

УДК 517.984:517.958

Об одной спектральной задаче для газожидкостной системы в цилиндрическом контейнере в условиях слабой гравитации

Э. Л. Газиев

Крымский инженерно-педагогический университет,
Симферополь, 295015. E-mail: egaziev@list.ru

Аннотация. В статье рассматривается спектральная задача, возникающая в проблеме малых собственных колебаний идеальной капиллярной жидкости и стратифицированного по плотности газа, заполняющих круговой цилиндрический сосуд в условиях слабой гравитации. Получено характеристическое уравнение и собственные функции задачи с горизонтальной границей раздела сред.

Ключевые слова: собственные колебания, капиллярная жидкость, газ, стратификация, спектральная задача, характеристическое уравнение.

Введение

При изучении эволюционных проблем гидромеханики невесомости возникают спектральные задачи, в которых спектральный параметр присутствует как в уравнении задачи, так и в граничном условии (см., например, монографии [1], [2], [11], [20]). Для таких задач широко используются прямые методы решения, в частности, проекционные, основанные на вариационном подходе [3], [12]–[18]. В работе [5] (см. также [19]) в общей постановке с помощью методов функционального анализа была изучена проблема малых движений гидродинамической системы, состоящей из экспоненциально стратифицированного по плотности газа и несжимаемой идеальной жидкости в ограниченном сосуде, находящемся в условиях слабого гравитационного поля.

В дальнейшем аналогичная проблема для случая горизонтальной границы раздела сред была исследована в статье [6]. Отметим, что в этой работе рассматривался сосуд произвольного поперечного сечения. В работе [7] была решена ассоциированная с ней задача статики о нахождении равновесного состояния гидросистемы. Заметим, что в общем случае граница сопряжения даже в состоянии покоя является криволинейной (например, см. [7]–[9]), и это значительно усложняет процесс исследования таких проблем.

Отметим, что для решения подобных задач используются и другие методы. Например, в статье [21] в предположениях синусоидального закона изменения колебаний, потенциальности гравитационного поля и постоянных физических характеристик несжимаемой жидкости с использованием метода малых возмущений решение отыскивалось из системы алгебраических уравнений 7-го порядка. В работе [24], рассматривая проблему для системы "идеальная жидкость–воздух" в цилиндрическом сосуде, авторы также использовали разложение решения по малому параметру. Для нахождения равновесных состояний системы "вязкая капиллярная жидкость–воздух" в стеклянной капиллярной трубке в работе [22] применялся численный метод Галеркина и использовались экспериментальные данные для нахождения кривизны равновесной дуги. Метод Галеркина применялся и для отыскания дуги смачивания в двумерной задаче в статье [23].

Возвращаясь к упомянутым выше статьям [8]–[9], отметим, что в них рассмотрен случай прямоугольного канала, построено характеристическое уравнение и найдены координатные функции для проекционного метода решения спектральной задачи для произвольной границы сопряжения.

В настоящей работе рассматривается спектральная проблема, порождаемая задачей о собственных колебаниях системы "идеальная жидкость–баротропный газ" в случае кругового цилиндрического контейнера в условиях малой гравитации и выводятся характеристическое уравнение для нахождения спектрального параметра и формулы для собственных функций задачи.

1. Постановка проблемы и основные предположения

В цилиндрической системе координат $Or\varphi z$ рассмотрим цилиндрический контейнер Ω , поперечное сечение K которого является кругом радиуса l . Будем считать, что нижнее днище $\tilde{\Gamma}_1$ и верхнее днище $\tilde{\Gamma}_2$ лежат в плоскостях $z = -\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_1 > 0$, и $z = \tilde{h}_2$, $\tilde{h}_2 > 0$, соответственно. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ — горизонтальную равновесную поверхность, которая разделяет среды в состоянии покоя. Будем считать, что она лежит в плоскости $z = 0$. Тогда в состоянии статического равновесия жидкость занимает область $\tilde{\Omega}_1$, ограниченную поверхностью $\tilde{\Gamma}$, частью $\tilde{S}_1 \subset \tilde{S}$ твердой боковой стенки \tilde{S} и нижним днищем $\tilde{\Gamma}_1$ контейнера, а газ расположен в области $\tilde{\Omega}_2$, ограниченной поверхностью $\tilde{\Gamma}$, частью $\tilde{S}_2 \subset \tilde{S}$ стенки, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$, и верхним днищем $\tilde{\Gamma}_2$.

Будем считать, что контейнер заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ и баротропным газом. Предположим также, что гравитационное поле с ускорением $\mathbf{g} = -\beta g_0 \mathbf{e}_z$ действует вдоль оси Oz сверху вниз, \mathbf{e}_z — орт оси Oz , g_0 — ускорение свободного падения, β — коэффициент перегрузки.

Выберем в качестве характерного размера радиус l круга K и перейдем к безразмерным переменным. Как показано в работе [5] (см. также [19]) баротропный газ является экспоненциально стратифицированным, и его равновесная плотность изменяется по закону $\rho_{2,0} := \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0) \exp(-2\varepsilon z)$, $\varepsilon := \beta g_0 l / (2a^2)$, где $a^2 = \text{const}$ — квадрат скорости звука в газе. Тогда для проблемы малых собственных колебаний гидросистемы получаем следующую спектральную задачу в терминах потенциалов смещений частиц $\Phi_1 := \Phi_1(r, \varphi, z)$ в жидкости и $\Phi_2 := \Phi_2(r, \varphi, z)$ в газе в безразмерной форме:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{|r|=1, -h_1 < z < 0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{|r| \leq 1, z = -h_1} = 0, \quad (1.1)$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda \alpha^2 \Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{|r|=1, 0 < z < h_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{|r| \leq 1, z = h_2} = 0, \quad (1.2)$$

с кинематическим и динамическим условиями на $\Gamma : \{|r| \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0\}$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} =: \zeta \quad (\text{при } |r| \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0),$$

$$B_\sigma \zeta := -\Delta_\Gamma + (B_0 - b_0)\zeta = \lambda(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2), \quad (\text{при } |r| \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \quad (\text{при } |r| = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0), \quad (1.4)$$

и условиями нормировки

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \int_{\Gamma} \Phi_2 d\Gamma = 0. \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $\zeta = \zeta(r, \varphi)$ — отклонение от равновесной поверхности Γ в точке (r, φ) вдоль \mathbf{e}_3 ,

$$\Delta_{\Gamma} := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{1.6}$$

$$\Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}(z) \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{1.7}$$

$$h_1 := \frac{\tilde{h}_1}{l}, h_2 := \frac{\tilde{h}_2}{l}, \lambda := \frac{\rho_1 \omega^2 l^3}{\sigma}, \alpha^2 := \frac{\sigma}{\rho_1 l a^2}, B_0 := \frac{\beta \rho_1 g_0 l^2}{\sigma}, b_0 := \frac{\beta \rho_{2,0}(0) g_0 l^2}{\sigma}. \tag{1.8}$$

Следуя [5] с учетом (1.3)–(1.4) (см. также [6]), можно показать, что оператор B_{σ} положительно определен в пространстве $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus 1_{\Gamma}$, и собственные значения задачи (1.1)–(1.8) положительны, дискретны и могут быть вычислены как значения отношения

$$\frac{\int_{\Omega_1} \rho_1 |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}{\alpha^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma} [(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) (B_{\sigma}^{-1}(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2)) d\Gamma]} \tag{1.9}$$

на функциях $(\Phi_1; \Phi_2) \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$, удовлетворяющих второму и третьему условиям нормировки из (1.5).

2. Вывод характеристического уравнения и анализ результатов

Цилиндричность области позволяет применить метод разделения переменных и искать решение задачи (1.1)–(1.8) в виде

$$\Phi_1(r, \varphi, z) = R(r)\Theta(\varphi)Z_1(z), \quad \Phi_2(r, \varphi, z) = R(r)\Theta(\varphi)Z_2(z). \tag{2.1}$$

Тогда из (1.1) приходим к следующим спектральным задачам

$$\Theta''(\varphi) + m^2 \Theta(\varphi) = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi), \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi), \tag{2.2}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + r^2 \mu R(r) = m^2 R(r) \quad (r \in \mathbb{R}_+), \quad R'(r)|_{r=1} = 0. \tag{2.3}$$

$$Z_1''(z) - \mu Z_1(z) = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad Z_1'(z)|_{z=-h_1} = 0. \tag{2.4}$$

Периодическое решение задачи (2.2) имеет вид

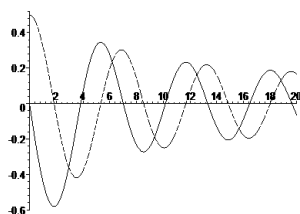
$$\Theta_m(\varphi) = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi, \tag{2.5}$$

а ограниченное в точке $r = 0$ частное решение задачи Неймана для уравнения Бесселя (2.3) имеет вид

$$R_m(\varphi) = J_m(\mu_m r), \tag{2.6}$$

Таблица 1. Собственные значения $\mu_{m,k}$ спектральной задачи в поперечном сечении цилиндра

k	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
0	3,831706	1,841184	3,054237	4,201189	5,317553	6,415616	7,501266
1	7,015587	5,331443	6,706133	8,015237	9,282396	10,519861	11,734936
2	10,173468	8,536316	9,969468	11,345924	12,681908	13,987189	15,268181
3	13,323692	11,706005	13,170371	14,585848	15,964107	17,312842	18,637443
4	16,470630	14,863589	16,347522	17,788748	19,196029	20,575515	21,931715
5	19,615859	18,015528	19,512913	20,972477	22,401032	23,803581	25,183926
6	22,760084	21,164370	22,671582	24,144897	25,589760	27,010308	28,409776
7	25,903672	24,311327	25,826037	27,310058	28,767836	30,202849	31,617876
8	29,046829	27,457051	28,977673	30,470269	31,938539	33,385444	34,813393
9	32,189680	30,601923	32,127327	33,626949	35,103917	36,560778	37,999641

Рис. 1. Функции $J_0(\mu_{0,k}r)$ (сплошная линия) и $J_1(\mu_{1,k}r)$ (пунктирная линия).

где собственные значения $\mu_m = \mu_{m,k}$, $k = 1, 2, \dots$, спектральной задачи в поперечном сечении цилиндра являются нулями производной функции Бесселя первого рода m -го порядка и представлены в таблице 1.

На рис. 1, 2, 3 представлено расположение корней второго уравнения (2.3). Анализ поведения корней показывает, что для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$, их счетное количество, они положительны и при увеличении номера m значения $\mu_{m,k} \sim (k+m/2)\pi$ (для комплексных корней аналогичный результат приведен в [4], о вычислении корней см. также [10] и [16]).

Что же касается задачи (2.4), то ее частное решение равно

$$Z_{1,m,k}(z) = c_1 \cosh \sqrt{\mu_{m,k}(z + h_1)}, \quad (2.7)$$

и, следовательно, в области Ω_1 решением является счетный набор функций

$$\Phi_{1,m,k}(z) = c_1(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) J_m(\mu_{m,k}r) \cosh \sqrt{\mu_{m,k}(z + h_1)}. \quad (2.8)$$

Теперь перейдем к решению спектральной задачи в области Ω_2 . Из уравнения (1.2) с учетом (1.7) получаем, что

$$-\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - 2\varepsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2}\right) = \lambda \alpha^2 \Phi_2, \quad (2.9)$$

откуда в силу и предыдущих выкладок приходим к задаче для $Z_2(z)$:

$$-\left(Z_2'' - 2\varepsilon Z_2'\right) + \mu_{m,k} Z_2 = \lambda_{m,k} \alpha^2 Z_2 \quad (0 < z < h_2), \quad Z_2'(z)|_{z=h_2} = 0, \quad (2.10)$$

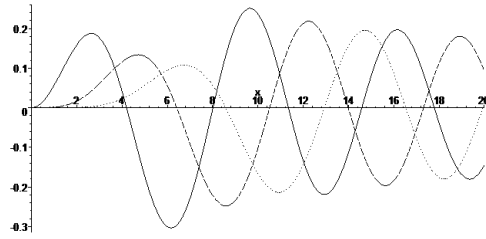


Рис. 2. Функции $J_3(\mu_{3,k}r)$ (сплошная линия), $J_5(\mu_{5,k}r)$ (пунктирная линия), $J_7(\mu_{7,k}r)$ (точечная линия).

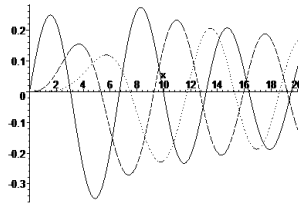


Рис. 3. Функции $J_2(\mu_{2,k}r)$ (сплошная линия), $J_4(\mu_{4,k}r)$ (пунктирная линия), $J_6(\mu_{6,k}r)$ (точечная линия).

$$Z'_1(z)|_{z=0} = Z'_2(z)|_{z=0} = \eta, \quad \lambda_{m,k}(B_\sigma)\eta = \lambda_{m,k}(\rho_1 Z_1(0) - \rho_{2,0}(0) Z_2(0)), \quad (2.11)$$

$$\lambda_{m,k}(B_\sigma) := (\mu_{m,k} + (B_0 - b_0)) > 0. \quad (2.12)$$

Следуя методике, изложенной в [6], будем искать общее решение уравнения (2.10) в виде

$$Z_2(z) = \exp(\varepsilon z)[c_2 \cos(\gamma_{m,k}z) + c_3 \sin(\gamma_{m,k}z)], \quad \gamma_{m,k}^2 := \lambda_{m,k}\alpha^2 - \mu_{m,k} - \varepsilon^2, \quad (2.13)$$

где c_2 и c_3 — произвольные постоянные, искомым является также спектральный параметр λ (или связанный с ней вспомогательный параметр γ), параметр ε определен в п. 1. Тогда с учетом граничного условия (2.10), а также условий (2.11), приходим к следующей системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned} c_2(\varepsilon \cos(\gamma_{m,k}h_2) - \gamma_{m,k} \sin(\gamma_{m,k}h_2)) + c_3(\varepsilon \sin(\gamma_{m,k}h_2) + \gamma_{m,k} \cos(\gamma_{m,k}h_2)) &= 0 \\ c_1\sqrt{\mu_{m,k}} \sinh(\sqrt{\mu_{m,k}}h_1) - c_2\varepsilon - c_3\gamma_{m,k} &= 0 \\ c_1(\lambda_{m,k}(B_\sigma)\sqrt{\mu_{m,k}} \sinh(\sqrt{\mu_{m,k}}h_1) - \lambda_{m,k}\rho_1 \cosh(\sqrt{\mu_{m,k}}h_1)) + c_2\lambda_{m,k}\rho_{2,0}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда в силу нетривальности искомого решения приходим к выводу, что определитель системы (2.14) должен быть равен нулю, и таким образом приходим к характеристическому уравнению для вычисления вспомогательного спектрального параметра $\gamma_{m,k}$ (а

потому и спектрального параметра $\lambda_{m,k}$):

$$\varepsilon + \gamma_{m,k} \cot(\gamma_{m,k} h_2) = \left(-\frac{\alpha^2 \lambda_{m,k} (B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_{m,k}^2 + \varepsilon^2 + \gamma_{m,k}^2)} + \frac{\rho_1 \coth(\sqrt{\mu_{m,k}} h_1)}{\rho_{2,0}(0)\sqrt{\mu_{m,k}}} \right) (\varepsilon^2 + \gamma_{m,k}^2). \quad (2.15)$$

Графическое исследование характеристического уравнения (2.15) показало, что для каждого m и k имеет оно имеет счетное множество корней $\{\gamma_{m,k,p}\}$. Корни, принадлежащие отрезку $(0, \pi)$ ($p = 0$) отвечают поверхностным волнам, а остальные ($p > 1$) — внутренним волнам в газе.

Таблица 2. Значения вспомогательного спектрального параметра $\gamma_{m,k,p}$

m	k	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6
0	0	0,03125	1,57142	4,71260	7,85411	10,99566	14,13724	17,27882
0	1	0,03636	1,57164	4,71267	7,85415	10,99569	14,13726	17,27884
0	2	0,03989	1,57181	4,71273	7,85419	10,99572	14,13728	17,27885
0	3	0,04267	1,57196	4,71278	7,85421	10,99574	14,13730	17,27887
0	4	0,04499	1,57209	4,71282	7,85424	10,99576	14,13731	17,27888
0	5	0,04699	1,57220	4,71286	7,85426	10,99578	14,13732	17,27889
1	0	0,02592	1,57122	4,71253	7,85407	10,99564	14,13721	17,27880
1	1	0,03395	1,57153	4,71263	7,85413	10,99568	14,13725	17,27882
1	2	0,03818	1,57173	4,71270	7,85417	10,99571	14,13727	17,27884
1	3	0,04131	1,57188	4,71275	7,85420	10,99573	14,13729	17,27886
1	4	0,04385	1,57202	4,71280	7,85423	10,99575	14,13730	17,27887
1	5	0,04600	1,57215	4,71284	7,85425	10,99577	14,13732	17,27888
2	0	0,02952	1,57135	4,71257	7,85409	10,99565	14,13723	17,27881
2	1	0,03595	1,57162	4,71266	7,85415	10,99569	14,13726	17,27883
2	2	0,03970	1,57180	4,71272	7,85418	10,99572	14,13728	17,27885
2	3	0,04255	1,57195	4,71277	7,85421	10,99574	14,13730	17,27886
2	4	0,04490	1,57208	4,71281	7,85424	10,99576	14,13731	17,27888
2	5	0,04693	1,57220	4,71286	7,85426	10,99578	14,13732	17,27889
3	0	0,02952	1,57135	4,71257	7,85409	10,99565	14,13723	17,27881
3	1	0,03595	1,57162	4,71266	7,85415	10,99569	14,13726	17,27883
3	2	0,03970	1,57180	4,71272	7,85418	10,99572	14,13728	17,27885
3	3	0,04255	1,57195	4,71277	7,85421	10,99574	14,13730	17,27886
3	4	0,04490	1,57208	4,71281	7,85424	10,99576	14,13731	17,27888
3	5	0,04693	1,57220	4,71286	7,85426	10,99578	14,13732	17,27889

В таблице 2 представлены полученные численно значения вспомогательного спектрального параметра $\gamma_{m,k,p}$ (для значений геометрических и физических параметров $h_1 = h_2 = 100\text{см}$, $l = 50\text{см}$, $\rho_1 = 1\text{г/см}^3$, $\rho_{2,0}(0) = 0,001\text{г/см}^3$, $\sigma = 495$, $\beta = -10^{-4}$, $\varepsilon = -0,225 \cdot 10^{-8}$, $g_0 = 981\text{см/с}^2$). Анализ этих результатов показывает, что при фиксированных значениях m и k при увеличении p абсолютная погрешность быстро уменьшается до 10^{-5} , значение $\gamma_{m,k,p}$ "стабилизируется". С увеличением m скорость стабилизации улучшается.

3. Выводы

Таким образом в данной работе для спектральной задачи, ассоциированной с проблемой собственных колебаний идеальной жидкости и стратифицированного по плотности газа, заполняющих круговой цилиндр в условиях малой гравитации и предположении о горизонтальности поверхности раздела сред, получено характеристическое уравнение, позволяющее численно найти значения спектрального параметра и выписать собственные функции. Эти функции могут быть выбраны в качестве пробных функций метода Рунге для аналогичной задачи с криволинейной границей сопряжения.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИ-АЙПИ, 2014. — 276 с.
2. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.
3. *Барняк М. Я., Лещук О. П.* Проекційний метод розв'язування задачі про власні коливання в'язкої рідини в циліндрі з урахуванням поверхневого натягу // Акустичний вісник. — 2008. — Т.11, №.3. — С. 3–12.
4. *Бурский В. П., Куракина И. И.* Общая эквивариантная смешанная задача для уравнения теплопроводности в круговом цилиндре // Труды Ин-та прикладной матем. и механики. — 2012. — Т.24. — С. 25–36.
5. *Газиев Э. Л., Копачевский Н. Д.* Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ" // Украинский матем. вестник. — 2013. — Т.10, №1. — С. 16–53.
6. *Газиев Э. Л.* Собственные колебания гидросистемы "жидкость–газ" в цилиндрической области // Динамические системы. — 2012. — Т. 2(30), No.1–2. — С. 3–22.
7. *Газиев Э. Л.* Задача статики гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости // Труды Ин-та прикладной матем. и механики. — 2010. — Т.20. — С. 39–47.
8. *Газиев Э. Л.* Спектральная задача с условиями сопряжения на криволинейной границе // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Серия "Физико-матем. науки". — 2014. — Т.27(66), No.1. — С. 45–57.
9. *Газиев Э. Л., Копачевский Н. Д., Ситшаева З. З.* Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы "капиллярная жидкость–газ" // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), No.1–2. — С. 9–18.
10. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. — М.: Советское Радио, 1956. — 640 с.
11. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
12. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 7–10.
13. *Луковский И. А., Барняк М. Я.* Модифікація варіаційного методу розв'язку задач про власні коливання рідини в похилому циліндрі // Доповіді НАН України. — 1997. — No.5. — С. 62–66.
14. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — К.: Наукова думка, 1984. — 229 с.
15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
16. *Скорыходов С. Л.* Алгоритмы вычисления цилиндрических функций Бесселя и их нулей в комплексной плоскости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. — М., 1984.
17. *Вагпуак М. Ya.* Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form // Ukrainian Math. Journal. — 2005. — Vol.57, No.12. — P. 1853–1869.

18. *Gavrilyuk I. P., Lukovsky I. A., Makarov V. L., Timokha A. N.* Evolutional problems of the contained fluid. — К.: Ін-т математики НАН України, 2006. — Vol.58. — 233 p.
19. *Gaziev E. L., Kopachevsky N. D.* Small motions and eigenoscillations of a "fluid-barotropic gas" hydrosystem // *Journal of Math. Sciences.* — 2013. — Vol.192, No.4. — P. 389–416.
20. *Myshkis A. D., Babckii V. G., Kopachevsky N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-Gravity Fluid Mechanics. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1987. — 583 pp.
21. *Hegde M. G., Slattery J. C.* Capillary Waves at a Gas-Liquid Phase Interface // *Journal of Colloid and Interface Science.* — 1975. — Vol. 35, No.2 — P. 183–203.
22. *Hoffman R. L.* A Study of the Advancing Interface // *Journal of Colloid and Interface Science.* — 1975. — Vol. 50, No 2. — P. 228–241.
23. *Ransohoff T. C., Radke C. J.* Laminar Flow of a Wetting Liquid along the Corners of a Predominantly Gas-Occupied Noncircular Pore // *Journal of Colloid and Interface Science.* — 1988. — Vol.121, No.2. — P. 392–401.
24. *Davoust L., Picard C.* Ageing of a gas/liquid interface elongated by standing waves // *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects.* — 2005. — Vol. 270–271. — P. 182–188.

Получена 20.11.2014