi\,(2)=\frac{x_1^{(2)}}{x_1}$ имеем, что

$$\psi(1)'+\psi(1)^2=\left(\frac{x_1^{(1)}}{x_1}\right)'+\left(\frac{x_1^{(1)}}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^{(2)}x_1-(x_1^{(1)})^2}{x_1^{(2)}}+\left(\frac{x_1^{(1)}}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^{(2)}}{x_1}=\psi(2).$$

Предположим, что $\psi(3),...,\psi(j)$ выражаются через $\psi(1)$ с помощью конечного числа алгебраических операций и дифференцирования в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$.

Поскольку

$$\psi(j)'+\psi(1)\cdot\psi(j)=\left(\frac{x_1^{(j)}}{x_1}\right)'+\frac{x_1^{(1)}\,x_1^{(j)}}{x_1^2}=\frac{x_1^{(j+1)}\,x_1-x_1^{(j)}\,x_1^{(1)}}{x_1^2}+\frac{x_1^{(1)}\,x_1^{(j)}}{x_1^2}=\frac{x_1^{(j+1)}}{x_1}=\psi(j+1),$$

то функция $\psi(j+1)$ также выражается через $\psi(1)$ с помощью конечного числа алгебраических операций и дифференцирование в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$. Следовательно, все функции $\psi(j)$, $j=2,3,\ldots$, выражаются через рациональную функцию $\frac{x_1^{(1)}}{x_1}$. Далее, для d - многочлена

$$\Delta\,(0,1,...,k-1,k)=\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{k+1}^{(0)} & x_{k+1}^{(1)} & \cdots & x_{k+1}^{(k)}\end{vmatrix}$$

имеем, что

$$\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k) = \Delta(0,1,\ldots,k-1,k+1);$$
$$\Delta''(0,1,\ldots,k-1,k) = \Delta(0,1,\ldots,k-1,k+2);$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\Delta^{(r)}(0,1,\ldots,k-1,k) = \Delta(0,1,\ldots,k-1,k+r).$$

Поскольку

$$\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+1) = \frac{\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)},$$
$$\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+2) = \frac{\Delta''(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)},$$

то

$$\psi'(0,1,\ldots,k-1,k+1) + \psi^2(0,1,\ldots,k-1,k+1) =$$
$$= \frac{\Delta''(0,1,\ldots,k-1,k)\cdot\Delta(0,1,\ldots,k-1,k) - (\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k))^2}{(\Delta(0,1,\ldots,k-1,k))^2} -$$
$$-\frac{(\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k))^2}{(\Delta(0,1,\ldots,k-1,k))^2} = \frac{\Delta''(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)} = \psi(0,1,\ldots,k-1,k+2).$$

Следовательно, функция $\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+2)$ выражается d - рационально через функцию $\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+1)$.

Предположим теперь, что функции $\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+r)$, $r=3,4,\ldots,j$, выражаются через $\psi\,(0,1,\ldots,k-1,k+1)$ с помощью конечного числа алгебраических операций и дифференцирования в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$.

Поскольку

$$\psi'(0,1,\ldots,k-1,k+j) + \psi(0,1,\ldots,k-1,k+1)\psi(0,1,\ldots,k-1,k+j)) =$$
$$= (\frac{\Delta^{(j)}(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)})' + \frac{\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)}\cdot\frac{\Delta^{(j)}(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)} =$$
$$= \frac{\Delta^{(j+1)}(0,1,\ldots,k-1,k)\Delta(0,1,\ldots,k-1,k) - \Delta^{(j)}(0,1,\ldots,k-1,k)\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k)}{(\Delta(0,1,\ldots,k-1,k))^2} +$$
$$+\frac{\Delta'(0,1,\ldots,k-1,k)\Delta^{(j)}(0,1,\ldots,k-1,k)}{(\Delta(0,1,\ldots,k-1,k))^2} =$$
$$= \frac{\Delta^{(j+1)}(0,1,\ldots,k-1,k)}{\Delta(0,1,\ldots,k-1,k)} = \psi(0,1,\ldots,k-1,k+j+1),$$

то функция $\psi(0,1,\ldots,m-1,k+j+1)$ также выражается через $\psi(0,1,\ldots,k-1,k+1)$ с помощью конечного числа операций d - поля $K<E>^{T(k+1,K)}$. Следовательно d - рациональные функции из системы (4.2) являются конечной системой образующих в d - поле $K<E>^{T(k+1,K)}$ для любого $k=3,\,4,\ldots$.

Согласно теореме 2, набор функций (4.2) является d - алгебраически независимым. Это означает, что d - рациональные функции из системы (4.2) образуют d - рациональный базис в d - поле $K<E>^{T(n,K)}$.

□

Список цитируемых источников

1. *Арипов Р.Г., Хаджиев Дж.* Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии // Известия ВУЗов. Математика. — 2007. — №7. — С. 3-15.

   Aripov R.G., Khadzhiev D. The complete system of global differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2007, 51:7, 1-14.
2. *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959. — 86 с.

   Kaplansky I. An introduction to differential algebra. Hermann, Paris. 1957.
3. *Муминов К.К.* Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы // Известия ВУЗов. Математика. — 2002. — №7. — С. 27-38.

   Muminov K.K. Equivalence of paths with respect to symplectic group action. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2002, 46:7, 25-36.
4. *Муминов К.К.* Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы // Известия ВУЗов. Математика. — 2009. — №6. — С. 31-36.

   Muminov K.K. Equivalence of curves with respect to the action of the symplectic group. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2009, 53:6, 24-28.
5. *Муминов К.К., Гаффоров Р.А.* Эквивалентность конечных систем путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского.Серия:Физика-математические науки. 2011.Т.24(63). №1. — С. 90-100.

   Muminov K.K., Gafforov R.A. Equivalence of finite systems of paths with respect to action of special pseudoorthogonal group. Uchenie zapiski Tavricheskogo national University imeni Vernadskogo. Seriya: Phiziko-matematicheskie nauki. 2011. V. 24(63). № 1. P. 90-100.
6. *Муминов К.К., Чилин В.И.* Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве // Динамические системы. 2013. Т. 3 (31). № 1-2. С. 135-149.

   Chilin V.I., Muminov K.K. The complete system of differential invariants of a curve in pseudoeuclidean space . Din. Sist., Simferopol, 2013. V. 3(31), no.1-2, 135-149.
7. *Муминов К. К., Чилин В. И.* Дифференциальные инварианты для действия группы треугольных матриц //Узбекский математический журнал. 2013. № 2. С. 51-59.

   Chilin V.I., Muminov K.K. Differential invariants for action of group of triangular matrixes. Uzbeksky matematicheskiy journal. 2013. № 2. P. 51-59.
8. *Пеннер И.А.* Векторные инварианты группы треугольных преобразований // Ученые записки Московского гос. Пед. Института. 1967. № 271. С. 293-298.

   Penner I.A. Vector invariants of group of triangular transformations. Uchenie zapiski Moskovskogo Pedagogicheskogo Instituta. 1967. № 271. P. 293-298.
9. *Хаджиев Дж.* Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых — Ташкент: ФАН, 1998. — 136 с.

   Khadjiev Dj. The application of theory invariants to differential geometry of curves. Tashkent: FAN, 1998. — 136 pp.
10. *Khadjiev Dj., Peksen O.* On invariants of curves in Centra-affine geometry // J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) — 2004. — V.44. — №3. — P. 603–613.
11. *Khadjiev Dj., Peksen O.* The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves // Differential Geometry and Applications. — 2004. — V.20. — №2. — P. 167–175.

Получена 08.06.2015