Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 101–107

УДК 517.9

Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения

С. М. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина нетеровой краевой задачи для линейного матричного дифференциального уравнения. Для решения линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения линейного матричного уравнения типа Сильвестра. Предложен оператор, который приводит линейное алгебраическое матричное уравнение типа Сильвестра к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей.

Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричные дифференциальные уравнения, нетеровы краевые задачи.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [10]

$$Z(t) = (z^{(\alpha,\beta)}(t)), \quad Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1[a,b], \quad \alpha = 1,2,\ldots,m, \quad \beta = 1,2,\ldots,n$$

матричного дифференциального уравнения [1]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad F(t) \in \mathbb{C}[a,b], \tag{1.1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{1.2}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ C^1[a,b] \to \mathbb{R}^{\ell\times n}.$$

Условия разрешимости и структура решения системы (1.1) были приведены в монографии [1]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения системы (1.1) при условии $m = n$ получены в статье [8] с использованием обобщенного обращения матриц и оператора, описанного в статье [9]. Как известно [1, с. 211], общее решение задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$X(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_n, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_n.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ задачи Коши [8]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$Z(t,\Theta) = X(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где

$$K[\Phi(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

есть оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (1.1).

2. Обобщенный оператор Грина линейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения

Подставляя общее решение задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для матричного дифференциального уравнения (1.1) в краевое условие (1.2), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}X(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) \tag{2.1}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1,2,\ldots,m\cdot n$ — базис пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ и c_j, $j = 1,2,\ldots,m\cdot n$ — константы, определяющие разложение матрицы

$$\Theta = \sum_{j=1}^{m\cdot n} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,2,\ldots,m\cdot n$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$, при этом

$$\mathcal{L}X(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{m\cdot n} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j.$$

Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению типа Сильвестра [6, 7]

$$\sum_{j=1}^{m\cdot n} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)$$

относительно $m\cdot n$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1,2,\ldots,m\cdot n$. Определим оператор [6, 7]

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]: \ \mathbb{R}^{\ell\times n} \to \mathbb{R}^{\ell\cdot n},$$

как оператор, который ставит в соответствие произвольной матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\}: \ \mathbb{R}^{\ell\cdot n} \to \mathbb{R}^{\ell\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\ell \cdot n}$ матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$. Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q}c = M[\mathcal{A}] - M\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \tag{2.2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, равносильному уравнению (2.1); здесь

$$\mathcal{Q} := [M[\mathcal{Q}^{(1)}] \;\; M[\mathcal{Q}^{(2)}] \; \ldots \; M[\mathcal{Q}^{(m \cdot n)}]],$$

где

$$\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\ell \cdot n \times m \cdot n}, \quad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, \quad j = 1, 2, \ldots, m \cdot n.$$

Уравнение (2.2) разрешимо тогда и только тогда, когда [6, 7, 10]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} M\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\ell \cdot n} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. При условии (2.3) и только при нем общее решение уравнения (2.2)

$$c = \mathcal{Q}^+ M\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение матричного уравнения (2.1)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+ M\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\}\} + \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение матричного дифференциального уравнения (1.1), подчиненное краевому условию (1.2)

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{m \cdot n \times m \cdot n} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{m \cdot n \times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) := X\{t, \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+ M[\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)]\}\} + K[F(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1.1), (1.2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При условии (2.3) и только при нем общее решение матричного дифференциального уравнения (1.1), подчиненное краевому условию (1.2)*

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (1.1), (1.2).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1.1), (1.2) имеет место критический случай, при этом задача (1.1), (1.2) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (2.3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1.1), (1.2) имеет место некритический случай, при этом задача (1.1), (1.2) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$.

Утверждение доказанной теоремы является обобщением соответствующих утверждений [2, 3, 10] на случай матричной краевой задачи (1.1), (1.2).

Пример 1. Условия теоремы выполнены для задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) - Z(2\pi) = 0, \tag{2.4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (2.4)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$X(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ -e^t + \cos 2t & e^t & -\sin 2t \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ и $c_j,\ j = 1, 2, \dots, 6$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Общее решение однородной задачи (2.4) определяет матрица Q и ее ортопроектор:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

матрица

$$P_{\mathcal{Q}_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

составлена из линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Таким образом, находим общее решение однородной задачи (2.4)

$$Z_0(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) = U(t) \cdot \Theta_r \cdot V(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^4,$$

где

$$\Theta_r = \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r] = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ c_2 & 0 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_{\mathcal{Q}_d^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

постольку для краевой задачи (2.4) имеет место критический случай. Условие (2.3) в случае неоднородной задачи (2.4) в силу равенств

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) = 0$$

выполнено, поэтому общее решение неоднородной задачи (2.4) определяет определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (2.4)

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) = K[F(s)](t) = \begin{pmatrix} K[F(s)](t)\mathcal{P}_1 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_2 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_3 \end{pmatrix};$$

здесь

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K[F(s)](t)\mathcal{P}_2 = 0,$$

а также

$$K[F(s)](t)\mathcal{P}_1 = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} -2\cos t + 9\cos 3t - 7\cos 5t - 2\sin t - 9\sin 3t + 25\sin 5t \\ -2\cos t + 9\cos 3t - 7\cos 5t \end{pmatrix},$$

$$K[F(s)](t)\mathcal{P}_3 = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} -2\cos t - 9\cos 3t + 11\cos 5t + 2\sin t - 9\sin 3t + 5\sin 5t \\ 2\sin t - 9\sin 3t + 5\sin 5t \end{pmatrix}.$$

В некритическом случае, при условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, задача (1.1), (1.2) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$.

Следствие 1. *В некритическом случае, при условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, общее решение матричного дифференциального уравнения (1.1), подчиненное краевому условию (1.2)*

$$Z(t, \Theta_r) = X(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (1.1), (1.2).

Пример 2. Условия следствия выполнены для краевой задачи

$$dZ(t)/dt = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := MZ(0) + NZ(2\pi) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F(t) = \begin{pmatrix} \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M = N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (2.5)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

имеет вид

$$X(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2, \ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ -e^t + \cos 2t & e^t & -\sin 2t \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \Xi^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ и $c_j, \ j = 1, 2, \ldots, 6$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Общее решение однородной задачи (2.5) определяет матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 - e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

и ее ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P_{\mathcal{Q}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, постольку для краевой задачи (2.5) имеет место некритический случай. В силу равенств

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) = 0,$$

общее решение неоднородной задачи (2.5) определяет определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (2.4)

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) = K[F(s)](t).$$

Список цитируемых источников

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с.

2. *Бойчук А. А.* Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — №7. — С. 3–6.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Математика. — 2008. — №2. — С. 14–23.
5. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли. II // Известия вузов. Математика. — 2008. — №7. — С. 3–10.
6. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014, **19**, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.
7. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: математика, прикладна математика і механіка. — № 1120. — 2014. — С. 85 – 94.
8. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. — 2001. — Vol. 37, no.4. — P. 464–471.
9. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — Vol. 50, no.8. — P. 1162–1169.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht–Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

Получена 04.05.2014