*Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 145–154*

УДК 517.957

# Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных

**В. А. Лукьяненко**

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: art-inf@mail.ru*

**Аннотация.** Метод решения интегральных уравнений типа свертки и соответствующих им краевых задач теории аналитических функций типа Римана и Карлемана обобщается для функций от двух переменных. Приведены случаи точного решения.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения типа свертки, обобщенные задачи Римана, обобщенные задачи Карлемана.

## Введение

Решение многих прикладных задач требует сочетания различных приближенных и численных методов с аналитическими, позволяющих для модельных уравнений строить решения в квадратурах. Ф. Д. Гаховым, Ю. И. Черским и их учениками найдено решение в квадратурах широкого класса задач теории аналитических функций, сингулярных интегральных уравнений и уравнений типа свертки [1]–[5].

Целью работы является продолжение исследования данного направления на класс интегральных уравнений и краевых задач теории аналитических функций для тех случаев, когда решением является функция двух переменных. Выбор классов функций и обозначений соответствует [2]–[4]. Алгоритмы решения представим на примере нескольких характерных задач, допускающих дальнейшее обобщение.

Рассмотрим интегральное уравнение (ИУ) для функций от двух переменных.

$$U(x,t) + \int_0^1 M(x,t,\tau)U(x,\tau)d\tau = G(x,t). \tag{0.1}$$

Схема решения (0.1) следующая: обозначая через

$$C(x,t) = \int_0^1 M(x,t,\tau)U(x,\tau)\,d\tau,$$

получим представление

$$U(x,t) = G(x,t) - C(x,t)$$

или

$$C(x,t) + \int_0^1 M(x,t,\tau)C(x,\tau)d\tau = \int_0^1 M(x,t,\tau)G(x,\tau)\,d\tau \equiv H(x,t),$$

т. е. далее необходимо задавать представление для $M(x,t,\tau)$, например, в виде

$$KU \equiv U(x,t) + \int_0^1 A(x,\tau)U(x,\tau)\,d\tau = G(x,t), \tag{0.2}$$

обозначив через

$$C(x) = \int_0^1 A(x,\tau)U(x,\tau)d\tau,$$

получим $U(x,t) = G(x,t) - C(x)$ и при выполнения условия

$$1 + \int_0^1 A(x,\tau)d\tau \neq 0,$$

$$U(x,\tau) \equiv K^{-1}G \equiv G(x,t) - \left[1 + \int_0^1 A(x,\tau)d\tau\right]^{-1} \int_0^1 A(x,\tau)G(x,\tau)d\tau. \qquad (0.3)$$

Если ядро ИУ представлено в виде

$$M(x,t,\tau) = A(x,t)B(x,\tau), \qquad (0.4)$$

то обозначим через

$$D(x) = \int_0^1 B(x,\tau)U(x,\tau)d\tau, \qquad (0.5)$$

тогда

$$U(x,t) = G(x,t) - A(x,t)D(x). \qquad (0.6)$$

Из представления (0.6) и выражения (0.5) находим:

$$D(x) = \left[1 + \int_0^1 A(x,\tau)B(x,\tau)d\tau\right]^{-1} \int_0^1 B(x,\tau)G(x,\tau)d\tau.$$

Решение уравнения получаем из (0.6) в виде

$$U(x,\tau) = G(x,t) - A(x,t)\left[1 + \int_0^1 A(x,\tau)B(x,\tau)d\tau\right]^{-1} \int_0^1 B(x,\tau)G(x,\tau)d\tau. \qquad (0.7)$$

Аналогом уравнений (0.1)-(0.2) являются уравнения типа свертки вида

$$u(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a(x-s,\tau)u(s,\tau)dsd\tau = g(x,t). \qquad (0.8)$$

Обозначим преобразование Фурье функции $u(x,t)$ по переменной $x$ через

$$U(x,t) = F\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi.$$

Из (0.8) получим уравнение (0.2), решение которого дается формулой (0.3).

## 1. Двумерное интегральное уравнение специального вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{s \geq \lambda t}^{\infty} h(x-s, y-t)u(s,t)ds = g(x,y), \;\; y \in \mathbb{R}, \;\; x \geq \lambda y \qquad (1.1)$$

заменой $x - \lambda y = \xi$, $s - \lambda t = \sigma$, сводится к уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{0}^{\infty} m(\xi-\sigma, y-t)v(\sigma,t)d\sigma = h(\xi,y), \;\; y\in\mathbb{R}, \;\; \xi\geq 0, \tag{1.2}$$

где $m(\xi,y) = k(\xi+\lambda y, y)$, $v(\sigma,t) = u(\sigma+\lambda t, t)$, $h(\xi,y) = g(\xi+\lambda y, y)$.

Полученное уравнение приводится к уравнению Винера-Хопфа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \tilde{m}(x-s)\tilde{w}(s)ds = \tilde{h}(x), \;\; x\geq 0. \tag{1.3}$$

Если учесть, что функции $u$ и $g$ являются односторонними по переменной $x$:

$$u(x+\lambda y, y) = w_{+}(x,y), \;\; g(x+\lambda y, y) = h_{+}(x,y), \tag{1.4}$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} m(x-s, y-t)w_{+}(x,y)ds = h_{+}(x,y) + w_{-}(x,y), \;\; x,y\in\mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$w_{+}(x,y) = \begin{cases} w(x,y), \;\; x>0, \\ 0, \;\; x<0, \end{cases}$$

$$h_{+}(x,y) = \begin{cases} h(x,y), \;\; x>0, \\ 0, \;\; x<0, \end{cases}$$

$$w_{-}(x,y) = \begin{cases} 0, \;\; x>0, \\ \text{неизв.}, \;\; x<0. \end{cases}$$

Решение уравнения (1.5) эквивалентно краевой задаче

$$M(x,y)W^{+}(x,y) = W^{-}(x,y) + H^{+}(x,y), \;\; x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Предположения о неизвестных функциях и правой части (1.6): функция $M(x,y)$ — обладает достаточной гладкостью;

$$M(\infty,y)\equiv 1, \;\; |M(x,y)| > const > 0. \tag{1.7}$$

$$H^{+}(x,y) : h_{+}(\sigma,t)\in L_2(\mathbb{R}^2), \tag{1.8}$$

$$W^{\pm}(x,y) : w_{\pm}(\sigma,t)\in L_2(\mathbb{R}^2). \tag{1.9}$$

Пусть, для примера, индекс функции $M(x,y)$ по переменной $x$ равен:

$$\chi = -ind_x M(x,y) = 1$$

и не зависит от $y$.

Заметим, что техника решения краевых задач типа (1.6) сохраняется в более общем случае.

Факторизуем коэффициент $M(x,y)$ :

$$M(x,y) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)\frac{\Phi^{-}(x,y)}{\Phi^{+}(x,y)}.$$

Тогда из (1.6) получаем

$$\frac{x+i}{\Phi^+(x,y)}W^+(x,y)=\frac{x-i}{\Phi^-(x,y)}W^-(x,y)+\frac{x-i}{\Phi^-(x,y)}H^+(x,y)=C(y).$$

Отсюда следует

$$W^+(x,y)=\frac{\Phi^+(x,y)}{x+i}\left\{\left[\frac{x-i}{\Phi^-(x,y)}H^+(x,y)\right]^+ + C(y)\right\},\ \ C(y)\in L_2(\mathbb{R}). \tag{1.10}$$

Для нахождения решения (1.1), (1.2) необходимо вернуться к исходным функциям:

$$U(x,y)=W^+(x,y+\lambda x)=\frac{\Phi^+(x,y+\lambda x)}{x+i}\left\{\left[\frac{x-i}{\Phi^-(x,\eta)}H^+(x,\eta)\right]^+_{\eta=y+\lambda x}+C(y+\lambda x)\right\}$$

и, окончательно,

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(s,t)e^{-ixs-iyt}dsdt. \tag{1.11}$$

Предложенная схема допускает обобщение на пространственный случай:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{\alpha\geq\lambda s+\mu t}^{\infty}k(x-\alpha,p-s,q-t)u(\alpha,s,t)d\alpha=g(x,p,q),$$

$$x\geq\lambda p+\mu q,\ \ (p,q)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}k(x-\alpha,p-s,q-t)u_+(\alpha,s,t)dt=u_-(x,p,q)+g_+(x,p,q),$$

$$K(x,p,q)U^+(x,p,q)=U^-(x,p,q)+G^+(x,p,q),\ \ (x,p,q)\in\mathbb{R}^3.$$

При индексе коэффициента $\chi\geq 0$ примем гипотезу

$$K(x,p,q)=\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi}\frac{X^-(x,p,q)}{X^+(x,p,q)}.$$

Тогда

$$\frac{(x+i)^{\chi}}{X^+}U^+=\frac{(x-i)^{\chi}}{X^-}U^-+(x-i)^{\chi}M(x,p,q).$$

Используя соответствующие проекторы, получим представление:

$$M(x,p,q)=\frac{G^+}{X^-}=M^+-M^-.$$

Следующая гипотеза

$$\frac{(x+i)^{\chi}}{X^+}U^+-(x-i)^{\chi}H^+=\frac{(x-i)^{\chi}}{X^-}U^--(x-i)^{\chi}H^-=C_0(p,q)+C_1(p,q)x+\ldots+C_{x-1}(p,q)x^{\chi-1}$$

приводит к решению задачи.

## 2. Уравнение типа свертки на четверть-плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty k(x-s)m(y-t)u(s,t)dsdt = g(x,y),\ x>0,\ y>0,$$

являющееся обобщением известного уравнения Винера-Хопфа. Искомая функция здесь $u(x,y)$. Пространства для искомой и заданных функций нетрудно выбрать так, чтобы все дальнейшие преобразования были осуществимы. Доопределим уравнение на всей плоскости $(x,y)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty k(x-s)m(y-t)u_{++}(s,t)dsdt = g_{++}(x,y)+\varphi_{+-}(x,y)+\varphi_{-+}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Здесь значки $(-,+)$ означают равенство функций нулю на соответствующей полуплоскости, например,

$$\varphi_{-+}(x,y)=\begin{cases}\text{неизвестна},\ x<0,\ y>0,\\ 0,\ x<0,\ y<0,\\ 0,\ x>0.\end{cases}$$

Преобразование Фурье $\Phi^{-+}(z,\xi)$ функции $\varphi_{-+}(x,y)$ будет аналитической функцией в полуплоскостях $Imz<0$, $Im\xi>0$. Применим преобразование Фурье к доопределенному уравнению, получим краевую задачу типа Римана

$$K(x)M(y)U^{++}(x,y)=G^{++}(x,y)+\Phi^{+-}(x,y)+\Phi^{-+}(x,y)+\Phi^{--}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Как и в одномерном уравнении Винера-Хопфа факторизуем функции:

$$K(x)=\frac{X^-(x)}{X^+(x)},\ \ M(y)=\frac{Y^-(y)}{Y^+(y)}$$

и придаем условию краевой задаче Римана форму

$$\frac{U^{++}(x,y)}{X^+(x)Y^+(y)}=\frac{G^{++}(x,y)}{X^-(x)Y^-(y)}+\Omega(x,y),$$

где, наряду с $U^{++}(x,y)$ неизвестная функция $\Omega(x,y)$ :

$$\Omega(x,y)=\frac{\Phi^{+-}(x,y)+\Phi^{-+}(x,y)+\Phi^{--}(x,y)}{X^-(x)Y^-(y)}.$$

На обе части краевого условия действуем оператором $P^{++}[\Phi]=\Phi^{++}$. Получим:

$$\frac{U^{++}(x,y)}{X^+(x)Y^+(y)}=\left[\frac{G^{++}(x,y)}{X^-(x)Y^-(y)}\right]^{++}$$

(нетрудно убедиться, что $[\Omega]^{++}\equiv 0$). Итак, искомая $U^{++}(x,y)$ найдена

$$U^{++}(x,y)=X^+(x)Y^+(y)\left[\frac{G^{++}(x,y)}{X^-(x)Y^-(y)}\right]^{++}$$

и остается вернуться к Фурье-оригиналу.

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U^{++}(s,t)e^{-ixs-iyt}dsdt.$$

## 3. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения.

Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения (СИУ) специального вида возникают в том случае, когда полуплоскости аналитичности отличаются от классических, например, $ax+b\xi+c<0$ или $ax+b\xi+c>0$. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим односторонние функции следующего вида:

$$\varphi_{++}(x,\xi) = \begin{cases} \varphi_{++}(x,\xi), \ x+\xi>0, \\ 0, \ x+\xi<0, \end{cases}$$

$$\varphi_{--}(x,\xi) = \begin{cases} 0, \ x+\xi>0, \\ \varphi_{--}(x,\xi), \ x+\xi<0, \end{cases}$$

$$w_{+\cdot}(x+\xi,\xi-x) = \varphi_{++}(x,\xi),$$

$$Fw_{+\cdot}(x,\xi) = \Omega^{+\cdot}(x,\xi), \ \ F\varphi_{++}(x,\xi) = \Phi^{++}(x,\xi),$$

$$Fw_{+\cdot}(x+\xi,\xi-x) = \frac{1}{2}\Omega^{+\cdot}\left(\frac{x+\xi}{2},\frac{\xi-x}{2}\right) = \Phi^{++}(x,\xi),$$

$$\frac{1}{2}\Omega^{-\cdot}\left(\frac{x+\xi}{2},\frac{\xi-x}{2}\right) = \Phi^{--}(x,\xi),$$

$$\|\varphi_{++}\|^2 = \|\Phi^{++}\|^2 < \infty, \ \ \|\varphi_{--}\|^2 = \|\Phi^{--}\|^2 < \infty.$$

решения задачи Римана

$$\Phi^{++}(x,\xi) = A(x,\xi)\Phi^{--}(x,\xi) + G(x,\xi), \ \ (x,\xi)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

как и в классическом случае применим метод факторизации. Задача по скачку

$$\Phi^{++}(x,\xi) - \Phi^{--}(x,\xi) = M(x,\xi), \ \ (x,\xi)\in\mathbb{R}^2, \ \ M(x,\xi)\in L_2(\mathbb{R}^2) \tag{3.2}$$

эквивалентна задаче

$$\Omega^{+\cdot}\left(\frac{x+\xi}{2},\frac{\xi-x}{2}\right) - \Omega^{-\cdot}\left(\frac{x+\xi}{2},\frac{\xi-x}{2}\right) = 2M(x,\xi).$$

Замена $\frac{x+\xi}{2}=t$, $\frac{\xi-x}{2}=\tau$, $(x=t-\tau,\ \xi=t+\tau)$ приводит к

$$\Omega^{+\cdot}(t,\tau) - \Omega^{-\cdot}(t,\tau) = 2M(t-\tau,t+\tau).$$

Для данной задачи решение дается формулами Сохоцкого Ю. В.

$$\frac{1}{2}\Omega^{\pm\cdot}(t,\tau) = \pm M(t-\tau,t+\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} M(s-\tau,s+\tau)\frac{ds}{s-t}.$$

Возвращаясь к исходной задаче, получаем

$$\Phi^{++}(x,\xi)=\frac{1}{2}M(x,\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}M\left(s-\frac{\xi-x}{2},s+\frac{\xi-x}{2}\right)\frac{ds}{s-\frac{x+\xi}{2}} \tag{3.3}$$

$$\Phi^{--}(x,\xi)=-\frac{1}{2}M(x,\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}M\left(s-\frac{\xi-x}{2},s+\frac{\xi-x}{2}\right)\frac{ds}{s-\frac{x+\xi}{2}}$$

Аналогичные изменения сохраняются и в общем случае решения задачи Римана (3.1).

## 4. Задачи Карлемана для функций от двух переменных.

Краевая задача Карлемана для полосы эквивалентна задаче Римана для плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси [2]. Аналогом являются следующие две краевые задачи

$$\Psi^{++}(x,\xi)-\Psi^{--}(x,\xi)=G(x,\xi),\ \ -1<x,\xi<1, \tag{4.1}$$

$$\Phi(u,\sigma)-\Phi(u+2\pi i,\sigma+2\pi i)=M(u,\sigma),\ \ u,\sigma\in\mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Для функции $\Phi(u,\sigma)$ справедливо представление

$$\Phi(u,\sigma)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M(u-t,\sigma-t)\left(\operatorname{cth}\frac{t}{2}\right)^{+}dt. \tag{4.3}$$

С помощью комфорного отображения $w=\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ сведем задачу (4.1) к задаче по скачку (4.2)

$$\Psi(z,\xi)=\Phi(w,\omega), \tag{4.4}$$

тогда $\Psi^{++}(x,\xi)=\Phi(u,\sigma)$, $u=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $\sigma=\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$, $G(x,\xi)=M(u,\sigma)$. Контур $\gamma$ проведен так, что значение логарифма для отображения $w=\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ на верхнем берегу разреза, соединяющего точки $-1$ и $1$, вещественно. Для $u=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, следует, что когда $x=-1+\varepsilon$, $u\to-\infty$, и когда $x=1-\varepsilon$, $u\to+\infty$. Из (4.3) следует, при замене $u=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $\sigma=\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$, $t=\ln\dfrac{1+s}{1-s}$

$$\Psi^{++}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-t,\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}-t\ \right)\left(cth\frac{t}{2}\right)^{+}dt=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}M\left(\ln\frac{(1+x)(1-s)}{(1-x)(1+s)},\ \ln\frac{(1+\xi)(1-s)}{(1-\xi)(1+s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right)^{+}\frac{ds}{(1-s^2)},$$

$$\Psi^{++}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{s}\right)^{+}G\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}. \tag{4.5}$$

Можно показать, что

$$\Psi^{--}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{s}\right)^{-}G\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}. \tag{4.6}$$

По формулам (4.5)-(4.6) для $\Psi^{++}$ и $\Psi^{--}$ получаем формулы Сохоцкого Ю. В.

$$\begin{gathered}\Psi^{++}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{s}\right)_{\text{гл.зн.}}G\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}+\frac{1}{2}G(x,\xi),\\ \Psi^{--}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{s}\right)_{\text{гл.зн.}}G\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}-\frac{1}{2}G(x,\xi),\end{gathered} \tag{4.7}$$

Т.к. $(1/s)^{+}-(1/s)^{-}=(-2\pi i)\delta(s)$ то из соотношения

$$\Psi^{++}(x,\xi)-\Psi^{--}(x,\xi)=(-2\pi i)\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\delta(s)G\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}=$$

$$=(-2\pi i)\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\delta(s)G(x,\xi)\frac{ds}{(1-s^2)}=G(x,\xi)$$

следует справедливость выражений для формул Сохоцкого Ю. В. (4.7). Полученные формулы Сохоцкого Ю. В. позволяют сводить к задаче Римана СИУ вида

$$a(x,\xi)u(x,\xi)-\frac{b(x,\xi)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{s}\right)_{\text{гл.зн.}}u\left(\frac{x-s}{1-xs},\ \frac{\xi-s}{1-\xi s}\right)\frac{ds}{(1-s^2)}=g(x,\xi), \tag{4.8}$$

$$a(x,\xi)\left[\Psi^{++}(x,\xi)-\Psi^{--}(x,\xi)\right]+b(x,\xi)\left[\Psi^{++}(x,\xi)+\Psi^{--}(x,\xi)\right]=g(x,\xi),$$

$$\Psi^{++}(x,\xi)=\frac{a(x,\xi)-b(x,\xi)}{a(x,\xi)+b(x,\xi)}\Psi^{--}(x,\xi)+\frac{g(x,\xi)}{a(x,\xi)+b(x,\xi)},\ -1<\ x,\xi\ <1. \tag{4.9}$$

Обобщением одномерной задачи Карлемана для полосы и двумерной (4.2) является двумерная задача типа Карлемана:

$$\begin{gathered}A(x,\xi)\Phi(x,\xi)-P(x,\xi)=R_1(x,\xi),\ (x,\xi)\in\mathbb{R}^2,\\ B(x,\xi)\Phi(x+i,\xi+i)-Q(x,\xi)=R_2(x,\xi).\end{gathered} \tag{4.10}$$

Соответствующая задача по скачку имеет вид

$$\begin{gathered}\Psi(x,\xi)-G(x,\xi)=R(x,\xi),\\ \Psi(x+i,\xi+i)-H(x,\xi)=P(x,\xi).\end{gathered} \tag{4.11}$$

Обратное преобразование Фурье приводит к системе

$$\psi(x,\xi)-g(x,\xi)=r(x,\xi),\qquad \overline{r(-x,-\xi)}\ =r(x,\xi),$$

$$\psi(x,\xi)e^{-x-\xi} - h(x,\xi) = p(x,\xi), \qquad \overline{p(-x,-\xi)} = p(x,\xi).$$

Откуда находим

$$\psi(x,\xi) = [g(x,\xi) - \overline{g(-x,-\xi)} - (h(x,\xi) - \overline{h(-x,-\xi)})e^{-x-\xi}][1 - e^{-2(x+\xi)}]^{-1},$$

$$r(x,\xi) = [g(x,\xi)e^{-x-\xi} - \overline{g(-x,-\xi)}e^{x+\xi} - h(x,\xi) + \overline{h(-x,-\xi)}][e^{x+\xi} - e^{x-\xi}]^{-1},$$

$$p(x,\xi) = [h(x,\xi)e^{x+\xi} - \overline{h(-x,-\xi)}e^{-x-\xi} - g(x,\xi) + \overline{g(-x,-\xi)}][e^{-x-\xi} - e^{x+\xi}]^{-1}.$$

Действительно

$$p(x,\xi) = [r(x,\xi) + g(x,\xi)]e^{-x-\xi} - h(x,\xi),$$

$$\overline{p(-x,-\xi)} = \overline{\psi(-x,-\xi)}e^{x+\xi} - \overline{h(-x,-\xi)} = [\overline{r(-x,-\xi)} + \overline{g(-x,-\xi)}]e^{x+\xi} - \overline{h(-x,-\xi)},$$

$$p(x,\xi) = [r(x,\xi) + \overline{g(-x,-\xi)}]e^{x+\xi} - \overline{h(-x,-\xi)},$$

$$[r(x,\xi) + g(x,\xi)] = [p(x,\xi) + h(x,\xi)]e^{x+\xi},$$

$$[r(x,\xi) + \overline{g(-x,-\xi)}] = -[p(x,\xi) + \overline{h(-x,-\xi)}]e^{-x-\xi},$$

$$g(x,\xi) - \overline{g(-x,-\xi)} = p(x,\xi)[e^{x+\xi} + e^{-x-\xi}] + h(x,\xi)e^{x+\xi} - \overline{h(-x,-\xi)}e^{-x-\xi}.$$

Откуда находим $p(x,\xi)$ аналогично для $r(x,\xi)$получаем

$$r(x,\xi)[e^{-x-\xi} + e^{x+s}] + g(x,\xi)e^{-x-\xi} + \overline{g(-x,-\xi)}e^{x+\xi} = h(x,\xi) + \overline{h(-x,-\xi)}.$$

К рассмотренному типу краевых задач сводится двумерное интегральное уравнение типа плавного перехода

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s,y-t)u(s,t)dsdt - g(x,y) + \\ + e^{x-y}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m(x-s,y-t)u(s,t)dsdt - p(x,y)\right) = 0, \quad (4.12)$$

которое эквивалентно системе

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s,y-t)u(s,t)\,dsdt - g(x,y) + e^{x-y}\varphi(x,y) = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m(x-s,y-t)u(s,t)\,dsdt - p(x,y) = \varphi(x,y).$$

Откуда следует

$$K(x,y)U(x,y) - G(x,y) = -\Phi(x-i,y+i),$$

$$M(x,y)U(x,y) - P(x,y) = \Phi(x,y),$$

$$U(x,y) = K^{-1}(x,y)[G(x,y) - \Phi(x-i,y+i)] = M^{-1}(x,y)[P(x,y) + \Phi(x,y)].$$

В результате получаем задачу Карлемана для двух переменных

$$\Phi(x,y)+A(x,y)\Phi(x-i,y+i)=M(x,y), \tag{4.13}$$

$$A(x,y)=\frac{M(x,y)}{K(x,y)},\quad M(x,y)=\frac{M(x,y)}{K(x,y)}G(x,y)-P(x,y)=$$
$$=[M(x,y)G(x,y)-K(x,y)P(x,y)]K^{-1}(x,y).$$

Соответствующая задача по скачку

$$\Psi(x,y)-\Psi(x-i,y+i)=Q(x,y),$$

имеет решение $\Psi(x,y)=F\{\psi\}$, где $\psi(x,y)=\frac{1}{1-e^{x-y}}q(x,y)$. Факторизация коэффициента $A(x,y)$ задачи Карлемана (4.13) приводит к задаче по скачку, а тем самым позволяет записать решение задачи Карлемана и эквивалентного уравнения типа плавного перехода (4.12).

## Заключение.

В работе приведено обобщение результатов по решению краевых задач теории аналитических функций (Римана и Карлемана) и соответствующих им интегральным уравнениям для функций, зависящих от двух переменных. Приведенные алгоритмы решения являются частью первоначально предложенной Ю. И. Черским более широкой программы исследований функционально-дифференциально-интегральных уравнений. Полученные результаты могут использоваться при решении соответствующих задач для уравнений в частных производных.

### Список цитируемых источников

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
3. *Черский Ю. И.* Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю. И. Черский, П. В. Керекеша, Д. П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
4. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная задача Карлемана / В. А. Лукьяненко // Динамические системы. — 2005. — №19. — С. 129–144.
5. *Лукьяненко В. А.* Дифференциально-разностные уравнения типа плавного перехода в особом случае / В. А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. — 2000. — №1. — С. 104–113.

*Получена 30.03.2013 Переработана 01.04.2014*

*Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 155–164*

УДК 517.925.51

# Исследование критического случая устойчивости для одного семейства импульсных систем. I

**О. В. Анашкин, О. В. Митько**

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: anashkin@crimea.edu*

**Аннотация.** Рассматривается семейство периодических нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с линейным импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Система в вариациях в нуле не позволяет сделать заключение об устойчивости полной нелинейной системы. Таким образом, имеет место критический случай задачи об устойчивости движения. Для данного семейства найдены условия асимптотической устойчивости и тотальной неустойчивости нулевого решения в критическом случае. Условия устойчивости получены путем построения возмущенной функции Ляпунова.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, критический случай задачи об устойчивости, асимптотическая устойчивость, тотальная неустойчивость, прямой метод Ляпунова.

## Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) описывают поведение динамических процессов разнообразной природы, которые в определенные моменты времени могут почти мгновенно изменять свое состояние. Такие системы имеют разрывные решения с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные (зависящие от фазовых координат) моменты времени. Теория уравнений с импульсным воздействием во многом аналогична классической теории дифференциальных уравнений, но имеет существенные специфические отличия. К настоящему времени опубликованы полтора десятка монографий и сотни статей, посвященных различным аспектам теории импульсных систем. В настоящей статье упомянуты лишь работы, имеющие непосредственное отношение к исследуемой проблеме.

Важнейшим направлением исследований является отыскание условий устойчивости решений относительно возмущений начальных данных (устойчивости по Ляпунову). Второй (или прямой) метод Ляпунова является эффективным инструментом исследования устойчивости решений импульсных систем и его развитию посвящено большое количество публикаций, в том числе, [1]–[4], [7]–[22]. В упомянутых работах получены как аналоги классических теорем А. М. Ляпунова, так и принципиально новые результаты, существенно использующие специфику, вносимую импульсным воздействием.

*Критическим случаем* задачи устойчивости стационарного решения[1] называют ситуацию, когда рассмотрение системы уравнений первого приближения не позволяет определить характер устойчивости стационарного решения полной системы. А именно, сколь

[1] Обычно это нулевое решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

угодно малое изменение нелинейности может сделать стационарное решение как устойчивым, так и неустойчивым. Критический случай устойчивости представляет интерес не только потому, что это сложная и интересная математическая проблема. Например, к анализу критических случаев приводит изучение бифуркаций в нелинейных системах. Кроме того, имеется широкий спектр практически важных математических моделей, где устойчивость в принципе возможна только в критическом случае (например, в гамильтоновых системах).

Критический случай устойчивости рассматривался во многих глубоких исследованиях, начиная со знаменитой диссертации А. М. Ляпунова [14, 15] [2]. Отметим содержательные обзоры математического инструментария и результатов теории критических случаев задачи устойчивости для ОДУ [5, 19].

Критический случай задачи об устойчивости нулевого решения импульсной системы еще мало изучен. Лишь в последние годы этот пробел стал заполняться. Систематическому исследованию критических случаев посвящена серия работ В. И. Слынько с соавторами, в частности, статьи [4], [7]–[12]. В этих работах известные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 19] с успехом применяются к исследованию импульсных систем.

В настоящей статье мы опишем результаты исследования устойчивости для одного класса импульсных систем второго порядка, содержащих только критические переменные. В определенном смысле рассматриваемый критический случай аналогичен изученному еще А. М. Ляпуновым случаю пары чисто мнимых собственных значений. А именно, поведение траекторий системы линейного приближения напоминает случай центра. Исследование проводится путем построения вспомогальной функции типа Ляпунова в виде суммы однородных многочленов возрастающих степеней, удовлетворяющей одной из теорем об устойчивости, доказанных ранеее авторами в [2, 3].

## 1. Постановка задачи и предварительные преобразования

Пусть $B_h = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < h\}$ — $h$-окрестность нуля для некоторого $h > 0$, $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел, $G = \mathbb{R}_+ \times B_h$.

Рассмотрим в области $G$ систему уравнений второго порядка с импульсным воздействием

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 + \sum_{|m|\geq 2} g_m^1 x^m, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \sum_{|m|\geq 2} g_m^2 x^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{1.1}$$

$$x_1(\tau_k^+) = x_1(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \quad x_2(\tau_k^+) = x_2(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \ t = \tau_k, \tag{1.2}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$, $x = (x_1, x_2)$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $\beta > 0$, $\alpha, g_m^1, g_m^2 \in \mathbb{R}$, $\tau_k = \tau_0 + k\theta$, $\theta > 0$, $0 \leq \tau_0 \in \mathbb{R}$, $x(\tau_k^+) = \lim\limits_{t\to\tau_k+0} x(t)$.

Данная система является периодической в смысле определения [18, с. 148], т. к. импульсные воздействия происходят через равные промежутки времени, дифференциальное уравнение (1.1) автономное, результат импульсного воздействия (1.2) не зависит от

[2] Фундаментальный труд А. М. Ляпунова неоднократно переиздавался на русском языке: отдельной одноименной книгой в 1935 году [15] и в 1950 г., несколько раз в собраниях сочинений в 40-е–50-е годы. Последнее русское издание [16] работ по теории устойчивости, предпринятое Академией наук РФ, содержит интересные комментарии, но подготовлено к печати очень небрежно: в подписи под большим портретом в начале книги и в выходных данных в конце (на самых видных местах!) Александр Михайлович Ляпунов переименован в Алексея Михайловича.