Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 31–37

УДК 517.938

Энергетическая функция для A-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами

В. З. Гринес, М. К Носкова, О. В. Починка
Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
603155, Нижний Новгород.

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции для A-диффеоморфизмов, заданных на замкнутых ориентируемых двумерных многообразиях, не имеющих циклов и имеющих нетривиальные базисные множества только размерности один. Известно, что каждое базисное множество такого диффеоморфизма является либо аттрактором, либо репеллером и локально устроено как декартово произведение канторова множества на интервал. Несмотря на сложную топологию неблуждающего множества, построенная энергетическая функция является функцией Морса вне нетривиальных аттракторов и репеллеров, и является константой на базисном множестве.

Ключевые слова: диффеоморфизмы поверхностей, энергетическая функция, функция Морса.

Введение и формулировка результатов

Вопрос о существовании гладкой функции Ляпунова с множеством критических точек, совпадающим с неблуждающим множеством структурно устойчивого диффеоморфизма (*энергетической функции*) восходит к работе Д. Пикстона [5]. В этой работе было доказано, что структурно устойчивые дифеоморфизмы с конечным неблуждаюющим множеством (*диффеоморфизмы Морса-Смейла*) на двумерных многообразиях обладают энергетической функцией. Однако даже простейшие такие диффеоморфизмы на 3-многообразиях не обладают в общем случае такой функцией. В. З. Гринес, Ф. Лауденбах и О. В. Починка [1] выделили класс трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла, для которых существует энергетическая функция Морса. В работе [3] предъявлен метод построения энергетической функция для любого структурно устойчивого 3-диффеоморфизма, неблуждающее множество которого содержит растягивающийся двумерный аттрактор (при этом построенная функция является функцией Морса вне аттрактора). В работе [4] доказано существование энергетической функции для A-диффеоморфизмов на 3-многообразиях, неблуждающее множество которых состоит из двумерных базисных множеств. Настоящая работа посвящена построению энергетической функции двумерных диффеомрфизмов, все нетривиальные аттракторы и репеллеры которых являются одномерными. Более детально.

В работе рассматриваются A-диффеоморфизмы f на гладких замкнутых ориентируемых 2-многообразиях M. Для A-диффеоморфизмов (то есть диффеоморфизмов, чье неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболично и является замыканием периодических точек) имеет место теорема С. Смейла о спектральном разложении, согласно которой $NW(f)$ единственным образом представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся множеств $NW(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_n$, называемых *базисными*, каждое из которых является компактным инвариантным и топологически транзитивным.

© *В. З. ГРИНЕС, М. К НОСКОВА, О. В. ПОЧИНКА*

При этом $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} W^u(\Omega_i)$, и каждое базисное множество $\Omega_i, i = 1, \dots, n$ представляется в виде конечного объединения непересекающихся компактных множеств $\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_{m_i}}$, называемых *периодическими компонентами*, которые циклически переходят друг в друга. *Типом* базисного множества Ω называется пара чисел (a, b) таких, что $a = W^u_x$, $b = W^s_x$, $x \in \Omega$. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от периодической орбиты. Очевидно, что все нетривиальные множества диффеоморфизмов поверхностей имеют тип $(1, 1)$. *Циклом* называется набор базисных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \Omega_{k+1} = \Omega_1$ со свойством $W^s_{\Omega_i} \cap W^u_{\Omega_{i+1}} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, k$.

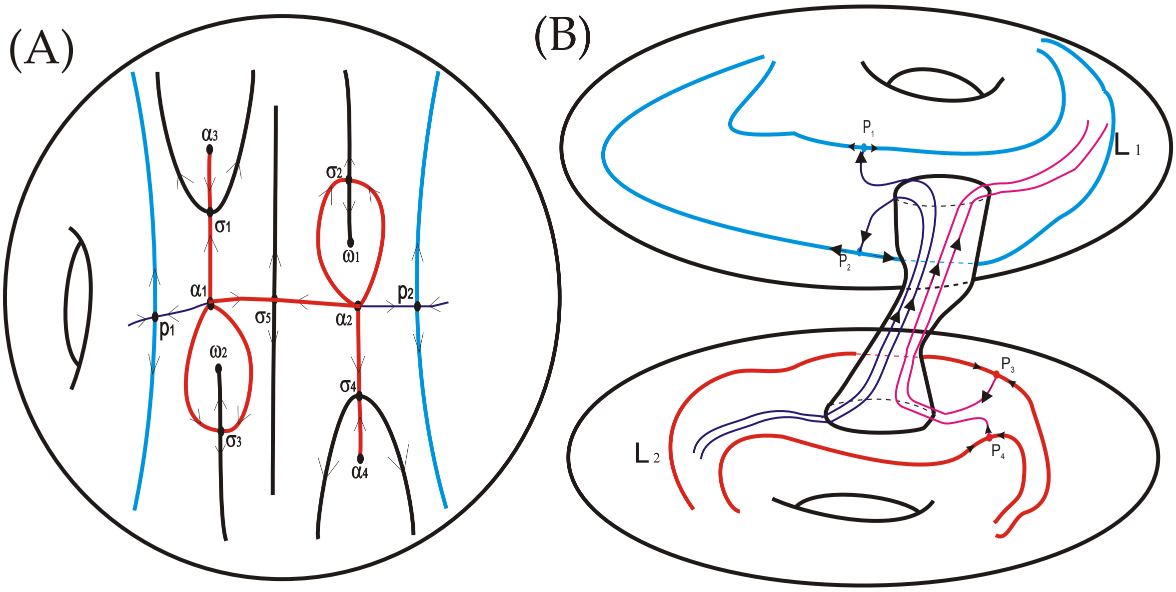

Рис. 1. (A) Структурно устойчивый диффеоморфизм из класса G. (B) Диффеоморфизм из класса G, не являющийся структурно устойчивым

Мы рассматриваем класс G, состоящий из А-диффеоморфизмов $f\colon M \to M$, не имеющих циклов и имеющих нетривиальные базисные множества Ω_i только размерности один. Согласно [7], Ω_i являются либо аттракторами, либо репеллерами[1]. Класс G совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов и, соответственно, содержит как структурно устойчивые системы (см. рис. 1(A)), так и не являющиеся таковыми (см. рис. 1(B)).

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для каждого диффеоморфизма $f \in G$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

[1]Компактное f-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

1. Граничные периодические точки и связки

Приведенные в этом разделе сведения можно прочитать, например, в [6]. Речь будет идти о нетривиальных аттракторах, но аналогичные факты применимы и к нетривиальным репеллерам.

Так как аттрактор Ω содержит в себе своё неустойчивое многообразие, то каждый нетривиальный аттрактор поверхностного диффеоморфизма f будет иметь топологическую размерность не менее единицы. Если размерность Ω равна двум, то f-диффеоморфизм Аносова, несущее многообразие M является двумерным тором, и Ω совпадает с M. В этом случае энергетическая функция будет константой и не представляет интереса для изучения. Мы будем рассматривать другой случай: $\dim \Omega = 1$. Аттрактор при этом будет *растягивающимся*[2] аттрактором коразмерности 1. Каждая точка $x \in \Omega$ делит свое устойчивое многообразие на две компоненты связности, причем хотя бы одна из этих компонент всюду плотна в некоторой периодической компоненте Ω_i. Точки, у которых вторая компонента связности множества $W^s_x \setminus x$ не пересекается с Ω, называют *граничными периодическими точками.* Согласно [6], Ω имеет конечное ненулевое число граничных периодических точек.

Определение 1. Пусть S — некоторая область многообразия M. Точка $x \in \partial S$ называется *достижимой точкой границы* области S, если существует дуга, лежащая в S, одна из концевых точек которой совпадает с x. Множество всех достижимых точек границы называют *достижимой изнутри границей* области S.

Определение 2. Пусть Ω — растягивающийся аттрактор диффеоморфизма $f\colon M \to M$ и $S = M \backslash \Omega$. Совокупность $B = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ компонент связности достижимой изнутри границы области S называют связкой степени k (или k-связкой), если эти компоненты можно расположить в таком порядке, что C_k и C_0, а также C_i и $C_{i+1}, i = 1, \dots, k-1$, могут быть соединены замыканиями открытых дуг одномерных устойчивых многообразий, содержащимися в области $M \setminus \Omega$.

Из [6] (см. также [8]) следует, что если Ω одомерный аттрактор диффеоморфизма $f\colon M \to M$, то достижимая изнутри граница области $S = M \setminus \Omega$ состоит из конечного числа связок, причем каждый элемент любой из них содержит граничную точку. Более того, граничные точки каждой связки имеют одинаковый период и связки могут иметь любую степень. (Рис.1).

2. Построение окрестности нетривильного базисного множества диффеоморфизма из класса G

В этом разделе мы покажем, что для каждого нетривиального базисного множества коразмерности один (следовательно, аттрактора или репеллера) А-диффеоморфизма поверхности можно найти его захватывающую окрестность, граница которой будет состоять из конечного числа простых замкнутых кривых. Построим такую окрестность для некоторого растягивающегося аттрактора. Для произвольного репеллера построение будет аналогичным.

[2]Аттрактор диффеоморфизма f называется *растягивающимся*, если его топологическая размерность совпадает с размерностью неустойчивого многообразия его любой точки. Растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f^{-1} называется *сжимающимся репеллером* диффеоморфизма f.

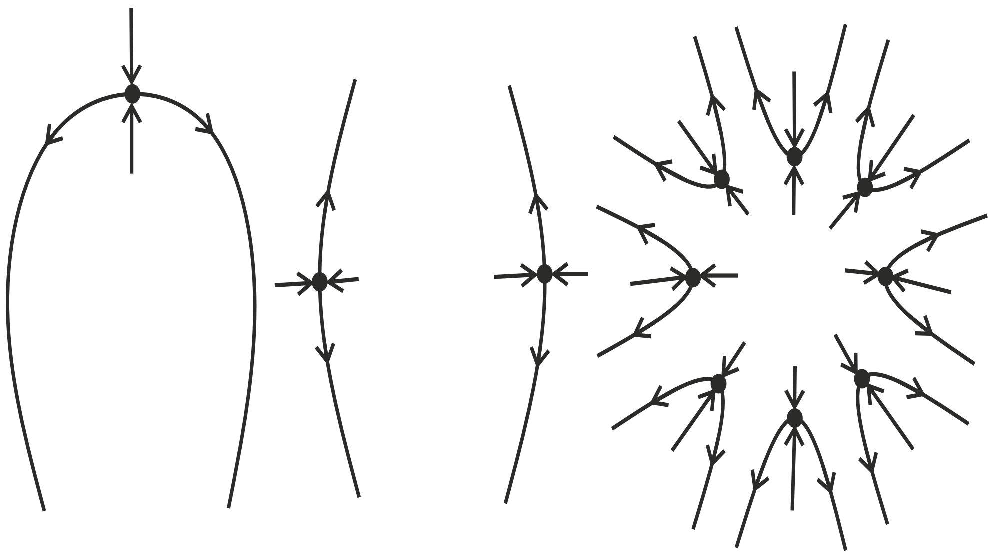

Рис. 2. Граничные периодические точки и связки аттрактора: a — 1-связка, b — 2-связка, c — 8-связка

Пусть Ω — растягивающийся аттрактор коразмерности один диффеоморфизма $f \in G$; B — некоторая m-связка аттрактора Ω, содержащая граничные периодические точки $p_1, p_2, \dots, p_m$, k — период связки B. Для каждой точки $x_i \in W^u_{p_i}$, $i = 1, \dots, m$ существует единственная точка $y_{i+1} \in W^u_{p_{i+1}}$, $i = 1, \dots, m$, $y_{m+1} = y_1, p_{m+1} = p_1$, такая что открытая дуга $(x, y)^s \subset W^s_x$, граница которой состоит из точек x и y, не пересекается с Ω. Выберем точки $x_1, x_2, \dots, x_m$ таким образом, чтобы x_i и y_i принадлежали разным компонентам связности множества $W^u_{p_i} \setminus p_i$. Рассмотрим замкнутую кривую $\tilde{L}_B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (x_i, y_{i+1})^s \cup [y_{i+1}, x_{i+1}]^u$, $y_{m+1} = y_1, x_{m+1} = x_1$, где $[y_{i+1}, x_{i+1}]^u$ — замкнутая дуга неустойчивого многообразия точки p_{i+1}, соединяющая точки y_{i+1} и x_{i+1}. Отступим от неустойчивого многообразия аттрактора на маленькое расстояние, сгладим кривую и получим простую замкнутую кривую L_B (Рис.3). Для каждого множества связок $B, f(B), \dots, f^{k-1}(B)$ мы всегда можем выбрать кривые $L_B, L_{f(B)}, \dots, L_{f^{k-1}(B)}$ так, что $\forall \tilde{k} = 1, 2, \dots, k-1 :\ L_{f^{\tilde{k}}(B)} = f^{\tilde{k}}(L_B)$.

Построим такие кривые для каждой связки аттрактора, рассмотрим их объединение $L = \bigcup\limits_{B} L_B$. L будет границей захватывающей окрестности аттрактора Ω. Чтобы получить саму окрестность, рассмотрим для каждой связки B кольцо K_B, заключенное между кривыми L_B и $f^k(L_B)$, и множество $U_B = clos(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} f^{ki}(K_B))$. Тогда искомая захватывающая окрестность аттрактора Ω будет объединением всех таких множеств $U_\Omega = \bigcup\limits_{B \subset \Omega} U_B$.

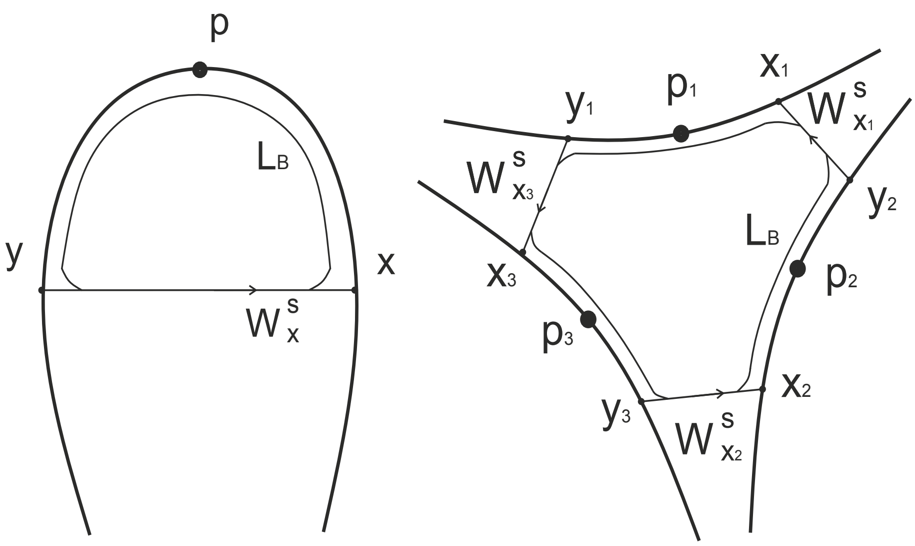

Рис. 3. Кривая L_B

3. Построение энергетической функции в захватывающей окрестности растягивающегося аттрактора или сжимающегося репеллера

Пусть $f \in G$ и Ω — расстягивающийся аттрактор коразмерности 1 диффеоморфизма f. Построим непрерывную в окрестности U_Ω аттрактора Ω и гладкую на множестве $U_\Omega \setminus \Omega$ функцию φ_Ω. Рассмотрим m-связку B периода k, такую что $\forall \tilde{k} = 1, 2, \ldots, k-1 : \ L_{f^{\tilde{k}}(B)} = f^{\tilde{k}}(L_B)$. В силу гипотезы кольца[3] K_B можно расслоить на окружности, а следовательно и $U_B \setminus \Omega$ можно расслоить на окружности. Тогда существует диффеоморфизм $h_B \colon U_B \setminus \{\Omega \cup \partial L_B\} \to \mathbb{R}^2 \setminus O$, который переводит каждую кривую $f^{nk}(L_B)$, $n = 1, 2, \ldots$ в окружность радиуса 2^n с центром в начале координат. Рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}_{\Omega_{B(x,y)}} \colon \mathbb{R}^2 \setminus O \to (0, \frac{1}{4})$, $\tilde{\varphi}_\Omega(x, y) = \frac{1}{4}(-k\rho)$, где ρ — расстояние от точки (x, y) до начала координат ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Для каждого множества связок $B, f(B), \ldots, f^{k-1}(B)$ со свойством $\forall \tilde{k} = 1, 2, \ldots, k-1 : \ L_{f^{\tilde{k}}(B)} = f^{\tilde{k}}(L_B)$, определим функцию $\varphi_{B_\Omega} \colon \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} U_{f^i(B)} \to [0; \frac{1}{4}]$ следующим образом:

$$\varphi_{B_\Omega}(w) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(h_B(w)), \text{ если } w \in U_B \setminus \{\Omega \cup \partial L_B\}; \\ \frac{1}{4}, \text{ если } w \in \partial L_B; \\ 0, \text{ если } w \in U_B \cap \Omega; \\ 2^{-k}\varphi_{B_\Omega}(f^{-\tilde{k}}(w)), \text{ если } w \in f^{\tilde{k}}(U_B), \ \tilde{k} = 1, 2, \ldots, k-1; \end{cases}$$

Определим функцию $\varphi_\Omega \colon U_\Omega \to [0; \frac{1}{4}]$: если $w \in \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} U_{f^i(B)} \subset U_\Omega$, то $\varphi_\Omega(w) = \varphi_{B_\Omega}(w)$. Функция φ_Ω является функцией Ляпунова для диффеоморфизма f в окрестности ат-

[3]Гипотеза кольца. Пусть S_1^{n-1}, S_2^{n-1} — непересекающиеся $(n-1)$-сферы $(n \geq 2)$, цилиндрически вложенные в n-сферу S^n. Тогда замыкание области в S^n, ограниченной сферами $S_1^{n-1} S_2^{n-1}$ есть n-кольцо.

трактора Ω в силу построения. Для удобства при дальнейших построениях переопределим окрестность аттрактора таким образом, чтобы границей этой окрестности была одна из линий уровня функции φ_Ω. Тогда границей новой окрестности $\tilde{U} \subset U$ будет $\varphi_\Omega^{-1}(2^{-(\hat{k}+1)})$, где $\hat{k}$ — наибольший из периодов связок, и функция φ_Ω будет отображать $\tilde{U}$ в отрезок $[0; 2^{-(\hat{k}+1)}]$. Из работы [4] следует, что существует гладкая функция $g\colon [0,1] \to [0,1]$, такая что $\psi_\Omega = g \circ (2^{\hat{k}+1}\varphi_\Omega)$ — энергетическая функция диффеоморфизма f. Для репеллера функция строится аналогично, только в качестве энергетической функции будет выступать $\psi_\Omega\colon U_\Omega \to [-1, 0]$, $\psi_\Omega = -g \circ (-2^{\hat{k}+1}\varphi_\Omega)$, причем $\psi_\Omega(\Omega) = 0$, $\psi_\Omega(\partial U_\Omega) = -1$.

4. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса G

Пусть $f \in G$ — диффеоморфизм из класса G, $\Omega_1, \dots, \Omega_{k_f}$ — его базисные множества, причем $\Omega_{k_\sigma}, \Omega_{k_\sigma+1}, \dots, \Omega_{k_\sigma+\check{k}}$ — седловые орбиты, расположенные в порядке, не противоречащим порядку Смейла. Построим энергетическую функцию φ для f, такую что φ — функция Морса вне нетривиальных базисных множеств, $\varphi(\Omega_i) = 0$, если Ω_i — аттрактор, $\varphi(\Omega_i) = \check{k} + 1$, если Ω_i — репеллер, и $\varphi(\Omega_i) = i - k_\sigma$, если Ω_i — седловая орбита.

Шаг 1. Обозначим через $A_1, \dots, A_{k_A}$ $(R_1, \dots, R_{k_R})$ нетривиальные одномерные аттракторы (репеллеры) диффеоморфизма f. Пусть $U_{A_1}, \dots, U_{A_{k_A}}$ $(U_{R_1}, \dots, U_{R_{k_R}})$ захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные в разделе 2. Положим $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k_A}$, $R = R_1 \cup \dots \cup R_{k_R}$, $U_A = U_{A_1} \cup \dots \cup U_{A_{k_A}}$, $U_R = U_{R_1} \cup \dots \cup U_{R_{k_R}}$, и $U = U_A \cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U. Положим $\check{M} = M \setminus U$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q : \partial U \to \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi : \check{M} \cup D \to N$ естественную проекцию.

Шаг 2. По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая диффеоморфизм $f_N : N \to N$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(U)$ и имеющий по одной периодической гиперболической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$. Согласно [2], для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N : N \to [0, \check{k}+1]$, где $\check{k}$ — количество седловых орбит, такая, что $\varphi(\Omega_i) = 0$, если Ω_i — сток, $\varphi(\Omega_i) = \check{k} + 1$, если Ω_i — источник, $\varphi(\Omega_i) = i - k_\sigma$, если Ω_i — седловая орбита, и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N. Определим на многообразии $\check{M}$ функцию $\varphi_{\check{M}} : \check{M} \to [0, \check{k} + 1]$ формулой $\varphi_{\check{M}} = \varphi_N \pi$. Положим $c_A = \varphi_{\check{M}}(\partial U_A)$ и $c_R = \varphi_{\check{M}}(\partial U_R)$.

Шаг 3. В разделе 3 мы построили энергетическую функцию ψ_{Ω_i} для диффеоморфизма f в окрестности U_{Ω_i} нетривиального базисного множества Ω_i.

Положим $\varphi(w) = \begin{cases} c_A \psi_{\Omega_i}(w), \text{ если } z \in U_A; \\ \check{k} + 1 - (\check{k} + 1 - c_R)\psi_{\Omega_i}(w), \text{ если } z \in U_R; \\ \varphi_{\check{M}}, \text{ если } z \in \check{M}; \end{cases}$

По построению функция $\varphi : M \to [1, k_f]$ является искомой.

Список цитируемых источников

1. *Grines V.Z., Laudenbach F., Pochinka O.V.* Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.–2012.– V.278 (1). – P.27–40.
2. *Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журнал СВМО.–2012.–Т.14, N1.–С.1–9.

   Mitryakova T.M., Pochinka O.V., Shishenkova A.E. Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set// Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.–2012.– V.14, No.1.–P.1–9.
3. *Гринес В.З., Носкова М.К., Починка О.В.* Построение энергетической функции для трехмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества.– 2015.–Т.76, N 2.–С.271–286.

   Grines V.Z., Noskova M.K., Pochinka O.V. Construction of an energy function for 3-dimensional cascades with 2-dimensional extended attractors// Transactions of the Moscow Mathematical Society.–2015.–V.76, No.2.–P.271–286.
4. *Гринес В.З., Носкова М.К., Починка О.В.* Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами на 3-многообразиях// Журнал СВМО.–2015.–Т.17, N 3.–С.154–159.

   Grines V.Z., Noskova M.K., Pochinka O.V. Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds//Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.–2015.–V.17, No.3.–P.154–159.
5. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. – 1977. – V.16(2). – P. 167-172.
6. *Гринес В.З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I // Труды Московского математического общества.–1975.–Т.32.– С.35–60.

   Grines V.Z. The topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets. I // Transactions of the Moscow Mathematical Society.–1975.– V.32.–P.35–60.
7. *Плыкин Р.В.* Источники и стоки А-диффеоморфизмов на поверхностях // Мат. сб.– 1974.– Т. 23.–С.223–253.

   Plykin R.V. Sources and sinks of a-diffeomorphisms of surfaces // Mat.Sbornik.–1974.–V.23, No.2.–P.223–253.
8. *Плыкин Р.В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов// УМН.–1984.– Т.39, N 6(240). – С.75-113.

   Plykin R.V. On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades // Russin Math. Surv.– 1984.– V. 39, N6(240).– P.75-113.

Получена 01.06.2015