

УДК 517:957

Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной

Ю. А. Хазова

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Аннотация. Рассматривается динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения. Математической моделью системы является параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. В работе используется метод Галеркина. В задаче реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций, в результате чего возникают метаустойчивые структуры.

Ключевые слова: параболическая задача, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

Введение

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур [1, 9, 10]. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. В этом случае экспериментально установлено многообразие оптических структур, выявлена зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии [1, 11, 12]. Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются полулинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Параболическое уравнение на отрезке с преобразованием отражения рассматривалось в работах [14, 10, 4]. Методы локальной теории бифуркаций в этом случае применялись в [14, 10] с целью построения стационарных структур и анализу их устойчивости. Метод Галеркина использовался в [4] для построения стационарных структур и исследования их устойчивости при углублении в область надкритичности.

В данной работе рассматривается скалярное параболическое уравнение на отрезке с преобразованием отражения. Центральное место в данной работе занимает вопрос о медленно меняющихся (метаустойчивых) структурах рассматриваемой задачи, точнее её упрощенной формы. Строится, следуя [6], иерархия упрощенных моделей указанной задачи. Анализ галеркинских аппроксимаций указанной задачи, а также её численные расчеты, позволяют утверждать, что при средних (не очень малых) значениях

коэффициента диффузии в рассматриваемой задаче возникают метаустойчивые структуры. Отметим, что численные расчеты проводились в данной работе, используя пакет «Mathematica».

Интерес к исследованию параболических уравнений с преобразованием пространственных переменных и малой диффузией вызван явлением распада оптических структур (оптической турбулентности), установленного в натуральных экспериментах [1]. Теоретическому анализу указанных уравнений на окружности и преобразованием поворота угловой переменной посвящены работы [6, 17, 7, 8, 5]. Если поворот рационально соизмерим 2π и несоизмерим π , то тогда согласно [6, 17, 7, 8, 5] при уменьшении коэффициента диффузии и его стремлении к нулю возрастает как количество решений типа бегущих волн, так и количество среди них орбитально экспоненциально устойчивых. Если же поворот рационально соизмерим π , то тогда согласно [6, 17] при уменьшении коэффициента диффузии и его стремлении к нулю возрастает количество стационарных решений, однако все они неустойчивы, за исключением, возможно, двух.

Мы рассматриваем здесь родственную задачу, в которой также имеет место рост числа стационарных решений при уменьшении коэффициента диффузии и его стремлении к нулю. Все они неустойчивы за исключением, возможно, двух или четырех. Однако, принципиальную роль в динамике рассматриваемой задачи при уменьшении коэффициента диффузии играют метаустойчивые структуры.

Отметим теперь, что фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур сингулярно возмущенных параболических уравнений на отрезке с условиями Неймана получены в работах [15], [16]. В этих работах доказано, что для любого фиксированного натурального n и достаточной малости коэффициента диффузии существует n -параметрическое семейство решений. Каждое решение указанного n -параметрического семейства является медленно меняющейся функцией типа внутреннего переходного слоя с n точками перехода h_1, h_2, \dots, h_n . Переменные h_1, h_2, \dots, h_n удовлетворяют системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определяет движение по n -параметрическому многообразию решений — многообразию медленных движений.

1. Постановка задачи

Математической моделью для описания пространственно неоднородных оптических структур и их устойчивости нелинейного интерферометра с преобразованием отражения является краевая задача на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$u_t(x, t) + u(x, t) = Du_{\varphi\varphi}(x, t) + K(1 + \gamma \cos u(-x, t)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u_x\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \quad (1.2)$$

Краевая задача (1.1), (1.2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(x, t)$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды с преобразованием отражения координат в двумерной обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $D > 0$, коэффициент K пропорционален интенсивности светового потока, $K > 0$, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

Гильбертово пространство $H = L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ измеримых на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функций. Пусть H^s , $s \in \mathbb{N}$, есть шкала пространств, порожденная оператором Δ (Δ — одномерный оператор

Лапласа) при условиях (1.2). Норма в H^s задается формулой $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H . Отметим, что оператор $-\Delta$ имеет полную ортогональную систему собственных функций $1, \sin \varphi, \cos \varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi, \dots$

В работе [4] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Оператор L с условием периодичности (1.2) имеет полную ортогональную систему собственных функций $1, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 3\varphi, \cos 4\varphi, \dots$, соответствующих собственным значениям*

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \quad \lambda_1 = 1 + D + \Lambda, \quad \lambda_2 = 1 + 4D - \Lambda, \quad \lambda_3 = 1 + 9D + \Lambda, \dots$$

Критическими являются функции $\sin \varphi, \sin 3\varphi, \sin 5\varphi, \dots$, собственные значения которых могут поменять знак.

Выполняется **условие 1**: $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$.

Из леммы 1 и условия 1 следует, если $D > D_1 = -(1 + \Lambda)$, то $\omega = \omega(K, \gamma)$ — асимптотически устойчивое решение задачи (1.1), (1.2). При уменьшении D и его прохождении через значение $D_1 = -(1 + \Lambda)$ решение $u = \omega(K, \gamma)$ теряет устойчивость. Обозначим $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1} D_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Индекс неустойчивости решения ω при $D_3 < D < D_1$ равен 1. При уменьшении D и его прохождении через следующие значения $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1} D_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ каждый раз индекс неустойчивости решения ω повышается на единицу.

2. Устойчивые структуры упрощенной параболической задачи

В качестве бифуркационного параметра примем D . Замена $u = v + \omega$, приводит уравнение (1.1), (1.2) в пространстве H^1 к виду

$$v_t + Lv = R(Qv), \quad (2.1)$$

где

$$R(Qv) = \Lambda \frac{1}{2!} ctg \omega \cdot Qv^2 - \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qv^3 + O(v^4), \quad (2.2)$$

$L = L(D) = 1 - D\Delta - \Lambda Q$, $Qv(\varphi, t) = v(\pi - \varphi, t)$, т. е. получаем

$$v_t + v = Dv_{\varphi\varphi} + \Lambda Qv + \Lambda \frac{1}{2!} ctg \omega \cdot Qv^2 - \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qv^3 + O(v^4).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < D - D_1 < \delta_0$, то задача (1.1), (1.2) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения: $u_1^\pm(x, D) = \omega + v_1^\pm(x, D)$, где*

$$\begin{aligned} v_1^\pm(x, D) = & \pm \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{1/2} \sin x + \\ & + \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right) \frac{\Lambda_1}{4} ((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x) \pm \\ & \pm \frac{1}{24} \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{3/2} (3\Lambda_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda (\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1}) \sin 3x + \\ & + O((D - D_1)^2), \end{aligned}$$

$$c_1(D) = -\frac{1}{4}\Lambda_1^2 \left((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{1}{8}\Lambda, \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega.$$

Решения $u_1^\pm(x, D)$ — экспоненциально устойчивы.

Доказательство теоремы приведено в [18].

3. Структуры упрощенной параболической задачи на прямой

Пусть выполняется **условие 2**: $\cos \omega = 0$. Тогда задача (2.1), (2.2) в пространстве H^1 принимает вид

$$v_t + v = Dv_{xx} + \Lambda Qv - \frac{\Lambda}{6}Qv^3. \quad (3.1)$$

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (3.1) в виде

$$v = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \sin(2k-1)x + \sum_{k=1}^N z_{k+N} \cos(2k)x. \quad (3.2)$$

Подставим (3.2) в уравнение (3.1). Приравняв затем коэффициенты при $\sin kx$, $k = 1, \dots, N$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\lambda_0 z_0 + g_0(z), \\ \dot{z}_s &= -\lambda_{2s-1} z_s + g_s(z), \quad s = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_{2k} z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Системы уравнений (3.3) обладают рядом общих свойств. Для каждого N нулевое решение (3.3) — асимптотически устойчиво, если $D > D_1$. Нулевое решение (3.3) теряет устойчивость при прохождении параметра D через значение D_1 . Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^1(D, N) = \pm(0, z_1^1(D, N), z_2^1(D, N), \dots, z_N^1(D, N), 0, \dots, 0)$.

В силу (3.2) и определения $z^1(D, N)$ справедливо следующее равенство

$$v_1(D) = v_1(x, D) \approx \sum_{s=1}^N z_s^1(D, N) \sin(2s-1)x. \quad (3.4)$$

Опишем динамику по параметру D стационарных решений $v_1(x, D)$ уравнения (3.1), опираясь на равенство (3.4) и численные расчеты непрерывной ветви $z^1(D, N)$ стационарных точек системы (3.3), проведенные для $N \sim 33$. Для значений параметра D вблизи D_1 $v_1(x, D)$ является квазигармонической функцией с малой амплитудой. Амплитуда функций (3.4) монотонно возрастает с убыванием параметра D , приближаясь к $2\sqrt{\frac{6(\Lambda-1)}{\Lambda}}$ при $D \rightarrow 0$. На следующем рисунке представлены приближенные решения $v_1(x, D)0$, полученные согласно (3.4) для $N = 20$.

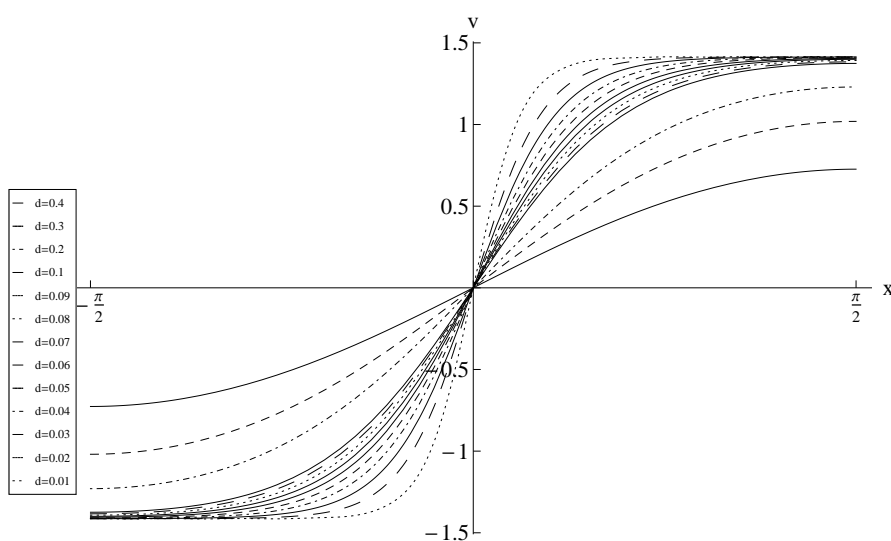


Рис. 1. Решения $v_1(x, D)$, где $N = 20$, $\Lambda = -1.5$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарного решения $v_1(x, D)$. С этой целью обратимся к динамике спектра $\sigma(z^1(D, N))$ ветви неподвижных точек $z^1(D, N)$ системы (3.3). Проведенный анализ показал, что поведение спектра зависит от Λ . Если $\Lambda \in (a, -1)$, где $a \approx -2$, то при убывании параметра D точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра $\mu_1^1 < 0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. В качестве примера приведем 4 максимальные точки спектра, когда $N = 20$, $\Lambda = -1.5$

$$\begin{aligned}\sigma(z^1(0.4, 20)) &= \{\dots, -3.910, -3.303, -2.285, -0.197\}, \\ \sigma(z^1(0.1, 20)) &= \{\dots, -2.243, -1.362, -1.313, -0.708\}, \\ \sigma(z^1(0.06, 20)) &= \{\dots, -1.858, -1.171, -1.157, -0.740\}, \\ \sigma(z^1(0.01, 20)) &= \{\dots, -1.127, -1.015, -1.014, -0.749\}.\end{aligned}$$

Проведенный анализ для N от 16 до 33 дает основание предполагать, что решение $v_1(x, D)$ при $\Lambda \in (a, -1)$ асимптотически устойчиво на промежутке $(0, D_1)$ изменения параметра D .

Пусть теперь $\Lambda < a$. Тогда при убывании параметра D точки спектра $\sigma(z^1(D, N))$ сближаются. При этом его максимальная точка спектра $\mu_1^1 < 0$ с некоторого значения параметра D начинает приближаться к нулю, при $D = D^*(N)$ переходит с ненулевой скоростью через нуль, остальные точки спектра — возрастают, но остаются на отрицательной полуоси. Такое поведение точек спектра наблюдалось для всех исследованных значений N (от 16 до 33). В качестве иллюстрации приведем 4 максимальные точки

спектра при $N = 20$, $\Lambda = -2.5$

$$\begin{aligned}\sigma(z^1(0.4, 20)) &= \{\dots, -4.643, -3.392, -2.00477, -0.347\}, \\ \sigma(z^1(0.315, 20)) &= \{\dots, -4.167, -2.840, -2.108, -0.000651\}, \\ \sigma(z^1(0.314, 20)) &= \{\dots, -4.162, -2.833, -2.109, 0.00342\}, \\ \sigma(z^1(0.3, 20)) &= \{\dots, -4.087, -2.729, -2.124, 0.0603\}, \\ \sigma(z^1(0.2, 20)) &= \{\dots, -3.600, -2.208, -1.809, 0.453\}.\end{aligned}$$

В этом случае имеет место суперкритическая (надкритическая) бифуркация типа «вилка». Существует $D^*(N)$, такое что при уменьшении D и прохождении через $D^*(N)$ от $z^1(D, N)$ ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $z_{\pm}^1(D, N) = (z_{\pm s}^1)$, $s = 1, \dots, N$, определенные для $D \in (0, D^*(N))$. Пара $z_{\pm}^1(D, N)$ рождается устойчивой и остается таковой на всем отрезке $(0, D^*(N))$ изменения параметра D . При этом $z^1(D, N)$ становится неустойчивой с индексом неустойчивости 1. Непрерывным по D ветвям $z_{\pm}^1(D, N)$, $z^1(D, N)$ стационарных решений (3.3) в силу (3.2) отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений уравнения (3.1). Указанные функции при фиксированных D и Λ принимались в качестве начальных условий для уравнения (3.1). Выполненные численные расчеты дают основания для следующего заключения. Существует D^* такое, что при уменьшении D и прохождении через D^* от $v_{\pm}^1(x, D)$ ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $v_{\pm}^1(x, D)$, определенные для $D \in (0, D^*)$. Решения $v_{\pm}^1(x, D)$ рождаются устойчивыми и сохраняют устойчивость при уменьшении параметра D .

На рисунке 2 приведены приближенные решения $v_{\pm}^1(x, D)$ для $\Lambda = -2.5$ и различных D .

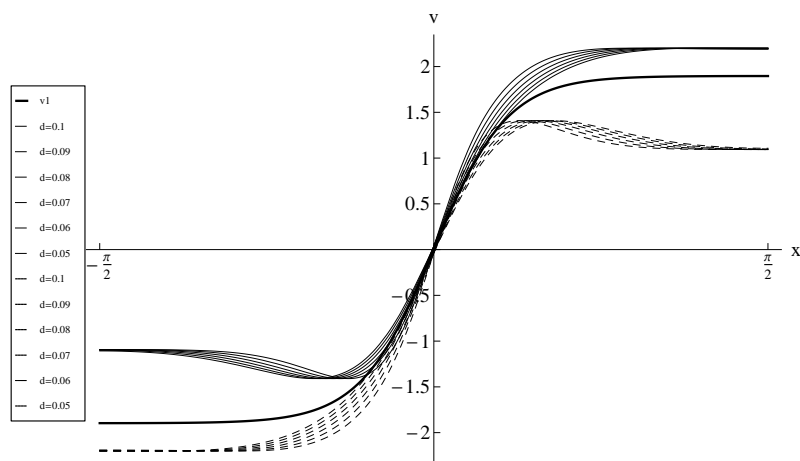


Рис. 2. Приближенные решения (3.1) $v_{\pm}^1(x, D)$ $N = 10$, $\Lambda = -2.5$.

С целью анализа поведения решений уравнения (3.1), где $\Lambda < a$, с начальными условиями вблизи $v_1(x, D)$ нами были проведены численные эксперименты, один из которых отражает рис. 3. Видно, что решение с начальными условиями вблизи $v_1(x, D)$ за довольно короткий промежуток времени оказывается вблизи устойчивого решения $v_{\pm}^1(x, D)$. Результаты указанных численных экспериментов согласуются с предложением о потере

устойчивости $v_1(x, D)$ и бифуркацией ветвления из $v_1(x, D)$ пары устойчивых стационарных решений.

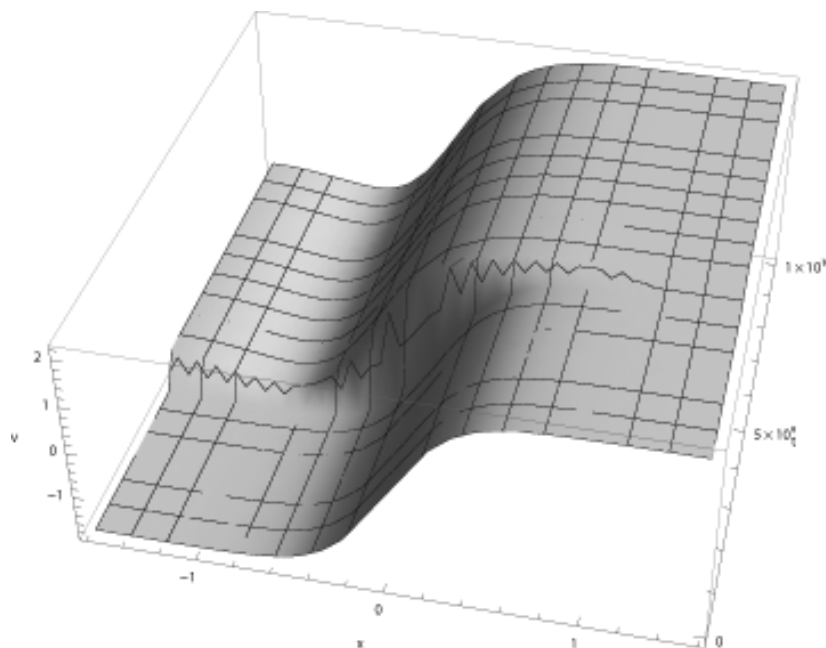


Рис. 3. Метаустойчивая структура $+v_1(x, D)$, $\Lambda = -2.5$, $D = 0.08$.

4. Неустойчивые решения $v_2(x, D)$

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости стационарных решений $\pm v_2(x, D)$ уравнения (3.1). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр D , убывая, проходит через $D_3 = \frac{D_1}{3}$. Для анализа поведения $\pm v_2(x, D)$ при отходе параметра D от точки бифуркации обратимся к системам (3.3). В этих системах индекс неустойчивости нуля повышается на единицу и становится равным двум тогда, когда параметр D , убывая, проходит через D_3 . В результате имеет место бифуркация «вилка» — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^2(D, N) = \pm(z_k^2(D, N), z_{k+N}^2(D, N))$, $k = 1, \dots, N$, где от нуля отличны только координаты с индексами 2, 5, 8, ...

Как и выше, воспользовавшись (3.2), приходим к следующему приближенному равенству

$$v_2(D) = v_2(x, D) \approx \sum_{k=1}^N z_k^2(D, N) \sin(2s - 1)x. \quad (4.1)$$

Равенства (4.1) позволяют описать динамику $v_2(x, D)$ при убывании D . Отметим, что при $D \rightarrow 0$ $v_2(x, D)$ приближается к ступенчатой функции, принимающей значения $\pm \sqrt{\frac{6(\Lambda-1)}{\Lambda}}$ и точками разрыва $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$.

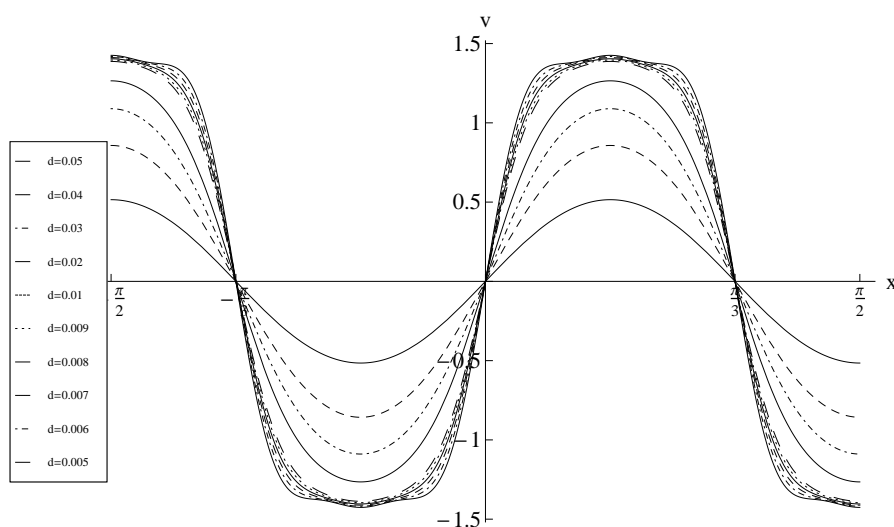


Рис. 4. Решения $v_2(x, D)$ $N = 20$, $\Lambda = -1.5$.

На рис. 4 представлены согласно (4.1) приближенные решения $v_2(x, D)$, где $N = 20$, $\Lambda = -1.5$ и различных значениях параметра D . При $D = 0.005$ график $v_2(x, D)$ начинает колебаться.

Как уже отмечалось решение $v_2(x, D)$ рождается из нуля неустойчивым с индексом неустойчивости 1. Вопрос об устойчивости $v_2(x, D)$ при уменьшении параметра D приводит к вопросу о поведении максимального собственного значения решения $v_2(x, D)$. Обратимся в этой связи к вопросу о динамике при уменьшении параметра D максимального собственного значения $\mu_1^2(D, N)$ неподвижных точек $z^2(D, N)$ системы (3.3). Спектр матрицы устойчивости $z^2(D, N)$ лежит на вещественной оси и его максимальная точка $\mu_1^2(D, N)$ при малых $D_2 - D > 0$ принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

Согласно проведенному анализу динамика спектра $z^2(D, N)$ зависит от параметра Λ . Пусть $\Lambda \in (a, -1)$. Тогда поведение $\mu_1^2(D, N)$ при уменьшении D зависит от порядка аппроксимации N . Если $N = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, то с уменьшением D $\mu_1^2(D, N)$ убывая приближается к нулю, затем медленно меняется вблизи нуля, оставаясь на положительной полуоси. Приведем иллюстрирующий пример: $\Lambda = -1.5$, $\mu_1^2(0.008, 19) = 0.000297933$, $\mu_1^2(0.006, 19) = 0.0000611899$, $\mu_1^2(0.005, 19) = 0.0000547636$, $\mu_1^2(0.004, 19) = 0.00014671$, $\mu_1^2(0.003, 19) = 0.000547081$. Если приведенное выше условие на N не выполняется, то $\mu_1^2(D, N)$ приближается к нулю при уменьшении параметра D и при некотором $D = D^{**}(N)$ становится отрицательным. Приведем иллюстрирующий пример: $\mu_1^2(0.007, 20) = 0.000130687$, $\mu_1^2(0.006, 20) = 0.000043836$, $\mu_1^2(0.005, 20) = -3.2914 \cdot 10^{-6}$, $\mu_1^2(0.004, 20) = -0.0000630655$, $\mu_1^2(0.003, 20) = -0.000284437$.

Пусть теперь $\Lambda < a$. Тогда как и выше убывание D от D_2 приводит к убыванию $\mu_1^2(D, N)$. При этом точки спектра $z^2(D, N)$ сближаются, максимальная точка спектра $\mu_1^2 > 0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. Однако, начиная с некоторого D_2^{**} еще две точки спектра начинают возрастать и переходят на положительную полуось. Приведем пример для $\Lambda = -2.5$

$$\mu_1^2(0.04, 20) = 0.0125512, \quad \mu_2^2(0.04, 20) = -0.184316, \quad \mu_3^2(0.04, 20) = -0.20498,$$

$$\mu_1^2(0.03, 20) = 0.00306721, \mu_2^2(0.03, 20) = 0.173053, \mu_3^2(0.03, 20) = 0.181399.$$

Проведенный анализ не позволяет сделать строгих заключений о характере устойчивости решения $v_2(\varphi, D)$ на всем интервале $(0, D_2)$ изменения D . Однако, если $\Lambda \in (a, -1)$, то есть основания полагать, что $v_2(\varphi, D)$ на интервале $(0, D_2)$ сохраняет индекс неустойчивости.

Обозначим $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$, $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$, $k = 1, \dots, 6$ непрерывные по D ветви приближенных решений (3.1), отвечающие соответственно в силу (3.2) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (3.3), рожденных в результате седло-узловой бифуркации с номером k . Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от N .

5. Метаустойчивые структуры

В системах (3.3) размерности N согласно проведенному бифуркационному анализу для значений N от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра D . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (3.3) появляются две непрерывные по D ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра D , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (3.3) отвечают в силу (3.2) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (3.1) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (3.1) указанного типа отвечают седло-узловым бифуркациям в системе (3.3). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (3.3) порождают непрерывные по D ветви приближенных стационарных решений (3.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Реализация в системе (3.3) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля максимальной точки спектра ветвей стационарных точек $\pm z^2(D, N)$ на достаточно большом интервале изменения параметра D . Далее для определенности ограничимся анализом бифуркаций седло-узел, связанных с ветвью стационарных точек $z^2(D, N)$. Бифуркации седло-узел указанного типа объединяются в конечные наборы бифуркаций, которые называются далее каскадами седло-узловых бифуркаций.

Рассмотрим один из каскадов, который порождает приближенные решения краевой задачи (3.1) с точками перехода, принадлежащими интервалам $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$ и $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{232})$. Имеет место 4 таких бифуркаций с бифуркационными значениями $D = D_k, k = 1, \dots, 4$, $D_1 > D_2 > \dots > D_4$. Здесь $D_k = D_k(N)$, $k = 1, \dots, 4$. Подчеркнем, что $D_k = D_k(N)$, $k = 1, \dots, 4$, убывают с ростом N . Приведем теперь в качестве иллюстрации для случая $N = 20$ приближенные бифуркационные значения D , соответствующие им координаты

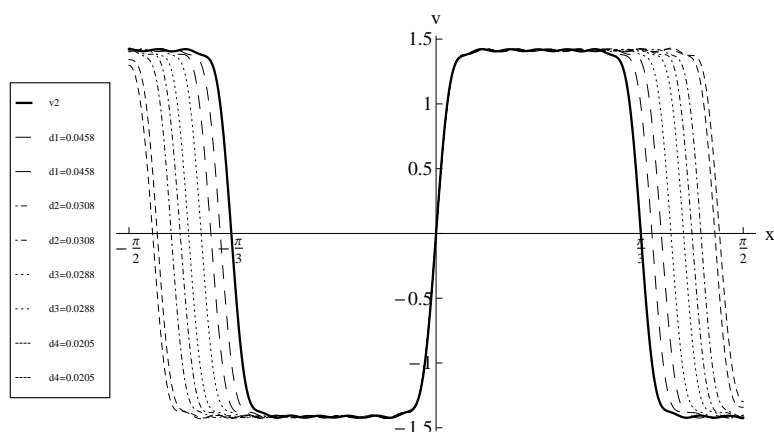
точек и 3 наибольшие точки их спектров:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 0.0458 \\
 &(0, 0.732, 1.089, -0.257, 0.247, -0.0618, 0.0390, -0.00318, \dots) \\
 &\{ \dots, -1.416, -0.835, 0.0000268 \} \\
 &(0, 0.732, 1.088, -0.257, 0.247, -0.0618, > 0.0391, -0.00319, \dots) \\
 &\{ \dots, -1.418, -0.836, -0.0000126 \} \\
 D_2 &= 0.0308 \\
 &(0, 0.233, 1.2554, -0.1455, 0.08995, 0.03952, -0.01025, 0.009543, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.946, -0.642, 0.0000562 \} \\
 &(0, 0.234, 1.2550, -0.1457, 0.08998, 0.03950, -0.01029, 0.009546, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.948, -0.642, -0.0000752 \} \\
 D_3 &= 0.0288 \\
 &(0, 0.128, 1.268, -0.103, 0.0510, 0.0567, -0.01169, 0.00667, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.897, -0.612, 0.0000232 \} \\
 &(0, 0.126, 1.267, -0.105, 0.0521, 0.0564, -0.0118, 0.00677, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.895, -0.609, -0.0000105 \} \\
 D_4 &= 0.0205 \\
 &(0, 0.0963, 1.376, -0.0490, 0.0295, 0.0969, -0.00813, 0.00424, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.808, -0.650, 0.0000844 \} \\
 &(0, 0.103, 1.376, -0.0520, 0.0317, 0.096, -0.00854, 0.00454, \dots) \\
 &\{ \dots, -0.809, -0.650, -0.0000544 \}
 \end{aligned}$$

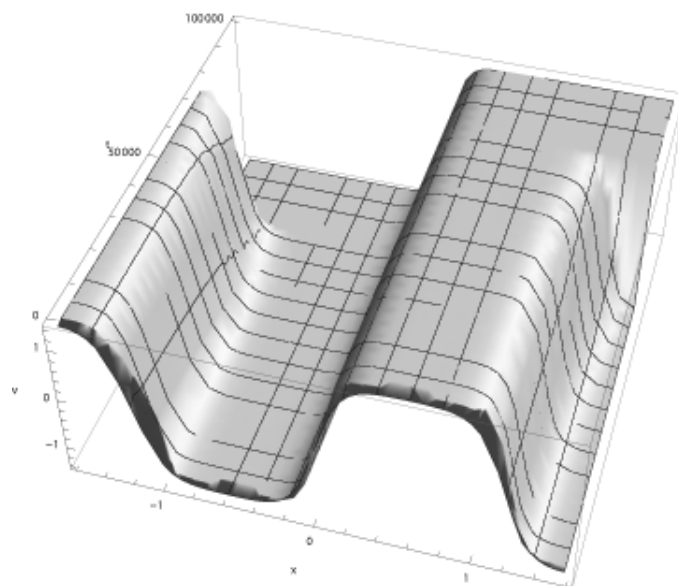
С целью сокращения многоточием обозначены остальные координаты стационарных точек. Устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек, родившиеся в результате седло-узловой бифуркации системы (3.3), расходятся медленно с уменьшением параметра D . Соответственно медленно расходятся и отвечающие им в силу (3.2) непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (3.1).

Приведенным стационарным точкам системы (3.3), где $N = 20$, $D = 0.001$, отвечают приближенные решения задачи (3.1) на рис. 5.

Очевидно, что с помощью преобразований $x \rightarrow -x$, $v \rightarrow -v$ можно получить другие наборы ветвей приближенных решений. Обозначим $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$, $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$, $k = 1, \dots, 4$ непрерывные по D ветви приближенных решений (3.1), отвечающие соответственно в силу (3.2) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (3.3), рожденных в результате седло-узловой бифуркации с номером k . Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от N .

Рис. 5. Приближенные стационарные решения (3.1), $\Lambda = -1.5$, $D = 0.001$

Положим далее $N = 20$. Рассмотрим решения $S_D^t v_2^s$, $S_D^t v_2^u$ уравнения (3.1) с начальными условиями $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$, $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$. Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения $S_D^t v_2^s$, $S_D^t v_2^u$ меняются медленно. Приближенные решения v_2^s , v_2^u порождают метаустойчивые структуры. На рис. 6 представлено решение $S_D^t v_2^s$ уравнения (3.1). Видно, что с течением времени решения $S_D^t v_2^s$ медленно меняются. Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени $S_D^t v_2^s$ оказывается вблизи устойчивого стационарного решения.

Рис. 6. Метаустойчивая структура (3.1), $\Lambda = -1.5$, $D = 0.002$

На рис. 6 показана метаустойчивая структура (3.1) $S_D^t v_2^3$ с начальной функцией v_k^4 .

Заключение

Возникновение метаустойчивых структур в уравнении (3.1) при уменьшении параметра D носит бифуркационный характер. В галёркинских аппроксимациях уравнения (3.1) средних (15–25) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений (3.1). Исследована задача о приближенных стационарных решениях уравнения (3.1) типа переходного слоя с тремя точками перехода. Множество приближенных стационарных решений уравнения (3.1) указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода при увеличении t и при средних значениях параметра D . Последнее означает, что каждая метаустойчивая структура уравнения (3.1) с тремя точками перехода при увеличении t проходит вблизи приближенных стационарных решений (3.1) с одной точкой перехода. При этом речь идет о динамике метаустойчивых структур не только на стадии медленной эволюции, но и в переходной зоне. Как известно из [16], [15], при исследовании метаустойчивых структур задача о приближенных стационарных решениях является ключевой. Установлено, что для решения этой задачи при средних значениях параметра D применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

Список цитируемых источников

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Маллинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2005. — 486 с.
3. *Бабин А. Б., Вилиш М. И.* Атракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
4. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т.46. — №5. — С. 95–111.
5. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. математ. физики, анализа, геометрии — 2005. — Т.1, №1. — С. 3–34.
6. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1994. — Т.31, №3. — С. 467–473.
7. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и матем. физика. — 2004. — Т.140, №1. — С. 4–28.
8. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
9. *Разгулин А. В.* Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики. — М: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс. — 2006. — 152 с.
10. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. — М: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс. — 2008. — 203 с.

11. *Воронцов М. А., Железных Н. И.* Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. — 1990. — Т.2, №2. — С. 31–38.
12. *Железных Н. И.* Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью: дисс. канд. физ.-мат. наук 05.13.16. — М., 1991.
13. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
14. *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Моск. ун-та, серия 15, вычисл. матем. и киберн. — 2003. — №2. — С. 13–20.
15. *Carr J., Pego R.L.* Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$. // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.
16. *Fusco G., Hale J.K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations, Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. I, No.1. — P. 75–94.
17. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physika D. — 1999. — Vol.125. — P. 123–141.
18. *Hazova Yu.* Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with the reflection of the spatial variable, The fourth international conference «Nonlinear dynamics-2013». — June, 19-22, 2013, Sevastopol. — P. 253–259.

Получена 08.12.2014