

УДК 519.67

К оценкам сейш в бухтах Крыма методом конечных элементов¹

В. Н. Чехов, В. А. Лушников

Крымский федеральный университет им. Вернадского В.И.,
Симферополь 295007. E-mail: chekhov40@mail.ru

Аннотация. Получены приближенные оценки решения задачи о собственных колебаниях уровня моря в системе девятнадцати бухт, которые объединены общим названием «Севастопольская бухта». Оценки частот и собственных форм колебаний получены с помощью метода конечных элементов. Обмен водой между бухтами и Черным морем учитывался в первом приближении для всех собственных форм колебаний (так, как это принято [13] для моды Гельмгольца).

Ключевые слова: длинные гравитационные волны, теория мелкой воды, сейши, мода Гельмгольца, метод конечных элементов.

Введение

Исследование собственных частот и собственных форм колебания воды в бухте является необходимым этапом для оценок состояния бухты при вынужденных колебаниях и резонансах, вызванных волновыми воздействиями моря на границе с бухтой, а также атмосферными условиями, ветром и сейсмическими явлениями [1-5], [9-14]. Для Крымского региона такие оценки являются актуальными.

Кроме того наблюдения за собственными колебаниями уровня моря в бухтах могут быть использованы для прогнозов землетрясений с большими магнитудами. Связь между сейшевыми колебаниями и землетрясениями обусловлена тем, что длинные волны в море и в больших по размерам бухтах приводят к периодическим колебаниям давления на дне моря или бухты. Колебания давления с частотой сейш приводят к колебаниям литосферных деформаций, которые могут измеряться лазерными интерферометрами [6] в береговой зоне моря или бухты. Амплитуды сейшевых литосферных деформаций малы по сравнению с приливными деформациями литосферы. Однако они значительно увеличиваются [6] примерно за неделю перед землетрясениями с большими магнитудами. И это усиление литосферных деформаций с частотами сейш может быть одним из признаков близкого начала землетрясения. Некоторые итоги мониторинга сейсмических процессов в Крымско-Черноморском регионе с помощью лазерных интерферометров – деформографов, установленных возле «Казачьей бухты» (г. Севастополь) представлены в монографии [12].

Отношение многих сейсмологов к возможности краткосрочных предсказаний землетрясений в настоящее время является весьма пессимистическим [15]. Обусловлено это бесплодностью усилий по созданию надежных методов прогнозирования и катастрофами, которых не удастся избежать никакими усилиями. Однако имеются и оптимисты [10,16], которые объясняют неудачи чрезвычайной сложностью общения с природой на

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 12-05-00475-а

этой малодоступной для наблюдений области исследования и призывают к большим финансовым усилиям с целью привлечения специалистов и совершенствования техники.

1. Дифференциальные уравнения и граничные условия теории «мелкой воды»

Математические модели для приближенных оценок динамических характеристик бухт основаны [7,13] на линеаризованных дифференциальных уравнениях идеальной несжимаемой жидкости, которые при относительно малых амплитудах волн по сравнению с глубиной бухты и при относительно малых глубинах бухты по сравнению с длинами волн не приводят к большим ошибкам в оценках. Дополнительно не будем учитывать вращение бухты вместе с Землей. При этом распределение давления $p(x, y, z, t)$ в бухте не отличается от гидростатического

$$p = p_0 + \rho g(\zeta(x, y, t) - z). \quad (1.1)$$

Здесь ось Oz направлена против силы тяжести, плоскость $z = 0$ совпадает с плоской поверхностью воды при равновесном состоянии; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения; $z = \zeta(x, y, t)$ — уравнение поверхности воды в зависимости от времени.

Дифференциальные уравнения, учитывая зависимость (1.1), состоят из двух уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0; \quad (1.2)$$

и закона сохранения массы в бухте переменной глубины $H(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv_y) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \quad (1.3)$$

где v_x, v_y — координаты вектора скорости.

Дифференцируя члены уравнения (1.3) по времени и исключая производные по времени от координат вектора скорости с помощью уравнений Эйлера (1.2), приходим к обобщенному волновому уравнению относительно функции $\zeta(x, y, t)$

$$\frac{\partial x}{\partial x}(H \frac{\partial \zeta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(H \frac{\partial \zeta}{\partial y}) - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4)$$

Представив элементарную гармоническую стоячую волну в форме:

$$\zeta(x, y, t) = U(x, y) \sin(\omega t), \quad (1.5)$$

где ω — круговая частота колебаний (период колебаний: $T = 2\pi/\omega$), приходим к обобщенному уравнению Гельмгольца относительно амплитуды колебаний $U(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(H \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(H \frac{\partial U}{\partial y}) + \lambda^2 U = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\lambda = \omega/\sqrt{g}$.

Подставляем форму (1.5) в уравнения Эйлера (1.2). Получаем выражения для координат вектора скорости:

$$v_x(x, y, t) = \frac{g}{\omega} \frac{\partial U}{\partial x} \cos(\omega t), \quad v_y(x, y, t) = \frac{g}{\omega} \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\omega t). \quad (1.7)$$

С их помощью можно задать скорости вытекания (втекания) воды из бухты в море. В частности, однородное условие непротекания воды из бухты в море и обратно принимает вид

$$v_n|_{\Gamma} = (v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y))|_{\Gamma} = 0$$

или с учетом зависимостей (1.7):

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n, y) \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (1.8)$$

Получается известная спектральная задача (1.6), (1.8) для собственных частот и для собственных форм изолированной бухты в постановке теории «мелкой воды».

Однако, морские бухты не изолированы от моря. Поэтому нуль в правой части условия (1.8) должен быть заменен на заданный режим обмена водой между бухтой и морем. Эта ситуация обсуждается, в частности, в монографии [13]. В качестве первого приближения предлагается заменить условие (1.8) для части границы Γ_0 , соединяющей бухту с морем, на «классическое условие Гельмгольца»:

$$U(x, y)|_{\Gamma_0} = 0. \quad (1.9)$$

Граничное условие (1.9) вытекания (втекания) воды не регламентирует скорости вытекания. Поэтому не приводит к единственности решения задачи. В работе [8, стр. 10] отмечено, что для выполнения условия (1.9) в частном случае, когда часть Γ_0 является отрезком прямой, достаточно зеркально дополнить область бухты до симметричной относительно отрезка Γ_0 удвоенной области и выполнить условие непротекания (1.8) на всей внешней границе удвоенной области. Тогда в силу симметрии удвоенной области кососимметричная часть решения автоматически удовлетворит условию (1.9).

Эту мысль можно продолжить и на симметричную часть решения. Симметричная часть решения на удвоенной области удовлетворит условию (1.8) непротекания автоматически и на отрезке Γ_0 . Поэтому симметричную часть решения можно определить и без «удвоения бухты» с меньшим числом конечных элементов. Кососимметричную часть решения будем вычислять, решая спектральную задачу (1.6), (1.8) для удвоенной области бухты, чтобы в первом приближении выяснить влияние условия (1.9) на периоды и собственные формы сейш в бухте. Для всех сейш, а не только для моды Гельмгольца.

2. Решение спектральной задачи методом конечных элементов

Учесть зависимость глубины бухты от координат $H(x, y)$ можно только приближенно численными методами, в частности, методом конечных элементов. При этом накладываются «естественные» [6] ограничения:

- а) на функцию глубин: $H(x, y) > 0$, если точка (x, y) не принадлежит границе Γ ; если же точка (x, y) принадлежит границе Γ и $H(x, y) = 0$, то должно быть $\left| \frac{\partial H}{\partial n} \right| \geq C > 0$, где C — постоянная, задаваемая из анализа конечных элементов на границе Γ ;
- б) искомая функция $U(x, y)$ на границе Γ должна удовлетворять условию ограниченности: $|U(x, y)| < \infty$ для любых $(x, y) \in \Gamma$.

С такими ограничениями спектральная задача имеет счетное множество собственных функций $U_m(x, y)$ и собственных значений: $0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \leq \lambda_m^2 \leq \dots$. Частоты и периоды мод собственных колебания вычисляются по формулам:

$$\omega_n = |\lambda_n| \sqrt{g}; \quad T_n = 2\pi/\omega_n. \quad (2.1)$$

На рис.1. показан план бухты, разделенный на 546 примерно равносторонних треугольных элементов. Симметричная относительно границы Γ_0 удвоенная область показана на рис.2.

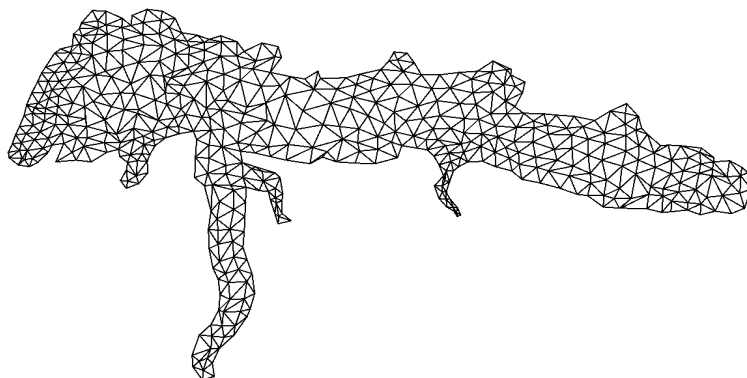


Рис. 1. Схема разбиения области бухты на конечные элементы.

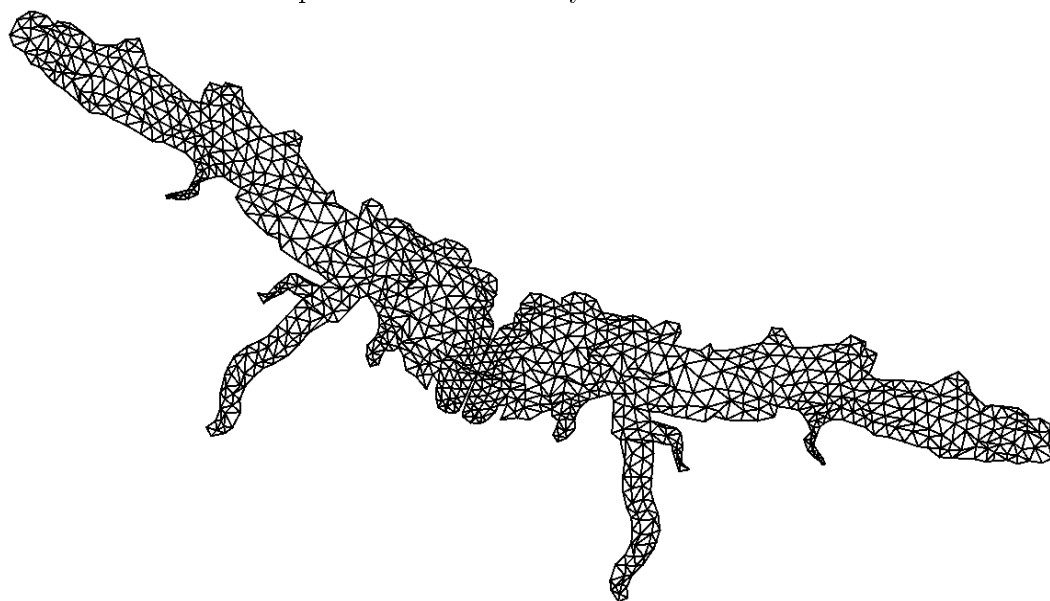


Рис. 2. Удвоение области бухты посредством зеркального отображения.

Периоды (в минутах) изолированной от моря бухты (симметричная часть решения для удвоенной бухты) образуют убывающую последовательность с увеличением количества узловых линий. Первые 5 периодов представляются значениями:

$$26.3, \quad 15.9, \quad 13.2, \quad 9.6, \quad 8.3.$$

Периоды (в минутах) для бухты (кососимметричное решение для удвоенной бухты) с приближенным учетом для обмена водой между бухтой и морем по условию (1.9) также

образуют убывающую последовательность с увеличением количества узловых линий. Первые 6 периодов имеют значения:

50.0, 22.0, 14.7, 12.0, 9.5, 7.9.

На рис.3 изображена собственная форма колебаний с периодом $T_0 = 50$ мин. Это сейша Гельмгольца с одной узловой линией — границей Γ_0 между бухтой и морем.

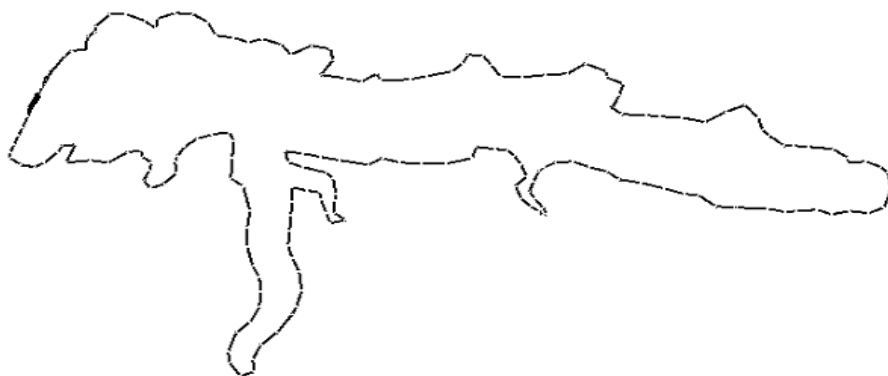
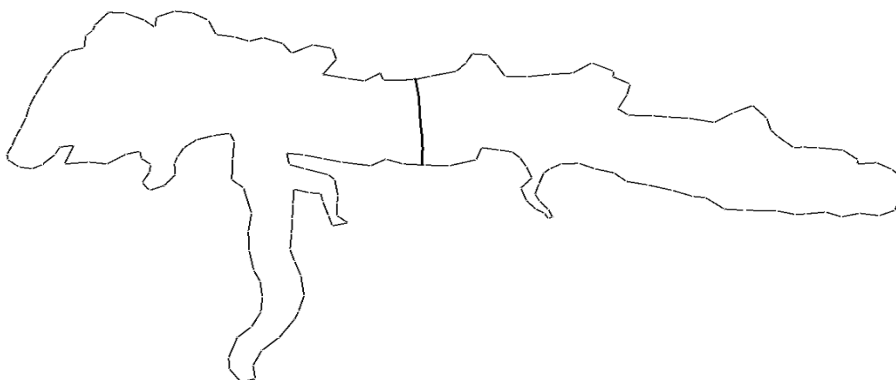


Рис. 3 Собственная форма колебаний бухты с одной узловой линией.

Рис. 4 позволяет сравнить первые собственные формы сейш в изолированной бухте и при учете обмена водой в соответствии с условием Гельмгольца (1.9). Втекающая вода заметно отодвинула узловую линию от границы с морем. При этом период колебаний уменьшился на 4.3 мин.

4а)



4б)

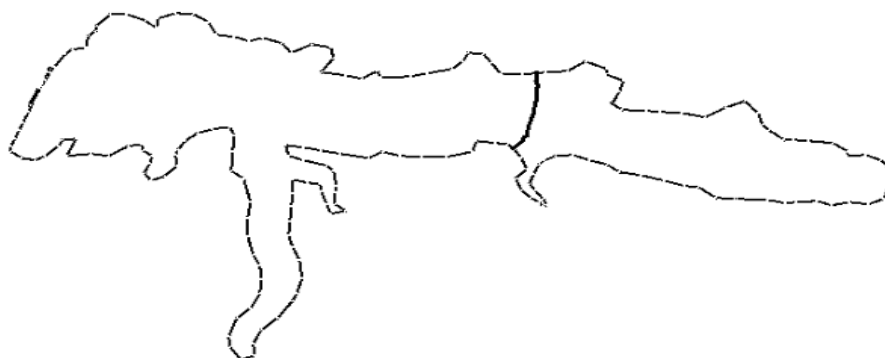
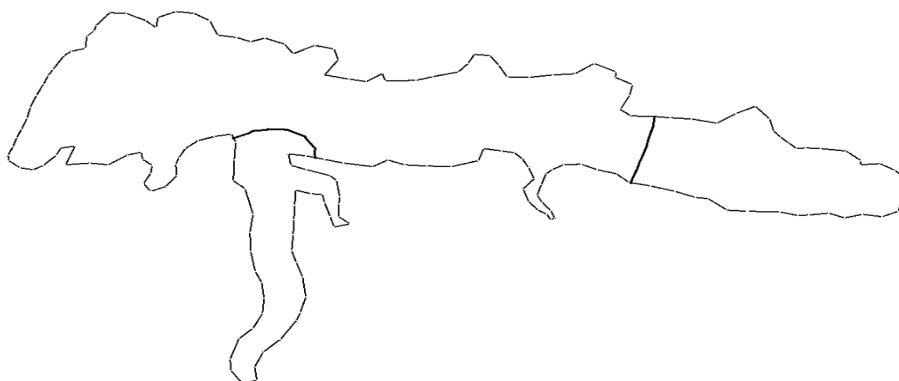


Рис. 4. Влияние обмена водой между бухтой и морем при 1 узловой линии.

Качественно такое же влияние учета обмена водой (в первом приближении) следует из рисунков 5, 6, 7, на которых сопоставляются следующие 3 собственные формы.

5а)



5b)

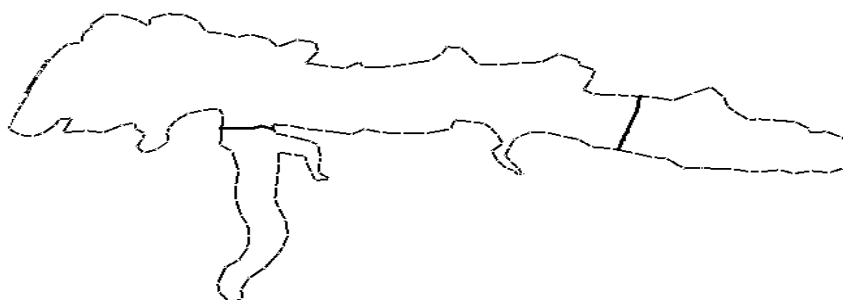
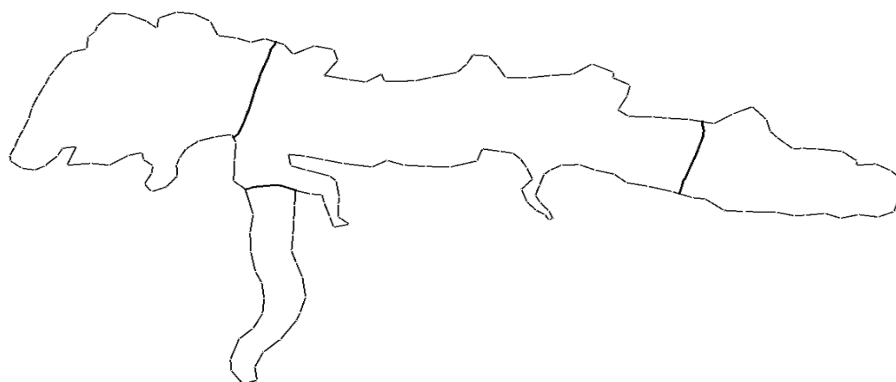


Рис. 5. Влияние обмена водой между бухтой и морем при 2 узловых линиях.

6а)



6b)

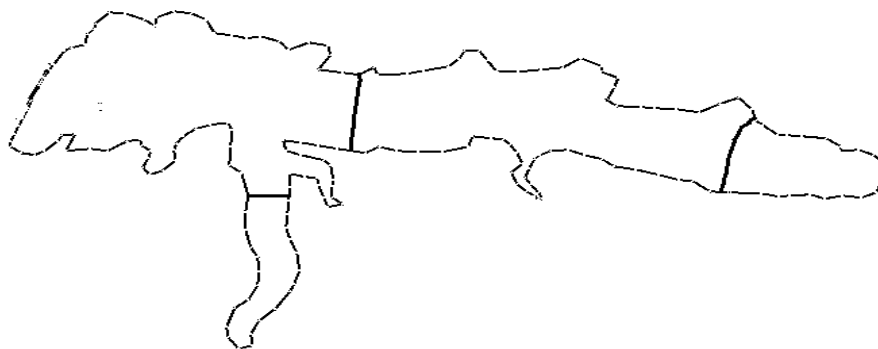
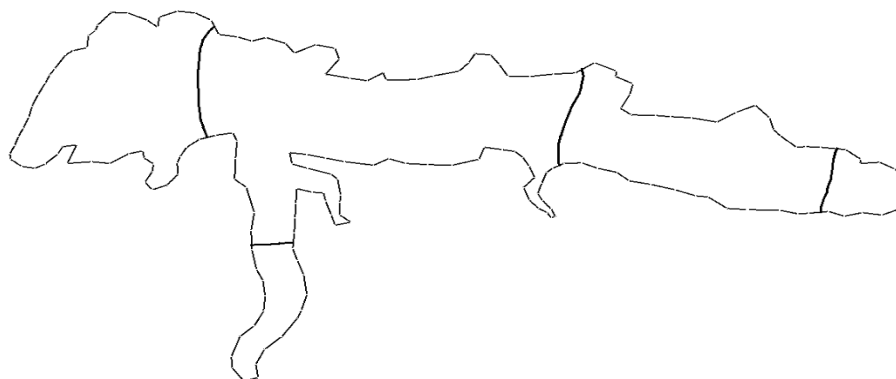


Рис. 6. Влияние обмена водой между бухтой и морем при 3 узловых линиях.

7a)



7b)

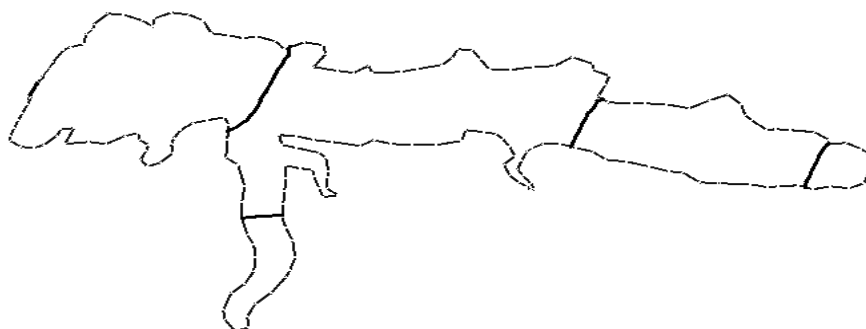


Рис. 7. Влияние обмена водой между бухтой и морем при 4 узловых линиях.

3. Обсуждение полученных результатов.

Интересно, что период $T_0 = 50$ мин. сейши Гельмгольца совпал с периодом одной из экспериментально измеряемых сейш [3, 4] в Севастопольской бухте. И это несмотря на «первое приближение» сейши Гельмгольца. С другой стороны авторы работ [3, 4] сообщают, что они наблюдали в Севастопольской бухте сейши с периодами 75 и 180 мин, которые в нашем решении не получаются.

Поэтому более точные оценки сейш вычислять необходимо. Точность метода конечных элементов была убедительно подтверждена в работе [6], где вычислялись собственные формы и периоды сейш Черного моря, которые были подтверждены [6] экспериментальными измерениями с помощью лазерных интерферометров. А может быть в [3, 4] измерялись вынужденные колебания с периодами вынуждающих воздействий.

Приближенные оценки влияния обмена водой между бухтой и морем с помощью дополнительного условия (1.9) выполнены не только для нулевой сейши Гельмгольца, но и для всех остальных сейш. При этом условие (1.9) выполнялось точно методом удвоения плана бухты симметричного относительно отрезка прямой Γ_0 границы бухты с морем (рис. 2)

Контроль сейшевых колебаний в бухтах позволяет оценить резонансные колебания, вызванные штормовыми волнами в море, движением судов в бухтах (тягуны), и сейсмическими событиями (цунами), что позволит предупредить возможные аварии и разрушения.

Отметим, что наблюдения за амплитудами длиннопериодных сейш могут пригодиться и как предвестник землетрясений с большими магнитудами, потому что лазерные интерферометры имеются в районе бухты Казачьей [6], а это не очень далеко от Севастопольской бухты, если учитывать высокую чувствительность лазерных интерферометров.

Список цитируемых источников

1. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны / — Л.: Гидрометеиздат, 1989. -272 с.
N.E. Voltzinger, K.A. Klevanny, E.N. Pelinovsky. Long-wave dynamics of the coastal zone (Russian). L.: Gidrometeoizdat. (1989).
2. *Галенин Б.Г.* Ветер, волны и морские порты / Б.Г. Галенин и др.; под ред. Ю.М.Крылова. / — Л.: Гидрометеиздат, 1986. -264 с.

- B.G. Galenin, V.A. Duginov, S.V. Krivitsky at all Wind,waves and sea ports (Russian). / B.G. Galenin etc.; ed. by Yu.M. Krylov.- L.: Gidrometeoizdat (1986).
3. *Горячкин Ю.Н., Иванов В.А., Репетин Л.Н., Хмара Т.В.* Сейши в Севастопольской бухте // Труды УкрНИГМИ. – Вып. 250. – Киев, 2002. С. 342-353.
Yu.N. Goryachkin, V.A. Ivanov, L.N. Repetin, N.V. Khmara, Seiches in the Sevastopol bay (Russian). Proceedings UkrNIGMI.- No 250 –Kyiv. 342-353 (2003).
 4. *Горячкин Ю.Н., Иванов В.А.* Уровень Черного моря: прошлое, настоящее и будущее / Под ред. В.М. Еремеева. – : НАН Украины, Морской гидрофизический институт. – Севастополь, 2006. – 211 с.
Yu.N. Goryachkin, V.A. Ivanov The level of the Black Sea: past, present, and future (Russian) / ed. by V.M. Eremeev. – National Academy of Science of Ukraine, Marine hydrophysical institute. - Sevastopol,. 211 (2006).
 5. *Железняк М.И., Кантарджи И.Г., Сорокин М.В., Поляков А.И.* Резонансные характеристики акваторий морских портов // Magazine of Civil Engineering. No. 5, 2015. – P. 3-19.
M.J. Zheleznyak, I.G. Kantardgi, M.S Sorokin, A.I Polyakov. Resonance properties of seaport water areas, Magazine of Civil Engineering. No. 5, 3-19 (2015).
 6. *Иванов Ю.Б., Нестеров В.В., Насонкин В.А., Челов В.Н.* Исследование литосферных деформаций, предшествующих землетрясениям, средствами большебазовой лазерной интерферометрии // Изв. АН СССР, Физика Земли. – 1995. – Вып. 7. – С. 51-62.
Yu.B. Ivanov, V.A. Nasonkin, V.V. Nesterov, and V.N. Chekhov. Studies of lithospheric deformations preceding earthquakes by large-base laser interferometry. Fiz. Zemli, No. 7, 51–62 (1995).
 7. *Ламб Г.* Гидродинамика / М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
H. L. Lamb, Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1932).
 8. *Левянт А.С.* Моделирование и расчет сейш с применением конформного отображения морских акваторий / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ-мат наук по специальности 11.00.08 – Океанология. – М. – 1991. – 21 с.
A.S. Leviant Modeling and seiche calculation using conformal mapping of maritime (Russian) / Abstract of dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on a specialty 11.00.08 - Oceanology. – М. 21 (1991).
 9. *Лоскутов А.В.* Исследование пространственной структуры собственных колебаний в бухтах Крабовая и Хромова о. Шикотан // Мореходство и морские науки – 2009. Южно-Сахалинск ИМГиГ ДВО РАН, 2010. – С. 161-166.
AV Loskutov The study of the spatial structure of oscillations in the coils of the Crab and Khrome. Shikotan. Sailing and marine sciences (Russian). 2009. Yuzhno-Sakhalinsk IMGG FEB RAS, 161-166 (2010).
 10. *Моргунов В.А.* Реальности прогноза землетрясений // Физика Земли. – 1999. –№ 1. – С. 79-91.
V.A. Morgunov Reality of the earthquake prediction. Fiz. Zemli, No. 1, 79–91 (1999).
 11. *Морозов А.Н., Лемешко Е.М., Шутов С.А., Зима В.В.* Течения в Севастопольской бухте по данным ADCP-наблюдений (июнь 2008 года)// Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 3. – С. 31-43.
A.N. Morozov, E.M. Lemeshko, S.A.Shutov , V.V. Zima Flows in the Sevastopol bay according to ADCP-observation (June 2008) (Russian). Marine Hydrophysical magazine. - 2012. - No 3, 31-43 (2012).
 12. *Пустовитенко Б.Г., Луцик А.В., Боборыкина О.В. и др.; под ред. Б.Г. Пустовитенко.* Мониторинг сейсмических процессов в Крымско-Черноморском регионе – Севастополь: НИЦ «ЭКОСИ Гидрофизика», 2014 –264 с.

- B.G. Pustovitenko, A.V. Lushchyk, O.V. Boborykina at etc.; ed. by B.G. Pustovitenko. Monitoring of seismic processes in the Crimean Black sea region (Russian). Sevastopol: SIC "Ecos Hydrophysics"264 (2014).
13. *Рабинович А.Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение / С-Пб.: Гидрометеониздат, 1993. – 326 с.
A.B. Rabinovich Long ocean gravity waves: trapping, resonance,leaking (Russian). Saint-Petersburg .: Gidrometeoizdat, 326 (1993).
 14. *Фомичева Л.А., Рабинович А.Б., Демидов А.Н.* Уровень моря // Проект «Моря СССР». Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т.IV. Черное море Вып.1. Гидромет. Исслед.-С-Пб.: Гидрометеониздат, 1991. – С. 329-339.
L.A. Fomicheva, A.B. Rabinovich, A.N. Demidov Sea level (Russian). "Sea USSR"project. Hydrometeorology and Hydrochemistry of the Seas of the USSR. V. IV. Black Sea Issue 1. Hydromet. Issled.- Saint-Petersburg .: Gidrometeoizdat, - P. 329-339 (1991).
 15. *Geller R.J., Jackson D.D, Kagan Y.Y., and Mulargia F.* Earthquakes cannot be predicted // Science **275**. – 1997. – P. 1616-1617.
 16. *Wyss M.* Why is earthquake prediction research not progressing faster? // Tectonophysics **338**. – 2001. – P. 217-223.

Получена 18.06.2015