Динамические системы, 2014, том 4(32), №3-4, 279–285

УДК 517.432

Минимальность самосопряженной дилатации диссипативного оператора

Ю. Л. Кудряшов
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: kudryashov_2889@mail.ru*

Аннотация. В статье доказывается минимальность симметрической и самосопряженной дилатации плотно заданного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек. Пусть A — диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, $-i \in \rho(A)$, L — его симметрическая дилатация, действующая в пространстве H_1, R_{-i} — резольвента дилатации L в точке $-i$. Доказано, что $H_1 = \overline{\operatorname{span}_{n \geq 0} R_{-i}^n H}$. В случае самосопряжённой дилатации S оператора A, которая действует в пространстве H_2, доказано, что $H_2 = \overline{\operatorname{span}_{n \in \mathbb{Z}} R_{-i}^n H}$. При доказательстве используется сепарабельность пространств $\overline{QH}$ и $\overline{Q_1 H}$, где Q и Q_1 — квадратные корни из дефектных операторов оператора A.

Ключевые слова: неограниченный оператор, диссипативный оператор, дилатация, самосопряженный оператор.

1. Введение. Предварительные сведения

Для оператора сжатия в [5] была построена унитарная дилатация и доказана ее минимальность. Используя преобразование Кэли можно доказать существование самосопряженной дилатации диссипативного оператора и дать определение минимальности такой дилатации.

В [3], [4] были явно построены спектральное и трансляционное представления самосопряженной дилатации диссипативного оператора. Здесь доказывается минимальность спектрального представления дилатации.

Определение 1. Пусть A — линейный, не обязательно ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Оператор $\widetilde{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется дилатацией оператора A [1, 4], если выполняются следующие условия:

1) существует $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho\left(\widetilde{A}\right)$;

2) $H \subset \widetilde{H}$;

3) $R_{\lambda_0}^n(A)\, h = P R_{\lambda_0}^n\left(\widetilde{A}\right) h$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h \in H$, P — ортопроектор из $\widetilde{H}$ на H, $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$, $R_{\lambda_0}\left(\widetilde{A}\right) = \left(\widetilde{A} - \lambda_0 I\right)^{-1}$.

Исходя из этого определения, естественно, дать следующее определение минимальности симметрической дилатации.

Определение 2. Симметрическая дилатация L, действующая в пространстве $\widetilde{H}$, оператора A, действующего в пространстве H называется минимальной, если

$$\widetilde{H} = \overline{\operatorname{span}\left\{ R_{\lambda_0}^n(L)\, h \,\middle|\, h \in H,\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\}} = H_{\min}.$$

Очевидно, что для произвольной симметрической дилатации L в $\widetilde{H}$, $H_{\min} \subset \widetilde{H}$ и $H_{\min}$ инвариантно относительно резольвенты $R_{\lambda_0}(L)$, но не обязательно инвариантно относительно самого оператора L. Поэтому не всякую дилатацию можно сузить до минимальной, как в случае изометрической дилатации оператора сжатия [5].

В случае самосопряженной дилатации S, определение минимальности следующее:

Определение 3. Самосопряженная дилатация S, действующая в пространстве $\widetilde{H}$, оператора A, действующего в пространстве H, называется минимальной, если

$$\widetilde{H} = H_{\min} = \overline{\operatorname{span}\left\{R^n_{\lambda_0}(S)\,h,\ R^n_{\overline{\lambda_0}}(S)\,h \Big|\ h \in H,\ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}}.$$

2. Симметрическая дилатация

Везде далее A — диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$ и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим опреаторы

$$B = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R^*_{-i}\,R_{-i}, \quad \widetilde{B} = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R_{-i}\,R^*_{-i},$$

где $R_{-i} = (A + i\,I)^{-1}$.

Так как $B \geq 0$ и $\widetilde{B} \geq 0$ [3], то можно рассмотреть операторы $Q = \sqrt{B}$ и $\widetilde{Q} = \sqrt{\widetilde{B}}$.

Образуем гильбертово пространство $\widetilde{H} = H_+ \oplus H$, где $H_+ = L_2(0,\infty;\ H_1)$, $\quad H_1 = \overline{Q\,H}$ и построим в нем оператор L следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \end{pmatrix}$, где $h_+ \in H_+$, $\ h_0 \in H$, принадлежит $\mathfrak{D}(L)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_+(t),\ \dfrac{d\,h_+(t)}{dt}\right\} \subset H_+$;

2) $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $h_+(0) = i\,D\,h_0$, где $D = Q(A + i\,I)$.

Если $h \in \mathfrak{D}(L)$, то

$$L\,h = L\begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_+\,h_+ \\ A\,h_0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_+\,h_+ = i\,\dfrac{d\,h_+}{dt}$.

Оператор L является симметрической дилатацией оператора A [3].

Теорема 1. *Если пространство $H_1 = \overline{Q\,H}$ — сепарабельное, то дилатация L является минимальной.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\widetilde{H} = H_+ \oplus H = \overline{\operatorname{span}\left\{R^n_{-i}(L)\,h \Big|\ \ h \in H, \ \ n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}}.$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что

$$R_{-i}(L)\begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}h_+ + i\,e^{-t}\,Q\,h_0 \\ R_{-i}\,h_0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_+\Big|_M$, $\quad M = \Big\{h_+ \in \mathfrak{D}(\mathcal{P}_+)\Big| \quad h_+(0) = 0\Big\}$,

$$(\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}g(x) = \frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{t-x}g(t)\,dt.$$

Отсюда

$$R_{-i}(L)\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,e^{-t}\,Q\,h_0 \\ R_{-i}\,h_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Применяя метод математической индукции, докажем формулу для n-ой степени резольвенты оператора L:

$$R^n_{-i}(L)\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

$$\varphi_n = e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!\,i^{n-k-1}}\,Q\,R^{k-1}_{-i}h_0, \quad \psi_n = R^n_{-i}\,h_0.$$

Как легко видеть, при $n = 1$ мы получаем формулу (2.2).

Пусть равенство (2.3) верно для n и докажем его справедливость для $n+1$, т. е., что

$$\psi_{n+1} = R^{n+1}_{-i}\,h_0, \quad \varphi_{n+1} = e^{-t}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,i^{n-k}}\,Q\,R^{k-1}_{-i}\,h_0.$$

Применяя формулу (2.1), получим:

$$R^{n+1}_{-i}(L)\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = R_{-i}(L)\,R^n_{-i}(L)\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_{n+1} \\ \psi'_{n+1} \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi'_{n+1} = \frac{1}{i}\int\limits_0^t e^{x-t}\cdot e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!\,i^{n-k-1}}\,Q\,R^{k-1}_{-i}h_0\,dx + i\,e^{-t}\,Q\,R^n_{-i}\,h_0,$$

$$\psi'_{n+1} = R^{n+1}_{-i}\,h_0 = \psi_{n+1}.$$

Преобразуем φ'_{n+1}:

$$\varphi'_{n+1} = e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{x^{n-k}}{(n-k)!\,i^{n-k}}\,dx\,Q\,R^{k-1}_{-i}\,h_0 \; + i\,e^{-t}\,Q\,R^n_{-i}\,h_0 =$$

$$= e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,i^{n-k}}\,Q\,R^{k-1}_{-i}\,h_0 \; + i\,e^{-t}Q\,R^n_{-i}\,h_0 =$$

$$= e^{-t} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, Q\, R_{-i}^{k-1}\, h_0 = \varphi_{n+1}.$$

Таким образом, формула (2.3) доказана.

Пусть $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$, тогда для $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(L) \begin{pmatrix} 0 \\ (A + i\, I)\, h_0 \end{pmatrix} - R_{-i}^{n}(L) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n'' \\ \psi_n'' \end{pmatrix},$$

где $\psi_n'' = 0$,

$$\varphi_n'' = e^{-t} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, Q\, R_{-i}^{k-2}\, h_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k-1}}\, Q\, R_{-i}^{k-1}\, h_0 \right) =$$

$$= e^{-t} \left(\frac{t^n}{n!\, i^{n-1}}\, D\, h_0 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, Q\, R_{-i}^{k-2}\, h_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k+1}}\, Q\, R_{-i}^{k-1}\, h_0 \right).$$

Производя замену в первой сумме $q = k - 1$, получаем:

$$\varphi_n'' = \frac{e^{-t}\, t^n}{n!\, i^{n-1}}\, Q\, (A + i\, I)\, h_0.$$

Так как $\overline{Q\, (A + i\, I)\, \mathfrak{D}(A)} = \overline{Q\, H} = H_1$, то в силу сепарабельности пространства H_1, множество вектор-функций вида $t^n\, e^{-t}\, h_0$, где $h_0 \in H_1$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ плотно в $L_2(0, \infty;\ H_1)$.

Тогда $H_+ = \overline{\operatorname{span} \left\{ R_{-i}^{n}(L)\, h \,\middle|\, \quad h \in H, \quad n \in \mathbb{N} \right\}}$. □

Замечание. Если при построении дилатации положить $H_+ = L_2(0, \infty;\ H_1')$ где $H_1 = \overline{Q\, H}$ и $\overline{Q\, H} \subset H_1'$, то полученная дилатация, как легко видеть, минимальной не будет.

3. Самосопряженная дилатация

Рассмотрим пространства вектор-функций: $H_+ = L_2(0, \infty;\ H_1)$ и $H_- = L_2(-\infty, 0;\ H_2)$, где $H_1 = \overline{Q\, H}$, $H_2 = \overline{\widetilde{Q}\, H}$.

Образуем гильбертово пространство $\mathcal{H} = H_- \oplus H \oplus H_+$ и построим в нем оператор S следующим образом: вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in H$, принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{ h_\pm(t),\ \dfrac{d\, h_\pm(t)}{dt} \right\} \subset H_\pm$;

2) $\varphi = h_0 + \widetilde{Q}\, h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $h_+(0) = T^*\, h_-(0) + i\, D\, \varphi$, где $T^* = I + 2\, i\, R_{-i}^*$.

Если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$S\,h = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\,h_- \\ -i\,h_0 + (A + i\,I)\,\varphi \\ \mathcal{P}_+\,h_+ \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_+\,h_+ = i\dfrac{d\,h_+}{dt}$, $\mathcal{P}_-\,h_- = i\dfrac{d\,h_-}{dt}$.

Оператор S является самосопряженной дилатацией оператора A [3].

Теорема 2. *Если пространства H_1 и H_2 — сепарабельные, то дилатация S является минимальной.*

Доказательство. В нашем случае $\lambda_0 = -i$, следовательно, надо доказать, что

$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\left\{R^n_{\pm\,i}(S)\,h\right|\quad h \in H,\quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\Big\}}.$$

Для этого достаточно показать:

1) $H_+ = \overline{\operatorname{span}\left\{R^n_{-\,i}(S)\,h\right|\quad h \in H,\quad n \in \mathbb{N}\Big\}}$;

2) $H_- = \overline{\operatorname{span}\left\{R^n_{i}(S)\,h\right|\quad h \in H,\quad n \in \mathbb{N}\Big\}}$.

Непосредственными вычислениями можно проверить следующие два равенства (3.1) и (3.2):

$$R_{-i}(S)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_- + i\,I)^{-1}\,h_- \\ R_{-i}\,h_0 - \widetilde{Q}\,V_-(0) \\ (\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}\,h_+ + e^{-t}\,V_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_- \\ V_0 \\ V_+ \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $V_-(0) = \Big[(\mathcal{P}_- + i\,I)^{-1}\,h_-(t)\Big]_{t=0}$, $\quad V_+(0) = T^*\,V_-(0) + i\,Q\,h_0$,

$$(\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}\,g_+(x) = \frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{t-x} g_+(t)\,dt,$$

$$(\mathcal{P}_- + i\,I)^{-1}\,g_-(x) = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^x e^{t-x} g_-(t)\,dt \quad (\forall g_\pm \in H_\pm).$$

$$R_{i}(S)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_{-0} - i\,I)^{-1}\,h_- + e^{t}\,U_-(0) \\ R^*_{-i}\,h_0 - Q\,U_+(0) \\ (\mathcal{P}_+ - i\,I)^{-1}\,h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_- \\ U_0 \\ U_+ \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $U_+(0) = \Big[(\mathcal{P}_+ - i\,I)^{-1}\,h_+(t)\Big]_{t=0}$, $\quad \mathcal{P}_{-0} = \mathcal{P}_-\Big|_{M_-}$,

$$M_- = \Big\{h_- \in \mathfrak{D}(\mathcal{P}_-)\Big|\quad h_-(0) = 0\Big\}, \quad U_-(0) = T\,U_+(0) - i\,\widetilde{Q}\,h_0,$$

$$(\mathcal{P}_{-0} - i\,I)^{-1}\, g_-(x) = \frac{1}{i} \int\limits_x^0 e^{x-t} g_-(t)\, dt,$$

$$(\mathcal{P}_{+} - i\,I)^{-1}\, g_+(x) = \frac{1}{i} \int\limits_x^\infty e^{x-t} g_+(t)\, dt.$$

Из (3.1) следует, что:

$$R_{-i}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{-i}\, h_0 \\ (\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}\, h_+ + i\, e^{-t}\, Q\, h_0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили резольвенту симметрической дилатации L оператора A, действующей в пространстве $H_+ \oplus H$. Следовательно, равенство 1) вытекает из теоремы 1.

Докажем 2). Для этого надо установить выражение для $R_i^n(S)$.

По индукции докажем, что

$$R_i^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где $g_n = R_{-i}^{*^n} h_0, \quad f_n = e^t \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{t^{n-k}}{(n-k)!\,(-i)^{n-k-1}}\, \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{k-1}}\, h_0.$

При $n = 1$, из (3.2), получаем:

$$R_i(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\, \widetilde{Q}\, e^t\, h_0 \\ R_{-i}^{*}\, h_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и формула (3.3), как легко видеть, справедлива.

Пусть (3.3) верна для n и докажем ее справедливость для $n+1$, т. е., что

$$g_{n+1} = R_{-i}^{*^{n+1}}\, h_0, \quad f_{n+1} = e^t \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(-i)^{n-k}}\, \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{k-1}}\, h_0.$$

Применяя формулу (3.2), получим:

$$R_i^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_i(S)\, R_i^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{n+1} \\ g'_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $g'_{n+1} = R_{-i}^{*^{n+1}}\, h_0 = g_{n+1}$,

$$f'_{n+1} = -i\, e^t \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^n}\, h_0 + \frac{1}{i} \int\limits_0^t e^{t-x} f_n(x)\, dx =$$

$$= e^t \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)!\, i^{n-k}}\, t^{n-k+1}\, \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{k-1}}\, h_0 - i\, e^t \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{n}}\, h_0 = f_{n+1}.$$

Формула (3.3) доказана.

Пусть $h_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$, тогда для $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, получаем:

$$R_i^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ (A^* - i\, I)\, h_0 \\ 0 \end{pmatrix} - R_i^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$f_n'' = e^t \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n-k}\, t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{k-2}}\, h_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k-1}\, t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k-1}}\, \widetilde{Q}\, R_{-i}^{*^{k-1}}\, h_0 \right).$$

Производя в первой сумме замену $q = k - 1$, имеем

$$f_n'' = \frac{t^n\, e^t}{n!\, (-i)^{n-1}}\, \widetilde{Q}\, (A^* - i\, I)\, h_0.$$

Так как $\overline{\widetilde{Q}\, (A^* - i\, I)\, \mathfrak{D}(A^*)} = \overline{\widetilde{Q}\, H} = H_2$, то в силу сепарабельности пространства H_2, множество вектор-функций вида: $t^n\, e^t\, h_0$, где $h_0 \in H_2$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, плотно в $L_2(-\infty, 0;\ H_2)$. $\square$

4. Заключение

Здесь впервые доказана минимальность самосопряженной дилатации произвольного неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек при условии, что при построении дилатации пространства $\overline{Q\, H}$ и $\overline{\widetilde{Q}\, H}$ являются сепарабельными. Понятие минимальности позволяет решать ряд важных задач: построение функциональной модели оператора и изучение структуры пространства дилатации и др.

Список цитируемых источников

1. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. // Харьков: ХНУ, — 2003. — 342 с.
2. *Кудряшов Ю. Л.* Минимальность σ — симметрической дилатации операторного узла. // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. — 2012. — Т.25(64), №2. — С. 84–88.
3. *Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения — 1982. — Вып.37 — С. 51–54.
4. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. // ДАН СССР. — 1980. — Т.253, №4. — С. 812–815.
5. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. // М.: Мир, 1970. — 431 с.

Получена 04.06.2014