Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 109–120

УДК 517.9

Умови біфуркації розв'язку крайової задачі

Т. В. Шовкопляс
Київський національний університет ім. Тараса Шевченко
Київ 03022. *E-mail: from_ Tatyana@ukr.net*

Анотація. Вивчається питання розв'язності лінійної неоднорідної крайової задачі зі збуренням для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка не завжди є розв'язною, за умови, що її породжуюча крайова задача не має розв'язків при довільних неоднорідностях. На основі встановленого взаємозв'язку між розглядуваною крайовою задачею зі збуренням та алгебраїчною системою, коефіцієнти якої складаються з коефіцієнтів неоднорідної крайової задачі зі збуренням, знайдено умову розв'язності розглядуваної крайової задачі, при виконанні якої крайова задача зі збуренням матиме хоча б один розв'язок, який має вигляд частини збіжного ряду Лорана.

Ключові слова: крайова задача зі збуренням, породжуюча крайова задача, критерій розв'язності, критичний випадок, біфуркація розв'язку, алгебраїчна система.

1. Вступ. Постановка задачі

Питання встановлення умов розв'язності та відшукання розв'язків різних типів крайових задач є актуальним впродовж тривалого часу. Вивченню різних аспектів розглядуваного питання присвячено багато наукових робіт. Нетерові крайові задачі розглядалися та досліджувалися в роботах [4]. Вивченню автономних крайових задач присвячено роботи [3, 9, 10, 11]. Слабконелінійні крайові задачі наведено в [3]. Вивчення умов розв'язності крайових задач зі збуренням для систем лінійних диференціальних рівнянь I-го порядку розглянуто в [1, 2, 8, 16]. Вироджені крайові задачі, умови їх розв'язності, біфуркації та розгалудження розв'язків розглянуто в [17]. Умови розв'язності слабкозбурених крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку встановлено в [13, 15].

У даній роботі розглядається лінійна неоднорідна крайова задача зі збуренням

$$(P(t)x')' - Q(t)x - \varepsilon Q_1(t)x = f(t), \;\; t \in [a, b], \tag{1.1}$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 x(\cdot, \varepsilon). \tag{1.2}$$

Тут $[a, b]$ – відрізок, на якому розглядається лінійна крайова задача зі збуренням (1.1), (1.2), $x = x(t, \varepsilon)$ — n-вимірна двічі неперервно диференційовна шукана векторна функція: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2([a, b])$, $x'(\cdot, \varepsilon)$, $x''(\cdot, \varepsilon) \in C^2([a, b] \times (0, \varepsilon_0])$. $P(t)$, $Q(t)$, $Q_1(t)$ — квадратні $(n \times n)$– вимірні дійсні матриці-функції. Елементи матриці $P(t)$ є дійсні, неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$ функції: $P(t) \in C^1([a, b])$; елементи матриць $Q(t)$ та $Q_1(t)$ є неперервними на відрізку $[a, b]$: $Q(t), Q_1(t) \in C([a, b])$. Матриця $P(t)$ є невиродженою: $\det P(t) \neq 0$. $f(t)$ — n-вимірна неперервна на відрізку $[a, b]$ вектор-функція: $f(t) \in C([a, b])$. l, l_1 — лінійні обмежені m-вимірні векторні функціонали, визначені на просторі n-вимірних кусково-неперервних векторних функцій: l, l_1:$C([a, b]) \to R^m$. α — m-вимірний дійсний вектор: $\alpha \in R^m$; ε — малий невід'ємний параметр.

Крайова задача зі збуренням (1.1), (1.2) має породжуючу крайову задачу:

$$(P(t)x')' - Q(t)x = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1.3}$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \tag{1.4}$$

Система диференціальних рівнянь другого порядку (1.3) має загальний розв'язок вигляду: $x(t) = X(t)c + \bar{x}(t), \quad c \in R^{2n}$, де $X(t)$ — $(n \times 2n)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної системи другого порядку (1.3), яка складається з $2n$-лінійно незалежних розв'язків однорідної ($f(t) = 0$) системи (1.3); вектор-функція $\bar{x}(t) = \int_a^b K(t, s)P^{-1}(s)f(s)ds$ є частинним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.3); $K(t, s)$-$(n \times n)$-вимірна матриця Коші [14, 15]. У результаті дії лінійного m-вимірного функціоналу l на фундаментальну матрицю $X(t)$ утворюється $(m \times 2n)$-вимірна прямокутна матриця D, $\operatorname{rank} \mathrm{D} = n_1$, $n_1 < \min(2n, m)$. Матриця D^* є транспонованою до матриці D. $(2n \times m) -$ вимірна матриця D^+ є псевдоберненою за Муром-Пенроузом до матриці D [2, 6].

Через P_D і P_{D^*} позначимо $(2n \times 2n)$- і $(m \times m)$-вимірні матриці-ортопроектори, які проектують простори R^{2n} і R^m на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ відповідно: $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D^*) = P_{D^*} R^m$. Матриця $N(D)$ має розмірність r: $\dim N(D) = 2n\text{-rank } \ D = 2n - n_1 = r$, а матриця $N(D^*)$ має розмірність d: $\dim N(D^*) = m - \text{rank } \ D = m - n_1 = d$. Звідки $\operatorname{rank} P_D = r$, а $\operatorname{rank} P_{D^*} = d$. Тобто, матриця P_D складається з r лінійно незалежних стовпчиків, а матриця P_{D^*} складається з d лінійно незалежних рядків. Отже, $(2n \times 2n)$-вимірну матрицю P_D можна замінити $(2n \times r)$-вимірною матрицею P_{D_r}, що складається з r лінійно незалежних стовпчиків матриці P_D; $(m \times m)$-вимірну матрицю P_{D^*} можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$, яка складається з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*} [2].

Для породжуючої крайової задачі (1.3), (1.4) має місце твердження [14].

Теорема 1 (**Критичний випадок).** *Нехай виконується умова* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min\{2n, \ m\}$. *Тоді однорідна* ($f(t) = 0, \ \alpha = 0$) *крайова задача* (1.3), (1.4) *має* r, $(r = 2n - n_1)$ *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків.*

Неоднорідна крайова задача (1.3), (1.4) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли векторфункція* $f(t) \in C([a, b])$ *і сталий вектор* $\alpha \in R^m$ *задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = 0, \quad (d = m - n_1). \tag{1.5}$$

При виконанні цих умов крайова задача (1.3), (1.4) *має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків* $x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f])(t) + X(t)D^+\alpha$, $t \in [a, b]$, $\quad \forall \, c_r \in R^r$, *де* $X_r(t)$*–*$(n \times r)$*-вимірна матриця, стовпчики якої утворюють повну систему* r *лінійно незалежних розв'язків однорідної системи другого порядку* (1.3)*:* $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$*;* P_{D_r}*–*$(2n \times r)$*-вимірна матриця-ортопроектор, яка складається з* r *лінійно незалежних стовпчиків матриці* P_D*;* c_r*–довільний вектор-стовпчик з простору* R^r*;* $(G[f])(t)$, $t \in [a, \ b]$, *– узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію* $f(t) \in C([a, \ b])$*:*

$$(G[f])(t) \overset{def}{=} \int_a^b K(t, s)P^{-1}(s)f(s)ds - X(t)D^+ l \int_a^b K(\,\cdot\,, s)P^{-1}(s)f(s)ds.$$

Необхідно визначити, чи існують умови, при виконанні яких крайова задача зі збуренням (1.1), (1.2) буде розв'язною, при умові, що її породжуюча крайова задача (1.3), (1.4) розв'язків не має.

2. Умови біфуркації розв'язку крайової задачі

Розглядається випадок, коли породжуюча крайова задача (1.3), (1.4) не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b])$ та $\alpha \in R^m$, тобто, має місце критичний випадок ($\operatorname{rank} D = n_1 < n$) і в силу довільного вибору неоднорідностей $f(t) \in C([a,b])$ та $\alpha \in R^m$ критерій розв'язності (1.5) для породжуючої крайової задачі (1.3), (1.4) не виконується.

У публікації [15] розглянуто лінійну неоднорідну крайову задачу зі збуренням (1.1), (1.2) у випадку, коли її породжуюча крайова задача ($\varepsilon = 0$) (1.3), (1.4) не має розв'язків. Тоді для розглядуваної крайової задачі за допомогою $(d \times r)$-вимірної матриці

$$B_0 := P_{D_d^*}\{l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)X_r(s)ds\}, \tag{2.1}$$

побудованої за допомогою коефіцієнтів задачі (1.1), (1.2), були встановлені умова розв'язності та умова єдиності розв'язку, який має вигляд збіжного ряду Лорана при $k = -1$.

P_{B_0} — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0}{:}R^r \to N(B_0)$; B_0^* — $(r \times d)$-вимірна матриця, спряжена до матриці B_0, $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0^*}{:}R^d \to N(B_0^*)$; $(r \times d)$-вимірна матриця B_0^+ є псевдооберненою за Муром-Пенроузом до матриці B_0 [15].

У роботі [12] розглядалися умови біфуркації розв'язку імпульсної крайової задачі, у випадку, коли умова $P_{B_0^*} = 0$ не виконувалася. Тоді була побудована $(d \times r)$-вимірна матриця B_1:

$$B_1 := P_{D_d^*}\{l_1 G_1(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_1(s)ds\}, \tag{2.2}$$

де $(n \times r)$-вимірна матриця $G_1(t)$ є такою:

$$G_1(t) = (G[Q_1(s)X_r(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 X_r(\cdot). \tag{2.3}$$

B_1^* — $(r \times d)$-вимірна матриця, транспонована до матриці B_1; P_{B_1} — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує r-вимірний евклідів простір R^r на нуль-простір $N(B_1)$ матриці B_1; $P_{B_1^*}$ – $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує d-вимірний евклідів простір R^d на нуль-простір $N(B_1^*)$ матриці B_1^*.

У роботі [12] за допомогою матриць B_0 та B_1 були знайдені умови біфуркації розв'язку розглядуваної імпульсної крайової задачі. Встановлено, що при виконанні умови $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ розглядувана імпульсна крайова задача розв'язна і має розв'язок у вигляді збіжного ряду Лорана при $k = -2$.

У даній роботі розглядається випадок, коли умови $P_{B_0^*} = 0$, $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$ не виконуються. Тому побудовано $(d \times r)$-вимірну матрицю $\overline{B_1} := -P_{B_0^*}B_1 P_{B_0}$, при виконанні певних умов на яку, задача (1.3), (1.4) буде розв'язною. У цьому випадку розв'язок крайової задачі (1.3), (1.4) шукається за допомогою методу Вішика-Люстерника [5] у вигляді частини збіжного ряду Лорана при $k = -3$.

Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай породжуюча крайова задача* (1.3), (1.4) *при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C([a,b])$ *та* $\alpha \in R^m$ *не має розв'язків та для крайової задачі зі збуренням* (1.1), (1.2) *виконані умови* $P_{B_0^*} \neq 0$, $P_{B_1^*} P_{B_0^*} \neq 0$.

Тоді крайова задача зі збуренням (1.1), (1.2) *розв'язна, якщо виконується умова*

$$P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} = 0 \tag{2.4}$$

та її розв'язок при достатньо малій фіксованій величині $\varepsilon \in (0\,, \varepsilon_0]$ *має вигляд частини збіжного ряду Лорана:*

$$x(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=-3}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \tag{2.5}$$

коефіцієнти x_k, $k \geq -3$, *ряду* (2.5) *шукаються з відповідних крайових задач, утворених після підстановки в задачу* (1.1), (1.2) *ряду* (2.5) *та прирівняння відповідних коефіцієнтів при кожному зі степенів* ε.

Доведення. Підставимо ряд (2.5) в задачу (1.1), (1.2), і тоді при кожному степені ε отримаємо відповідну крайову задачу.

При ε^{-3} маємо однорідну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-3})' - Q(t)x_{-3} = 0, \quad t \in [a,b], \quad l\,x_{-3}(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{2.6}$$

За теоремою 1 крайова задача (2.6) завжди розв'язна і має r-параметричну сім'ю розв'язків:

$$x_{-3}(t) = X_r(t)c_{-2}, \quad c_{-2} \in R^r, \tag{2.7}$$

c_{-2}-довільний r-вимірний вектор, який буде знайдено з умови розв'язності крайової задачі при ε^{-2}.

При ε^{-2} маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-2})' - Q(t)x_{-2} = Q_1(t)x_{-3}, \quad t \in [a,b], \tag{2.8}$$

$$l\,x_{-2}(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-3}(\cdot, \varepsilon).$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності неоднорідної крайової задачі (2.8) є такою:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_{-3}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) x_{-3}(s) ds \right\} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{2.9}$$

Підставивши в (2.9) значення вектора $x_{-3}(t, c_{-2})$, виражене рівністю (2.7), отримаємо:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) X_r(s) ds \right\} c_{-2} = 0. \tag{2.10}$$

Враховуючи позначення (2.1), з (2.10) отримаємо алгебраїчну систему:

$$B_0 c_{-2} = 0. \tag{2.11}$$

Алгебраїчна система (2.11) завжди розв'язна, її розв'язком є r-вимірний вектор:

$$c_{-2} = P_{B_0} c_{-2r}, \; c_{-2r} \in R^r. \tag{2.12}$$

Підставивши (2.12) в (2.7), отримаємо r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.6):

$$x_{-3}(t) = X_r(t)P_{B_0}c_{-2r}, \quad c_{-2r} \in R^r. \tag{2.13}$$

За теоремою 1 крайова задача (2.8) має r-параметричну множину розв'язків:

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X(t)c_{-1} + (G[Q_1(s)x_{-3}(s)])(t) + X(t)D^+l_1x_{-3}(\cdot,\varepsilon), \ \ c_{-1} \in R^r. \tag{2.14}$$

Підставимо (2.13) в (2.14), тоді r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.8), матиме вигляд:

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X(t)c_{-1} + G_1(t)P_{B_0}c_{-2r}, \quad c_{-1} \in R^r, \tag{2.15}$$

де матриця $G_1(t)$ має вигляд (2.3).

Невідомий вектор c_{-1} буде знайдено на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі, утвореної при ε^{-1}.

При ε^{-1} маємо крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-1})' - Q(t)x_{-1} = Q_1(t)x_{-2}, \quad t \in [a,b], \tag{2.16}$$

$$l\,x_{-1}(\cdot,\varepsilon) = l_1x_{-2}(\cdot,\varepsilon).$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності крайової задачі (2.16) є такою:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1x_{-2}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{-2}(s)ds\right\} = 0, \ \ d = m - n_1. \tag{2.17}$$

Підставимо (2.15) в (2.17), звідки, враховуючи позначення (2.1) та (2.2), отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора $c_{-1} \in R^r$:

$$B_0c_{-1} = -B_1P_{B_0}c_{-2r}. \tag{2.18}$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.18) є такою:

$$P_{B_0^*}[-B_1P_{B_0}c_{-2r}] = 0. \tag{2.19}$$

Позначимо за $(d \times r)$-вимірну матрицю $\overline{B}_1$ таку матрицю:

$$\overline{B}_1 := -P_{B_0^*}B_1P_{B_0}. \tag{2.20}$$

Враховуючи позначення (2.20), рівність (2.19) перепишемо у вигляді:

$$\overline{B}_1c_{-2r} = 0. \tag{2.21}$$

Запишемо r-параметричну множину розв'язків алгебраїчної системи (2.18):

$$c_{-1} = B_0^+[-B_1P_{B_0}c_{-2r}] + P_{B_0}c_{-1r}, \ \ c_{-1r} \in R^r. \tag{2.22}$$

Підставимо (2.22) в (2.15), після чого отримаємо r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.8):

$$x_{-2}(t,\ c_{-1}) = X_r(t)P_{B_0}c_{-1r} + [X_r(t)B_0^+[-B_1] + G_1(t)]P_{B_0}c_{-2r}, \ \ c_{-1r} \in R^r. \tag{2.23}$$

Згідно теореми 1 r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.16) є такою:

$$x_{-1}(t,\ c_0) = X_r(t)c_0 + (G[Q_1(s)x_{-2}(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 x_{-2}(\cdot,\varepsilon),\ \ c_0 \in R^r. \qquad (2.24)$$

Позначимо за $(n \times r)$-вимірну матрицю $G_2(t)$ матрицю вигляду:

$$G_2(t) = (G[Q_1(s)G_1(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 G_1(\cdot), \qquad (2.25)$$

тоді, застосовуючи до (2.24) позначення (2.3) та (2.25), отримаємо:

$$x_{-1}(t,\ c_0) = X_r(t)c_0 + G_1(t)P_{B_0}c_{-1r} + [G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)]P_{B_0}c_{-2r}. \qquad (2.26)$$

(2.26)-r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.16). Невідомий вектор $c_0 \in R^r$ буде знайдено на наступному кроці.

При ε^0 маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t)x_0')' - Q(t)x_0 = Q_1(t)x_{-1} + f(t), \quad\ t \in [a,b], \qquad (2.27)$$

$$l\, x_0(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_{-1}(\cdot,\varepsilon) + \alpha.$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності крайової задачі (2.27) є такою:

$$P_{D_d^*}\left\{ l_1 x_{-1}(\cdot) + \alpha - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)[Q_1(s)x_{-1}(s) + f(s)]ds \right\} = 0,\ \ d = m - n_1. \qquad (2.28)$$

В (2.28) підставимо (2.26) та зробивши відповідні перетворення, отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора $c_0 \in R^r$:

$$B_0 c_0 = \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - [B_1 B_0^+[-B_1] + B_2]P_{B_0}c_{-2r}. \qquad (2.29)$$

В (2.29) B_0 та B_1 — матриці вигляду (2.1), (2.2) відповідно, $(d \times r)$-вимірна матриця B_2 та d-вимірна вектор-функція φ_0 визначені так:

$$B_2 := P_{D_d^*}\{l_1 G_2(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_2(s)ds\},\ \ d = m - n_1, \qquad (2.30)$$

$$\varphi_0 = P_{D_d^*}[\alpha - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)f(s)ds]. \qquad (2.31)$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.29) є такою:

$$P_{B_0^*}[\varphi_0 - B_1 P_{B_0}c_{-1r} - [B_1 B_0^+[-B_1] + B_2]P_{B_0}c_{-2r}] = 0. \qquad (2.32)$$

Покладемо

$$B_{21} := B_1 B_0^+[-B_1] + B_2, \qquad (2.33)$$

B_{21}-$(d \times r)$-вимірна матриця. Звідки,

$$-P_{B_0^*}B_1 P_{B_0}c_{-1r} = P_{B_0^*}[B_{21}P_{B_0}c_{-2r} - \varphi_0]. \qquad (2.34)$$

В (2.34) добуток матриць $-P_{B_0^*}B_1 P_{B_0}$, згідно позначення (2.20) є $(d \times r)$-вимірною матрицею $\overline{B_1}$, отже, умова (2.34) рівносильна умові:

$$\overline{B_1}c_{-1r} = P_{B_0^*}[B_{21}P_{B_0}c_{-2r} - \varphi_0]. \qquad (2.35)$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.35) така:

$$P_{\overline{B_1^*}} P_{B_0^*} [B_{21} P_{B_0} c_{-2r} - \varphi_0] = 0, \tag{2.36}$$

умова (2.36) виконується, якщо $P_{\overline{B_1^*}} P_{B_0^*} = 0$.

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.35) є умовою розв'язності алгебраїчної системи (2.29). Отже, алгебраїчна система (2.29) є розв'язною і має r-параметричну множину розв'язків:

$$c_0 = P_{B_0} c_{0r} + B_0^+ [\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r} - B_{21} P_{B_0} c_{-2r}], c_{0r} \in R^r. \tag{2.37}$$

Значення вектора c_0 вигляду (2.37) підставимо в (2.26), після чого r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.16) є такою:

$$x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) P_{B_0} c_{0r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_{21}] + \\ + G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + X_r(t) B_0^+ \varphi_0, \quad c_{0r} \in R^r. \tag{2.38}$$

Згідно теореми 1 крайова задача (2.27) має r-параметричну множину розв'язків:

$$x_0(t,\ c_1) = X(t) c_1 + (G[Q_1(s) x_{-1}(s) + f(s)])(t) + X(t) D^+ (l_1 x_{-1}(\cdot) + \alpha), \quad c_1 \in R^r. \tag{2.39}$$

Підставимо $x_{-1}(t,\ c_0)$ в (2.39). Позначимо за $G_3(t)$-$(n \times r)$-вимірну матрицю, та за $G_0^{(0)}(t)$-n-вимірну векторну функцію:

$$G_3(t) := (G[Q_1(s) G_2(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_2(\cdot), \tag{2.40}$$

$$G_0^{(0)}(t) := (G[f(s)])(t) + X(t) D^+ \alpha. \tag{2.41}$$

Тоді r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.27) є такою:

$$x_0(t,\ c_1) = X(t) c_1 + G_1(t) P_{B_0} c_{0r} + \{G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \\ + \{G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + G_1(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(0)}(t),\ c_1 \in R^r. \tag{2.42}$$

Вектор c_1 буде знайдено на наступному кроці.

При ε^1 маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t) x_1')' - Q(t) x_1 = Q_1(t) x_0, \quad t \in [a, b], \tag{2.43}$$

$$l\, x_1(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_0(\cdot, \varepsilon).$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності крайової задачі є такою:

$$P_{D_d^*} \left\{ l_1 x_0(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) P^{-1}(s) Q_1(s) x_0(s) ds \right\} = 0, \ \ d = m - n_1. \tag{2.44}$$

В (2.44) підставимо (2.42). Використовуючи позначення (2.1), (2.2), (2.30), (2.33) отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора $c_1 \in R^r$:

$$B_0 c_1 = \varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{0r} - B_{21} P_{B_0} c_{-1r} - B_{31} P_{B_0} c_{-2r}. \tag{2.45}$$

у (2.45) φ_1-d-вимірна вектор-функція вигляду:

$$\varphi_1 = P_{D_d^*}[l_1 G_0^{(0)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(0)}(s)ds]. \qquad (2.46)$$

У (2.45) $(d \times r)$-вимірна матриця B_{31} визначена так:

$$B_{31} := B_1 B_0^+[-B_{21}] + B_2 B_0^+[-B_1] + B_3. \qquad (2.47)$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.45) є такою:

$$P_{B_0^*}[\varphi_1 - B_1 B_0^+\varphi_0 - B_1 P_{B_0}c_{0r} - B_{21}P_{B_0}c_{-1r} - B_{31}P_{B_0}c_{-2r}] = 0. \qquad (2.48)$$

Звідки, враховуючи позначення (2.20), маємо:

$$\overline{B}_1 c_{0r} = P_{B_0^*}[B_{21}P_{B_0}c_{-1r} + B_{31}P_{B_0}c_{-2r} + B_1 B_0^+\varphi_0 - \varphi_1]. \qquad (2.49)$$

(2.49)-алгебраїчна система відносно вектора $c_{0r} \in R^r$. Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.49) є такою:

$$P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*}[B_{21}P_{B_0}c_{-1r} + B_{31}P_{B_0}c_{-2r} + B_1 B_0^+\varphi_0 - \varphi_1] = 0. \qquad (2.50)$$

Умова розв'язності (2.50) алгебраїчної системи (2.49) виконується, якщо має місце рівність: $P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*} = 0$. З умови розв'язності (2.50) алгебраїчної системи (2.49) випливає розв'язність алгебраїчної системи (2.45) відносно невідомого вектора $c_1 \in R^r$.

r-параметрична множина розв'язків алгебраїчної системи (2.45) така:

$$c_1 = P_{B_0}c_{1r} + B_0^+\{\varphi_1 - B_1 B_0^+\varphi_0 - B_1 P_{B_0}c_{0r} - B_{21}P_{B_0}c_{-1r} - B_{31}P_{B_0}c_{-2r}\},\ c_{1r} \in R^r. \quad (2.51)$$

Підставимо (2.51) в (2.42), після чого отримаємо r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.27):

$$\begin{gathered} x_0(t,\ c_1) = X_r(t)P_{B_0}c_{1r} + [X_r(t)B_0^+[-B_1] + G_1(t)]P_{B_0}c_{0r} + \\ + \{X_r(t)B_0^+[-B_{21}] + G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{-1r} + \\ + \{X_r(t)B_0^+[-B_{31}] + G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + \\ + X_r(t)B_0^+[\varphi_1 - B_1 B_0^+\varphi_0] + G_1(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(0)}(t),\ c_{1r} \in R^r. \quad (2.52) \end{gathered}$$

Згідно теореми 1 крайова задача (2.43) має r-параметричну множину розв'язків:

$$x_1(t,\ c_2) = X(t)c_2 + (G[Q_1(s)x_0(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 x_0(\cdot), \qquad c_2 \in R^r. \qquad (2.53)$$

(2.52) підставимо в (2.53). Враховуючи раніше введені позначення функцій (2.3), (2.25), (2.40) та, поклавши за $G_4(t)$-$(n \times r)$-вимірну матрицю-функцію, за $G_0^{(1)}(t)$-n-вимірну вектор-функцію:

$$G_4(t) := (G[Q_1(s)G_3(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 G_3(\cdot), \qquad (2.54)$$

$$G_0^{(1)}(t) := (G[Q_1(s)G_0^{(0)}(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 G_0^{(0)}(\cdot), \qquad (2.55)$$

з (2.53) отримаємо r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.43):

$$
\begin{aligned}
x_1(t,\ c_2) = X_r(t)c_2 + G_1(t)P_{B_0}c_{1r} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{0r} + \\
+ \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{-1r} \\
+ \{G_1(t)B_0^+[-B_{31}] + G_2(t)B_0^+[-B_{21}] + G_3(t)B_0^+[-B_1] + G_4(t)\}P_{B_0}c_{-2r} + \\
+ G_1(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_2(t)B_0^+\varphi_0 + G_0^{(1)}(t),\ \ c_2 \in R^r. \quad (2.56)
\end{aligned}
$$

Невідомий вектор $c_2 \in R^r$ буде знайдено на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі, утвореної при ε^2.

При ε^2 маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t)x_2')' - Q(t)x_2 = Q_1(t)x_1, \quad t \in [a,b], \quad (2.57)$$

$$l\,x_2(\cdot,\varepsilon) = l_1x_1(\cdot,\varepsilon).$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності крайової задачі (2.57) є такою:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1x_1(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_1(s)ds\right\} = 0. \quad (2.58)$$

Підставимо (2.56) в (2.58). Враховуючи позначення (2.1), (2.2), (2.30), (2.33), (2.47), та, поклавши:

$$\varphi_2 := -P_{D_d^*}[l_1G_0^{(1)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(1)}(s)ds], \quad (2.59)$$

$$B_{41} := B_1B_0^+[-B_{31}] + B_2B_0^+[-B_{21}] + B_3B_0^+[-B_1] + B_4, \quad (2.60)$$

в (2.59) та (2.60) φ_2-d-вимірна вектор-функція, B_{41}-$(d\times r)$-вимірна матриця відповідно; тоді з (2.58) отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора $c_2 \in R^r$:

$$
\begin{aligned}
B_0c_2 = -B_1P_{B_0}c_{1r} - B_{21}P_{B_0}c_{0r} - B_{31}P_{B_0}c_{-1r} - B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\
- B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0 + \varphi_2. \quad (2.61)
\end{aligned}
$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.61) є такою:

$$
\begin{aligned}
P_{B_0^*}\{\varphi_2 - B_1P_{B_0}c_{1r} - B_{21}P_{B_0}c_{0r} - B_{31}P_{B_0}c_{-1r} - B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\
- B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_2B_0^+\varphi_0\} = 0. \quad (2.62)
\end{aligned}
$$

Звідки, враховуючи, що $\overline{B}_1 := -P_{B_0^*}B_1P_{B_0}$, рівність (2.62) матиме вигляд:

$$
\begin{aligned}
\overline{B}_1c_{1r} = P_{B_0^*}\{B_{21}P_{B_0}c_{0r} + B_{31}P_{B_0}c_{-1r} + B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\
- \varphi_2 + B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + B_2B_0^+\varphi_0\}. \quad (2.63)
\end{aligned}
$$

(2.63)-алгебраїчна система відносно вектора $c_{1r} \in R^r$, її умова розв'язності:

$$
\begin{aligned}
P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*}\{B_{21}P_{B_0}c_{0r} + B_{31}P_{B_0}c_{-1r} + B_{41}P_{B_0}c_{-2r} - \\
- \varphi_2 + B_1B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + B_2B_0^+\varphi_0\} = 0. \quad (2.64)
\end{aligned}
$$

Умова (2.64) виконується, якщо має місце рівність: $P_{\overline{B}_1^*} P_{B_0^*} = 0$. Запишемо розв'язок алгебраїчної системи (2.61):

$$c_2 = P_{B_0} c_{2r} + B_0^+ \{\varphi_2 - B_1 P_{B_0} c_{1r} - B_{21} P_{B_0} c_{0r} - B_{31} P_{B_0} c_{-1r} - B_{41} P_{B_0} c_{-2r} - \\ - B_1 B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0\}, \quad c_{2r} \in R^r, \quad (2.65)$$

(2.65) – розв'язок алгебраїчної системи (2.61). Знаючи вектор c_2, можна записати r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.43):

$$x_1(t,\ c_2) = X_r(t) P_{B_0} c_{2r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_1] + G_1(t)\} P_{B_0} c_{1r} + \{X_r(t) B_0^+ [-B_{21}] + \\ + G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{0r} + \\ + \{X_r(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \\ + \{X_r(t) B_0^+ [-B_{41}] + G_1(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_3(t) B_0^+ [-B_1] + G_4(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + \\ + X_r(t) B_0^+ \{\varphi_2 - B_1 B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0\} + \\ + G_1(t) B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} + G_2(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(1)}(t). \quad (2.66)$$

Запишемо r-параметричну множину розв'язків крайової задачі (2.57):

$$x_2(t,\ c_3) = X_r(t) c_3 + (G[Q_1(s) x_1(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 X_1(\cdot), \qquad c_3 \in R^r. \quad (2.67)$$

Підставимо $x_1(t,\ c_2)$ в (2.67), використовуючи раніше введені позначення (2.3), (2.25), (2.40), (2.54) та позначивши за $(n \times r)$-вимірну матрицю-функцію $G_5(t)$ та n-вимірну векторну функцію $G_0^{(2)}(t)$ функції:

$$G_5(t) = (G[Q_1(s) G_4(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_4(\cdot), \quad (2.68)$$

$$G_0^{(2)}(t) = (G[Q_1(s) G_0^{(1)}(s)])(t) + X(t) D^+ l_1 G_0^{(1)}(\cdot), \quad (2.69)$$

в результаті чого r-параметрична множина (2.67) розв'язків крайової задачі (2.57) набуде вигляду:

$$x_2(t,\ c_3) = X_r(t) c_3 + G_1(t) P_{B_0} c_{2r} + \{G_1(t) B_0^+ [-B_1] + G_2(t)\} P_{B_0} c_{1r} + \\ + \{G_1(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_2(t) B_0^+ [-B_1] + G_3(t)\} P_{B_0} c_{0r} + \\ + \{G_1(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_3(t) B_0^+ [-B_1] + G_4(t)\} P_{B_0} c_{-1r} + \\ + \{G_1(t) B_0^+ [-B_{41}] + G_2(t) B_0^+ [-B_{31}] + G_3(t) B_0^+ [-B_{21}] + G_4(t) B_0^+ [-B_1] + G_5(t)\} P_{B_0} c_{-2r} + \\ + G_1(t) B_0^+ \{\varphi_2 - B_1 B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} - B_2 B_0^+ \varphi_0\} + \\ + G_2(t) B_0^+ \{\varphi_1 - B_1 B_0^+ \varphi_0\} + G_3(t) B_0^+ \varphi_0 + G_0^{(2)}(t). \quad (2.70)$$

Вектор $c_3 \in R^r$ буде знайдено на наступному кроці.

Продовжуючи цей процес, при ε^k, $k \geq 1$, маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t) x_k')' - Q(t) x_k = Q_1(t) x_{k-1}, \qquad t \in [a, b], \quad (2.71)$$

$$l\, x_k(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{k-1}(\cdot, \varepsilon),$$

яка, згідно теореми 1 має умову розв'язності:

$$P_{D_d^*}\left\{l_1 x_{k-1}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{k-1}(s)ds\right\} = 0, \tag{2.72}$$

з якої випливає алгебраїчна система відносно невідомого вектора c_k:

$$\begin{aligned} B_0c_k = \varphi_k - B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3}-\\ - B_1B_0^+\{\varphi_{k-4} - ... - B_{k-4}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\}-\\ - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0. \end{aligned} \tag{2.73}$$

яка розв'язна, коли виконується умова

$$P_{\overline{B}_1^*}P_{B_0^*} = 0. \tag{2.74}$$

r-параметрична множина розв'язків алгебраїчної системи (2.73) така:

$$\begin{aligned} c_k = P_{B_0}c_{kr} + B_0^+[\varphi_k - B_1P_{B_0}c_{kr} - B_{21}P_{B_0}c_{(k-1)r} - ... - B_{k+2}P_{B_0}c_{-2r}-\\ - B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\}-\\ - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\}-\\ - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0], \quad c_{kr}\in R^r, \end{aligned} \tag{2.75}$$

тут

$$\varphi_k := -P_{D_d^*}[l_1G_0^{(k-1)}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_0^{(k-1)}(s)ds],$$

$$G_0^{(k)}(t) = (G[Q_1(s)G_0^{(k-1)}(s)])(t) + X(t)D^+l_1G_0^{(k-1)}(\cdot).$$

r-параметрична множина розв'язків крайової задачі (2.71) є такою:

$$\begin{aligned} x_k(t,\ c_{k+1}) = X_r(t)c_{k+1} + G_1(t)P_{B_0}c_{kr} + \{G_1(t)B_0^+[-B_1] + G_2(t)\}P_{B_0}c_{(k-1)r}+\\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{21}] + G_2(t)B_0^+[-B_1] + G_3(t)\}P_{B_0}c_{(k-2)r} + ...+\\ + \{G_1(t)B_0^+[-B_{(k+2)}] + G_2(t)B_0^+[-B_{(k+1)}] + \ldots + G_{k+2}(t)B_0^+[-B_1] + G_{k+3}(t)\}P_{B_0}c_{-2r}+\\ + G_1(t)B_0^+\cdot\{\varphi_k - B_1B_0^+\{\varphi_{k-1} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots-\\ - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-2}\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots-\\ - B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_kB_0^+\varphi_0\}\} + G_2(t)B_0^+\{\varphi_{k-1}-\\ - B_1B_0^+\{\varphi_{k-2} - B_1B_0^+\{\varphi_{k-3} - B_1B_0^+\{\ldots\} - \ldots - B_{k-2}B_0^+\varphi_0\} - \ldots-\\ - B_{k-2}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} - B_{k-1}B_0^+\varphi_0\} - \ldots - B_{k-1}B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\}-\\ - B_kB_0^+\varphi_0\} + \ldots + G_k(t)B_0^+\{\varphi_1 - B_1B_0^+\varphi_0\} + G_{k+1}B_0^+\varphi_0 + G_0^{(k)}(t), \quad c_{k+1}\in R^r. \end{aligned} \tag{2.76}$$

За допомогою методу математичної індукції для довільного натурального $k \geq 1$ можна довести, що крайова задача вигляду (2.71), утворена після підстановки ряду (2.5) в крайову задачу (1.1), (1.2) та прирівняння відповідних коефіцієнтів при кожному зі степенів ε^k, розв'язна, якщо виконується умова (2.74), та має при цьому $r-$параметричну множину розв'язків (2.76).

Збіжність ряду Лорана доводиться за допомогою традиційних методів мажорування [5]. □

Доведення теореми базується на методі Вішика-Люстерніка [5]. Отримані в роботі результати є узагальненням результатів, наведених в [13, 15] та узгоджуються з раніше отриманими в теорії крайових задач результатами [1, 2, 8, 14, 15, 16].

Перелік цитованих джерел

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Київ: Труди Інституту математики НАН України, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, №10. —С. 1668–1674.
4. *Бойчук И. А., Чуйко С. М.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, №3. — С. 405–416.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных диффференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1960. — Т.15, №3. — С. 3–80.
6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
7. *Кублановская В. И.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1966. — Т.6, №2. — С. 326–332.
8. *Чуйко С. М.* Возникновение решений линейной нетеровой краевой задачи // Укр. мат. журнал. — 2007. — Т.59, №8. — С. 1148–1152.
9. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — Т.9, №3. —С. 416–432.
10. *Чуйко С. М., Бойчук И. А., Пирус О. Е.* О приближенном решении автономной краевой задачи методом Ньютона // Нелінійні коливання. — 2012. — Т.15, №2. — С. 274–288.
11. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. — 2009. — Вып. 27. —С. 127–142.
12. *Шовкопляс Т. В.* Достатні умови біфуркації розв'язку імпульсної крайової задачі зі збуренням // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 141–152.
13. *Шовкопляс Т. В.* Достатні умови виникнення розв'язку слабкозбуреної крайової задачі // Динамические системы. — 2009. — Вып. 27. — С. 143–149.
14. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // УМЖ. — 2000. — Т.52, №6. — С. 861–864.
15. *Шовкопляс Т. В.* Слабкозбурені лінійні крайові задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку // Доповіді НАН України. — 2002. — №4. — С. 31–36.
16. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. // Utrecht, Boston: VPS. — 2004. — 317 p.
17. *A. A. Boichuk, L. M. Shegda* Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems //Differential Equations.— Pleiades Pbblishing, Ltd., 2011. — Vol.47, №4. —p. 453–461.

Получена 23.05.2014