Динамические системы, 2014, том 4(32), №3-4, 237–244

УДК 517.98

Аналоги теоремы Крейна-Мильмана для ограниченных выпуклых множеств в бесконечномерных пространствах

Ф. С. Стонякин

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. В работе на базе предложенной ранее системы антикомпактных множеств в классе банаховых пространств, имеющих счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов, получены аналоги теоремы Крейна-Мильмана о крайних точках для не обязательно компактных выпуклых ограниченных множеств. В банаховых пространствах, имеющих антикомпакты, доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении всякого линейного непрерывного функционала, заданного на исходном пространстве на пространство, порождённое некоторым антикомпактом. На базе этого результата получено описание всякого ограниченного выпуклого замкнутого множества в банаховом пространстве, имеющем антикомпакт, через выпуклые компакты в пространствах, порождённые антикомпактами в исходном пространстве и сформулирован соответствующий аналог теоремы Крейна-Мильмана.

Ключевые слова: банахово пространство, антикомпакт, тотальное множество линейных непрерывных функционалов, теорема Крейна-Мильмана, теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

Введение

Хорошо известна теорема Крейна-Мильмана, утверждающая совпадение всякого выпуклого компакта с выпуклой замкнутой оболочкой своих крайних точек [2]. Однако в бесконечномерном случае эта теорема уже, вообще говоря, неверна в классе выпуклых ограниченных замкнутых множеств[1, 2]. Более того, некомпактное выпуклое множество в бесконечномерном пространстве может вообще не иметь крайних точек [1, 2].

Существуют аналоги теоремы Крейна-Мильмана для ограниченных множеств в бесконечномерных банаховых пространствах. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Крейна-Мильмана.* Но это свойство неверно во многих важнейших банаховых пространствах, среди которых пространства числовых последовательностей c_0 и ℓ_∞ [2]. Также следует упомянуть обобщения теоремы Крейна-Мильмана для замкнутых ограниченных множеств в банаховых пространствах, имеющих гладкое сопряжённое [3]. Задача построения аналога теоремы Крейна-Мильмана для необязательно компактных (и даже необязательно выпуклых) множеств была исследована М.В. Балашовым и Е.С. Половинкиным в [4, 5] методами сильно выпуклого анализа в классе гильбертовых пространств.

Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Крейна-Мильмана для необязательно компактных множеств в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств. Наш подход к рассматриваемой проблеме основан на понятии *антикомпактного множества* в банаховых пространствах, которое введено и исследовано нами ранее в работах [6, 7]. Такой подход даёт возможность рассматривать класс пространств, который существенно отличен от класса пространств со свойством Крейна-Мильмана и седержит, в частности, пространства последовательностей c_0 и ℓ_∞.

Работа состоит из введения и трёх основных разделов. В первом разделе мы напоминаем понятие антикомпактного множества в банаховых пространствах, приведены два примера систем антикомпактов — системы эллипсоидов в сепарабельных гильбертовых пространствах, а также системы эллипсоидов в пространстве числовых последовательностей ℓ_∞ (примеры 1 и 2). Также приведены полученные ранее результаты, описывающие класс банаховых пространств, имеющих антикомпакты (теорема 1 и следствие 1).

Во втором разделе мы доказываем вспомогательный результат, который утверждает, что для всякого банахова пространства E, имеющего антикомпакт, сопряжённое ему пространство E^* представимо в виде векторного индуктивного предела сопряжённых пространств $E^*_{\overline{C}}$, порождённых антикомпактами $\overline{C} \in \mathcal{C}(E)$ (теорема 2). Это, по сути, аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

И, наконец, в третьем разделе получены финальные результаты работы — аналоги теоремы Крейна-Мильмана о крайних точках для ограниченных выпуклых не обязательно компактных множеств в банаховых пространствах, имеющих антикомпакты. Первый результат утверждает включение всякого ограниченного (не обязательно замкнутого) выпуклого множества A в некоторый компакт в $E_{\overline{C}}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (лемма 3). Второй аналог теоремы Крейна-Мильмана для банаховых пространств, имеющих антикомпакты — более тонкий результат, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество в терминах крайних точек его замыканий в пространствах, порождённых антикомпактами (теорема 3).

1. Определение и примеры антикомпактов

Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E.

Определение 1. Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$. *Примем обозначение:* $\overline{\mathcal{C}}(E)$ *— набор антикомпактных подмножеств пространства Фреше* E.

Приведём примеры антикомпактных множеств (или, сокращённо, антикомпактов) в некоторых пространствах.

Пример 1. Пусть E $= H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство. В таких пространствах существует система так называемых эллипсоидов [8]. Пусть
$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...)$ — последовательность положительных чисел. Для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется следующее множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 \ \ | \ \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leq 1 \right\}.$$

Доказано, что C_ε компактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to 0$ (см. [8]). Отметим, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая C_ε в пространстве $H_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. *Если $\varepsilon \to \infty$, то C_ε — антикомпакт.*

Доказательство. Действительно, поскольку любое ограниченное множество $B \subset H$ поглощается единичным шаром, то, не уменьшая общности рассуждений, вместо B достаточно рассмотреть единичный шар

$$B = \left\{x = \{x_k\} \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \le 1\right\}.$$

Ясно, что $p_B(\cdot) = \|\cdot\|_{\ell_2}$. Так как

$$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widetilde{x}_k^2|^2}{\widetilde{\varepsilon}_k^2},$$

где $\widetilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{\varepsilon_k}$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n, ...) \in H_{C_\varepsilon}$, $\widetilde{x}_k = \frac{x}{\varepsilon_k}$ $(\varepsilon \to +\infty)$, то ввиду $\widetilde{\varepsilon}_k \to 0$ при $k \to \infty$ имеем, что — B компакт в E_{C_ε}, т.е. C_ε антикомпактно в H. □

Замечание 1. Предыдущий пример позволяет объяснить смысл термина «антикомпактность». Дело в том, что условие компактности эллипсоида $\varepsilon \to 0$ в некотором смысле есть противопоставление условию антикомпактности эллипсоида $\varepsilon \to +\infty$.

Теперь покажем, как можно строить примеры антикомпактов в сепарабельных банаховых пространствах. Для этого рассмотрим пример в «типичном» банаховом пространстве числовых последовательностей ℓ_∞. Типичность пространства последовательностей ℓ_∞ мы понимаем в том смысле, что всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно подпространству $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (см. [2], стр. 556).

Пример 2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ назовём (невырожденным) эллипсоидом в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \widetilde{E} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \le 1\right\}.$$

Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая C_ε в $E_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\|_{C_\varepsilon} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|}. \tag{1.1}$$

Отметим, что если последовательность $\varepsilon \to 0$, то C_ε — компакт в $\widetilde{E}$ (при этом обратное утверждение неверно). Действительно, в таком случае $x_k \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по всем $x \in \widetilde{E}$. Поэтому C_ε равномерно мажорируется последовательностью $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...) \in c_0$, откуда вытекает компактность C_ε в пространстве c_0 (см. [2], стр.

336, теорема 1), а значит и в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (здесь мы учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$).

Покажем, что для любой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно.

Лемма 2. *Для всякой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно в $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Во-первых, по построению нормы в E_{C_ε}

$$\|x\|_{C_\varepsilon} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = K \cdot \|x\|_{\widetilde{E}}$$

для некоторого $K > 0$. Поэтому E_{C_ε} содержит некоторый шар в $\widetilde{E}$ с центром в нуле.

Во-вторых, предкомпактность любого ограниченного множества $B \subset \widetilde{E}$ в пространстве E_{C_ε} вытекает из наличия последовательности $\left(\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{1}{\varepsilon_2}, ..., \frac{1}{\varepsilon_n}, ...\right) \in c_0$, равномерно мажорирующей все последовательности из B по норме $E_{C_\varepsilon} \cong \ell_\infty$ (здесь мы снова учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$). □

Отметим достаточно неплохо проверяемый критерий наличия антикомпактов в банаховом пространстве, полученный нами в [7].

Теорема 1. *Банахово пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$.*

Следствие 1. *Банахово пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда над E существует счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов.*

С использованием предыдущих результатов нетрудно привести примеры банаховых пространств как имеющих, так и не имеющих антикомпакт. Так, хорошо известно, что линейно инъективно и непрерывно в ℓ_2 вложено всякое сепарабельное банахово пространство. Покажем, что такое возможно и в некоторых несепарабельных пространствах.

Пример 3. Пространство ограниченных числовых последовательностей ℓ_∞ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Действительно, достаточно рассмотреть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_2$, задаваемый следующим образом $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$.

Также приведём пример банахова пространства, которое ни один антикомпакт не имеет. При этом такое пространство гильбертово (несепарабельно) и поэтому рефлексивно.

Пример 4. Рассмотрим пространство $\ell_2([0;1])$ таких вещественных функций $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, что $\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 < \infty$. Ясно, что всякая функция $f \in \ell_2([0;1])$ имеет не более, чем счётное множество значений. Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum_{t\in[0;1]} |f(t)|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

а всякий линейный непрерывный функционал ℓ на $\ell_2([0;1])$ представим в виде

$$\ell(f) = \ell_g(f) = \sum_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|,$$

где g — некоторый фиксированный элемент из $\ell_2([0;1])$.

Ясно, что какое бы счётное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\ell_2([0;1])$ мы не выбрали, они все будут принимать нулевые значения на множестве функций из $f \in \ell_2([0;1])$, которые обращаются в нуль в точках $t \in [0;1]$, для которых $g_n(t) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. То есть всякое счётное множество линейных непрерывных функционалов на $\ell_2([0;1])$ принимает нулевые значения на ненулевых функциях и поэтому в пространстве $\ell_2([0;1])$ нет счётного тотального подмножества линейных непрерывных функционалов.

2. Аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов в пространствах, имеющих антикомпакты

Данный раздел статьи посвящён вспомогательному результату, показывающему при наличии антикомпакта $\overline{C} \in \mathcal{C}(E)$ представимость всякого сопряжённого пространства E^* в виде векторного индуктивного предела сопряжённых пространств $E^*_{\overline{C}}$, порождённых антикомпактами $\overline{C} \in \mathcal{C}(E)$. Иными словами, мы доказываем, что всякий линейный непрерывный функционал, заданный на банаховом пространстве E, можно продолжить до линейного непрерывного функционала, заданного на некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, порождённом антикомпактом $\overline{C} \in \mathcal{C}(E)$. Это, по сути, аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала с «уменьшением» нормы.

Теорема 2. *Если в банаховом пространстве E существует антикомпактное множество, то*

$$E^* = \bigcup_{\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(E)} E^*_{\overline{C}}, \tag{2.1}$$

Доказательство. 1) Ясно, что

$$\forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E) \quad E^*_{\overline{C}} \subset E^*. \tag{2.2}$$

Действительно, по построению антикомпакта $E \subset E_{\overline{C}}$ $\forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ и поэтому всякий линейный функционал на $E_{\overline{C}}$ будет линейным и на подмножестве E. Непрерывность же этого функционала вытекает из неравенства

$$\|x\|_{\overline{C}} \leq K \cdot \|x\|_E \text{ для всякого } x \in E \quad \forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E), \tag{2.3}$$

справедливого для некоторого числа $K > 0$.

2) Докажем теперь, что любой функционал $\ell \in E^*$ можно продолжить на $E^*_{\overline{C}}$ при некотором $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. Рассмотрим функционал $p^{\ell}_{\overline{C}}(\cdot) : E \to \mathbb{R}$: $p^{\ell}_{\overline{C}}(x) = |\ell(x)| + \|x\|_{\overline{C}}$ для некоторого множества $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. Ясно, что $p^{\ell}_{\overline{C}}(\cdot)$ — норма на E. Рассмотрим множество $\overline{\overline{C}} = \{x \in E \mid p^{\ell}_{\overline{C}}(x) \leq 1\}$, $E_{\overline{\overline{C}}} = (sp\overline{\overline{C}}, p_{\overline{\overline{C}}}(\cdot))$ — банахово пространство, порождённое $\overline{\overline{C}}$ (и пополненное по данной норме).

Любое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно $E_{\overline{\overline{C}}}$. Действительно, для всякой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ можно выбрать сходящуюся в $E_{\overline{C}}$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. А в свою очередь из последовательности $\{\ell(y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, которая будет сходиться в $E_{\overline{\overline{C}}}$ по построению. Итак, $\overline{\overline{C}} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. При этом $\forall x \in E$

$$|\ell(x)| \le |\ell(x)| + \|x\|_{\overline{C}} = \|x\|_{\overline{\overline{C}}}\ .$$

Далее, на основании теоремы Хана-Банаха [2] о продолжении линейного непрерывного функционала с сохранением нормы $|\ell(x)| \le \|x\|_{\overline{\overline{C}}} \quad \forall x \in E_{\overline{\overline{C}}}$, т.е. $\ell \in E^*_{\overline{\overline{C}}}$.

Таким образом, верно (2.1), чтд. □

При этом, опираясь на предыдущую теорему, возможно выяснить связь между сходимостью последовательности из E в топологии пространств $E_{\overline{C}}$ и слабой сходимостью последовательности в исходном пространстве E. Если в пространстве E существует предел $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{\overline{C}} = 0$. Возникает естественный вопрос: а если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится к $x \in E$ в топологии любого пространства $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, то будет ли сходимость этой последовательности в E и если да, то каков тип этой сходимости? На этот вопрос отвечает следующий результат, непосредственно вытекающий из предыдущей теоремы.

Следствие 2. *Пусть в банаховом пространстве E существует антикомпакт. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится к $x \in E$ в топологии любого пространства $E_{\overline{C}}$, порождённого антикомпактом $\overline{C}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится в E к элементу $x \in E$.*

3. Аналоги теоремы Крейна-Мильмана для ограниченных замкнутых множеств в банаховых пространствах

Теперь перейдём к финальным результатам работы — аналогам теоремы Крейна-Мильмана для выпуклых замкнутых ограниченных множеств в банаховых пространствах, имеющих антикомпакт. Напомним, что согласно классической теореме Крейна-Мильмана всякий выпуклый компакт A есть замкнутая выпуклая оболочка крайних точек множества A [1, 2]. Пусть в банаховом пространстве E существует антикомпакт $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. Тогда для ограниченного выпуклого множества $A \subset E$ замыкание $\overline{A}_{E_{\overline{C}}}$ — выпуклый компакт в $E_{\overline{C}}$. Согласно теореме Крейна-Мильмана (в пространстве $E_{\overline{C}}$)

$$\overline{A}_{E_{\overline{C}}} = \overline{co}_{E_{\overline{C}}}\ ext\left(\overline{A}_{E_{\overline{C}}}\right),$$

где $ext(X)$ — множество крайних точек множества X. Это означает, что справедлив следующий аналог теоремы Крейна-Мильмана для ограниченных выпуклых множеств, утверждающий включение всякого такого множества A в некоторый компакт в $E_{\overline{C}}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (замкнутость не требуется).

Лемма 3. *Если в пространстве существует антикомпакт (или в существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов), то для всякого ограниченного выпуклого множества $A \subset E$*

$$A \subset \overline{co}_{E_{\overline{C}}} ext\left(\overline{A}_{E_{\overline{C}}}\right). \tag{3.1}$$

Будем интерпретировать (3.1) так: если инъективно компактно вложено в $E_{\overline{C}}$ и $\varphi_{\overline{C}} : E \to E_{\overline{C}}$ — соответствующее каноническое вложение, то 3.1 означает, что

$$\varphi_{\overline{C}}(A) \subset \overline{co}_{E_{\overline{C}}}\ ext\ \overline{\varphi_{\overline{C}}(A)}.$$

В пространстве последнее равенство можно переписать так:

$$A \subset \varphi_{\overline{C}}^{-1}\left(\overline{co}_{E_{\overline{C}}} ext \overline{\varphi_{\overline{C}}(A)} \bigcap \varphi(E)\right).$$

Теперь рассмотрим более тонкий результат — аналог теоремы Крейна-Мильмана, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество с помощью крайних точек его замыкания в пространствах, порождённых антикомпактами. Пусть $\widehat{A}_{\overline{C}} = \varphi_{\overline{C}}(E) \bigcap \overline{co}_{E_{\overline{C}}}\ ext\ \varphi_{\overline{C}}(A)$, $A_{\overline{C}} := \overline{\varphi_{\overline{C}}^{-1}(\widehat{A}_{\overline{C}})} \subset E$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть в E существует антикомпакт. Тогда для всякого замкнутого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$*

$$A = \bigcap_{\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)} A_{\overline{C}}.$$

Доказательство. Включение $A \subset \bigcap\limits_{\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)} A_{\overline{C}}$ вытекает из предыдущей леммы. Пусть существует $x \in \bigcap\limits_{\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)} A_{\overline{C}}$, но $x \notin A$. Тогда по теореме Хана-Банаха существует такой линейный непрерывный функционал $\ell \in E^*$, что $\ell(x) > \sup \ell(A)$. По теореме 2 существует $\overline{C}' \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ такой, что $\ell \in E^*_{\overline{C}'}$ и $\ell\left(\varphi_{\overline{C}'}(x)\right) > \sup \ell\left(\varphi_{\overline{C}'}(A)\right)$. Это означает, что

$$\varphi_{\overline{C}'}(x) \notin \overline{co}_{E'_{\overline{C}}}\left(\varphi_{\overline{C}'}(A)\right) = \overline{co}_{E'_{\overline{C}}}\ ext\ \left(\varphi_{\overline{C}'}(A)\right).$$

Поэтому $x \notin A_{\overline{C}'}$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. □

Заключение

Настоящая работа — развитие предыдущих исследований автора, связанных с предложенной ранее системой антикомпактных множеств в пространствах Фреше. В классе банаховых пространств, имеющих счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов, в статье получены аналоги теоремы Крейна-Мильмана о крайних точках для не обязательно компактных выпуклых ограниченных множеств. Попутно в банаховых пространствах, имеющих антикомпакты, доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении всякого линейного непрерывного функционала, заданного на исходном пространстве на пространство, порождённое некоторым антикомпактом.

Список цитируемых источников

1. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures, Providence, Amer. Math. Soc., 1977.
2. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006.
3. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.

4. *Балашов М. В.* М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества пространстве / М. В. Балашов, Е. С. Половинкин // Математический сборник. — 2000. — Т. 191., № 1 — С. 26 – 64.
5. *Балашов М. В.* Об аналоге теоремы Крейна-Мильмана для сильно выпуклой оболочки в гильбертовом пространстве / М. В. Балашов // Математические заметки. — 2002. — Т. 71., вып. 1 — С. 37 – 42.
6. *Стонякин Ф. С.* Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше / Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т.53. — С. 155–176.
7. *Стонякин Ф. С.* Секвенциальная версия теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторных мер/ Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки.» — 2014. — Т.27(66), №1. — С. 100 – 111.
8. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы. / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 165 –175.

Получена 01.11.2014