Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 89–100

УДК 517.9

Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием[1]

С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Найдены достаточные условия разрешимости и конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной линейной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием. В отличие от ранее известных результатов, найденные условия разрешимости и конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной линейной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием не предполагают использования совершенных троек матриц и центральной канонической формы.

Ключевые слова: краевые задачи, дифференциально-алгебраические системы, импульсное воздействие.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [3, 12, 17]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\{[a;b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ p$$

вырожденной ($k \neq n$) дифференциально-алгебраической системы [1, 2, 4, 5, 6, 15]

$$A(t) \ \frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad f(t) \in \mathbb{C}[a, b] \tag{1}$$

с линейным импульсным воздействием [7, 8, 16]

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – $(k \times n)$-матрицы, непрерывные на отрезке $[a, b]$; $\mathcal{L}z(\cdot)$ – линейный векторный функционал вида

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i z(\cdot) : \quad \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\ell_i z(\cdot) : \ \mathbb{C}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^m, \ \ i = 0, \ldots, p-1, \ldots, \quad \tau_0 := a, \quad \ell_p z(\cdot) : \ \mathbb{C}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Достаточные условия однозначной разрешимости и структура гладкого решения двухточечной краевой задачи для системы (1) были

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

получены в монографии [15]. Условия существования и структура непрерывных решений нетеровой краевой задачи для системы (1) в общем случае ($k \neq n$) были получены в монографии [2] с использованием понятия совершенных троек матриц. Конструктивные условия разрешимости и структура гладкого решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографиях [5, 6] с использованием центральной канонической формы. Эффективные численные методы решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографи [4]. Целью данной статьи является нахождение конструктивных достаточных условий разрешимости задачи Коши и линейной нетеровой краевой задачи (1), (2) с импульсным воздействием в общем случае $k \neq n$, в частности, для переопределенных ($k > n$) и недоопределенных ($k \leq n$) вырожденных дифференциально-алгебраических систем без использования совершенных троек матриц, а также центральной канонической формы.

2. Достаточные условия в случае разрешимости относительно производной

При условии [9, 10, 11]

$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)}f(t) = 0 \tag{3}$$

однородная часть системы (1) разрешима относительно $z' = A^+(t)B(t)z$ по меньшей мере одним способом. Обозначим через $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу $X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t)$, $X_0(a) = I_n$ полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [12]. При условии (3) система (1) имеет непрерывное решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + K[A^+(s)f(s)](t), \; K[A^+(s)f(s)](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds;$$

в этом случае фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи

$$z' = A^+(t)B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0$$

ищем в виде

$$X(t) = \left\{ \begin{array}{lll} X_0(t)W_0, & W_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)W_1, & W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_0(t)W_p, & W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}, & t \in [\tau_p;b], \end{array} \right. , \quad W := \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \ldots \\ W_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)\times n}. \tag{4}$$

Матрицу $A^+(t)B(t)$ при этом предполагаем непрерывной. Подставляя матрицу (4) в краевое условие (2), приходим к уравнению

$$QW = 0, \quad Q := \begin{bmatrix} \ell_0 X_0(\cdot) & \ell_1 X_0(\cdot) & \ldots & \ell_p X_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n(p+1)}. \tag{5}$$

Обозначим $P_Q : \mathbb{R}^{n(p+1)} \to \mathbb{N}(Q)-$ матрицу-ортопроектор. При условии $P_Q = 0$ однородная часть задачи (1), (2) имеет только нулевое решение; если же $P_Q \neq 0$ однородная часть задачи (1), (2) имеет решение вида $z(t,c) = X(t)c$, где

$$W = P_Q C, \quad C \in \mathbb{R}^{n(p+1)\times n}.$$

Пусть

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \; C = \tilde{I} \cdot C^{(0)}, \; \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \cdots\cdots \\ I_n \end{bmatrix},$$

где $P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \ldots, P_Q^{(p)}$ — $(n \times n(p+1))$-мерные блоки ортопроектора P_Q, $C^{(0)}$ — произвольная постоянная $(n \times n)$-матрица, $\tilde{I}$ — постоянная $(n(p+1) \times n)$-матрица. В новых обозначениях общее решение уравнения (5) определяют матрицы

$$W_0 = P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)}, \; W_1 = P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)}, \ldots, W_p = P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)}, \quad W = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)} \end{bmatrix}$$

Таким образом, при условии $P_{A^*(t)} B(t) = 0$, $P_Q \neq 0$, однородная часть задачи (1), (2) имеет решение $z(t, c) = X(t)c$, $c \in \mathbb{R}^n$, представимое фундаментальной матрицей

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t) P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)}, & t \in [a, \tau_1], \\ X_0(t) P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)}, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_0(t) P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

При условии

$$P_{A^*(t)} B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)} f(t) = 0, \quad A^+(t) f(t) \in \mathbb{C}[a, b] \tag{6}$$

решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) с импульсным воздействием ищем в виде

$$G[A^+(s) f(s); \alpha_i](t) = \begin{cases} X_0(t)\gamma_0 + K[A^+(s) f(s)](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K[A^+(s) f(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_0(t)\gamma_p + K[A^+(s) f(s)](t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

где

$$K[A^+(s) f(s)](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) A^+(s) f(s) ds$$

— оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциально алгебраической системы (1), $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — постоянные, для нахождения которых используем уравнение

$$Q\gamma = \alpha - \mathcal{L}K[A^+(s) f(s)](\cdot), \quad \gamma = \mathrm{col}\,(\gamma_0, \ldots, \gamma_p) \in \mathbb{R}^{n(p+1)},$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\{\alpha - \mathcal{L}K[A^+(s) f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{7}$$

здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$. Следуя традиционной классификации краевых задач [12], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим; в этом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая лемма.

Лемма. *При условии $P_{A^*(t)}B(t)=0$ и $A^+(t)B(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ однородная часть задачи (1), (2) имеет решение $z(t,c)=X(t)c,\ c\in\mathbb{R}^n$, представимое фундаментальной матрицей (4). При условии (6) линейная неднородная задача для дифференциально алгебраической системы (1) с импульсным воздействием (2) в критическом случае разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (7); в этом случае задача (1), (2) имеет решение*

$$z(t)\in\mathbb{C}^1\{[a;b]\setminus\{\tau_i\}_I\},\quad i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

представимое фундаментальной матрицей вида (4)

$$z(t,c)=X(t)c+G[A^+(s)f(s);\alpha_i](t),\quad c\in\mathbb{R}^n$$

и обобщенным оператором Грина

$$G[A^+(s)f(s);\alpha](t)=\left\{\begin{array}{ll} X_0(t)\bar\gamma_0+K[A^+(s)f(s)](t), & t\in[a,\tau_1[,\\ X_0(t)\bar\gamma_1+K[A^+(s)f(s)](t), & t\in[\tau_1,\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , & \dots\dots\dots\ ,\\ X_0(t)\bar\gamma_p+K[A^+(s)f(s)](t), & t\in[\tau_p,b] \end{array}\right. \tag{8}$$

задачи (1), (2) с импульсным воздействием; здесь

$$\mathrm{col}\ (\bar\gamma_0,\ \bar\gamma_1,\dots,\ \bar\gamma_p):=Q^+\{\ \alpha-\mathcal{L}K[A^+(s)f(s)](\cdot)\}.$$

Утверждение леммы существенно упрощается в некритическом случае ($P_{Q^*}=0$), при этом линейная неднородная задача для дифференциально-алгебраической системы (1) с импульсным воздействием (2) разрешима для любых неоднородностей.

Пример 1. Требованиям доказанной леммы удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений переопределенной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием типа

$$A(t)\ \frac{dz}{dt}=B(t)z+f(t),\quad t\in[0;2\pi],\quad t\neq\tau_1:=\frac{2\pi}{3},\quad t\neq\tau_2:=\frac{4\pi}{3},\quad \mathcal{L}z(\cdot)=\alpha, \tag{9}$$

где

$$A(t):=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix},\quad B(t):=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\quad \alpha:=\frac12\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$f(t):=\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix},\quad \mathcal{L}z(\cdot):=\begin{pmatrix} z\left(\frac{2\pi}{3}+0\right)-z\left(\frac{4\pi}{3}-0\right)\\ z\,(0)-z\,(2\pi)\end{pmatrix}.$$

Матрица $A(t)$ определяет непрерывную псевдообратную матрицу $A^+(t)$ и ортопроектор

$$A^+(t)=\frac12\begin{pmatrix}\cos t & -2\sin t & \cos t\\ \sin t & 2\cos t & \sin t\end{pmatrix},\quad P_{A^*(t)}=\frac12\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

при этом

$$A^+(t)B(t) = J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+(t)f(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Условие (3) выполнено, следовательно решение однородной части дифференциально алгебраической системы (9) определяет нормальная ($X(0) = I_2$) фундаментальная матрица

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

при этом

$$Q = \begin{pmatrix} O & \sqrt{3}J_2 & O \\ I_2 & O & -I_2 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & O & I_2 \\ O & O & O \\ I_2 & O & I_2 \end{pmatrix}, \; I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0; \frac{2\pi}{3}[, \\ O, & t \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[, \\ X_0(t), & t \in [\frac{4\pi}{3}; 2\pi]. \end{cases}$$

Поскольку $P_{Q^*} = 0$, постольку для задачи (9) имеет место некритический случай, при она разрешима для любых неоднородностей. Оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциальной системы (9)

$$K[A^+(s)f(s)](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

определяет вектор

$$\bar{\gamma} = Q^+\{\alpha_1 - \mathcal{L}K[A^+(s)f(s)](\cdot)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}_1 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_2 = 0.$$

Таким образом, для задачи (9)

$$G[A^+(s)f(s);\alpha](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [0, \tau_1[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_2 + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_2, 2\pi]. \end{cases}$$

Доказанная лемма является обобщением аналогичных утверждений [7, 8] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны лемма является обобщением аналогичных утверждений [13, 14] на случай с импульсного воздействия вида (2).

3. Случай неразрешимости относительно производной

Предположим, что матрица $B^+(t)$ непрерывна и условие $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ не выполнено; при этом однородная часть системы (1) не разрешима относительно производной. При условии [10, 11]

$$P_{A^*(t)}B(t) \neq 0, \quad P_{B^*(t)}A(t) = 0, \quad P_{B^*(t)}f(t) = 0, \quad B^+(t) \in \mathbb{C}[a, b] \tag{10}$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно неизвестной $z = B^+(t)A(t) \cdot z'$. Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга δ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным

$$B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t), \quad \det S(t) \neq 0$$

преобразованием подобия она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}, \quad J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \det J_\delta(t) \neq 0, \quad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

Обозначим вектор

$$y(t) = S^{-1}(t)z(t) := \mathrm{col}\ (u(t), v(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^\delta, \quad v(t) \in \mathbb{R}^\omega, \quad \omega := n - \delta.$$

При условии (10) однородная часть системы (1)

$$J(t) \cdot y' = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) \cdot y$$

приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Отметим, что уравнение (11), вообще говоря, не разрешимо относительно производных

$$P_{J^*(t)}(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) = P_{J^*(t)} \neq 0;$$

здесь ортопроектор

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} O_\delta(t) & O \\ O & I_\omega \end{pmatrix}, \quad P_{J^*(t)} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J^*(t))$$

и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

С другой стороны, уравнение (11) разрешимо при условии $v(t) \equiv 0$. Для нахождения первой из компонент $u(t) \in \mathbb{R}^\delta$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)) \cdot u$. Предположим, что матрица $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_\delta(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$Y'_\delta(t) = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)) \cdot Y_\delta(t), \quad Y_\delta(a) = I_\delta.$$

Однородная часть системы (1) имеет решение $y(t, c_\delta) = Y(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$, определяемое матрицей

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \\ O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (10) однородная часть системы (1) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta, \quad X_0(t) = S(t) \cdot Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times\delta}, \ \ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

при этом задача Коши $z(a) = c$ для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) разрешима для любого вектора [12]

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \ \ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \ \ \mathbb{R}^\delta = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t));$$

здесь $P_{X_0(t)}$ — ортопроектор матрицы $X_0(t)$. При условии (10) неоднородная система (1) приводится к виду

$$J(t) \cdot y' = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) \cdot y + S^{-1}(t)B^+(t)f(t). \tag{12}$$

Неоднородность $S^{-1}(t)B^+(t)f(t)$ системы (12) представима двумя компонентами

$$S^{-1}(t)B^+(t)f(t) = \mathrm{col}\ (\varphi(t), \psi(t)),$$

где

$$\varphi(t) = (I_\delta \ \ O)S^{-1}(t)B^+(t)f(t) \in \mathbb{R}^\delta, \ \ \psi(t) = (O \ \ I_{n-\delta})S^{-1}(t)B^+(t)f(t) \in \mathbb{R}^\omega.$$

Система (12) расщепляется на обыкновенное дифференциальное и функциональное уравнения

$$u' = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)) \cdot u + J_\delta^{-1}(t)\varphi(t) + \psi(t), \quad v + \psi(t) = 0.$$

При условии $\varphi(t) \in \mathbb{C}[a, b], \ \ \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t)\psi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ система (12) имеет решение вида

$$y(t, c) = Y(t)c_\delta + K[\varphi(s), \psi(s)](t), \ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где

$$K[\varphi(s), \psi(s)](t) := \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \int_a^t Y_\delta^{-1}(s)(J_\delta^{-1}(s)\varphi(s) + \mathfrak{S}_{\delta\omega}(s)\psi(s))ds \\ -\psi(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (10) для непрерывной матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ система (1) имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s)](t), \ \ c_\delta \in \mathbb{R}^\delta, \quad \mathcal{K}[f(s)](t) = S(t) \cdot K[\varphi(s), \psi(s)](t).$$

При условии (10) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ частное решение неоднородной дифференциально алгебраической задачи с импульсным воздействием (1), (2) представимо в виде

$$\mathcal{G}[f(s); \alpha](t) = \left\{ \begin{array}{ll} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t)\bar{\gamma}_p + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_p; b]. \end{array} \right.$$

Здесь

$$\text{col}\,(\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_1, \dots,\ \bar{\gamma}_p) := Q^+\{\ \alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\}.$$

В критическом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга δ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии (10) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ однородная часть линейной вырожденной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) с импульсным воздействием имеет решение*

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta, \quad \delta = \text{rank}\ B^+(t)A(t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (4); в этом случае неоднородная задача (1), (2) при условии

$$P_{Q^*}\{\alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\}\ = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \tag{13}$$

имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}[f(s); \alpha](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где

$$\mathcal{G}[f(s); \alpha](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t)\bar{\gamma}_p + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\tau_p; b]. \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (1), (2) с импульсным воздействием в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы (1) относительно производной. Здесь

$$\text{col}\,(\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_1, \dots,\ \bar{\gamma}_p) := Q^+\{\ \alpha - \mathcal{L}\mathcal{K}[f(s)](\cdot)\}, \quad \mathcal{K}[f(s)](t) = S(t) \cdot K[\varphi(s), \psi(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (1) в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы (1) относительно производной.

Доказанная теорема является обобщением аналогичных утверждений [7, 8] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны теорема является обобщением аналогичных утверждений [13, 14] на случай с импульсного воздействия вида (2). Существенным отличием вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) в случае $\omega \neq 0$ является прямоугольность матрицы $X_0(t)$, не позволяющая для решения неоднородной дифференциально-алгебраической системы (1) непосредственно использовать конструкцию оператора Грина задачи Коши [7, 8].

Пример 2. Требованиям теоремы удовлетворяет задача о построении решений вырожденной дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\ \frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad t \in [-2\pi; 2\pi], \quad t \neq \tau_i := \pm\pi, \quad i = 1,\ 2, \tag{14}$$

с импульсным воздействием

$$\mathcal{L}z(\cdot) := \begin{pmatrix} z(-2\pi) - z(0) \\ 0 \\ z(0) - z(2\pi) \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{15}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) := 4\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (10) выполнено. Используя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos 2t}{\sin 2t - 1} \\ \frac{\cos 2t}{\sin 2t - 1} & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = -\frac{2\cos t}{\cos t - \sin t},$$

приводим решение $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^2$ однородной части системы (14) без импульсного воздействия к виду

$$X_0(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

следовательно

$$Q = (1 - e^{2\pi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & O & I_2 \\ O & 2I_2 & O \\ I_2 & O & I_2 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для задачи (14), (15) имеет место критический случай, при этом однородная часть системы (14) с импульсным воздействием (15) имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^1,$$

представимое фундаментальной матрицей

$$X(t) = \begin{cases} O, & t \in [-2\pi; -\pi[, \\ X_0(t), & t \in [-\pi; \pi[, \\ O, & t \in [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (14) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s)](t) = \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix},$$

при этом условие (13) выполнено, следовательно задача (14), (15) имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}[f(s); 0](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$\mathcal{G}[f(s);0](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [-2\pi; -\pi[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [-\pi; \pi[, \\ X_0(t)\bar{\gamma}_2 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\pi; 2\pi]; \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи с импульсным воздействием (14), (15); здесь

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad \bar{\gamma}_1 = 0.$$

В некритическом случае, а именно, при условии $P_{Q^*} = 0$, требование (13) выполняется, следовательно, линейная неоднородная задача (1), (2) с импульсным воздействием разрешима для любых неоднородностей $f(t) \in C[a,b]$ и $\alpha \in \mathbb{R}^m$, при этом вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующее утверждение.

Следствие. *Предположим, что матрица $B^+(t)A(t)$ постоянного ранга δ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии (10) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ однородная часть линейной вырожденной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) с импульсным воздействием имеет решение, представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (4); в этом случае неоднородная задача (1), (2) имеет решение*

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}[f(s);\alpha](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где $\mathcal{G}[f(s);\alpha](t)$ — обобщенный оператор Грина задачи (1), (2) с импульсным воздействием в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы (1) относительно производной.

Доказанное следствие является обобщением аналогичных утверждений [7, 8] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны следствие является обобщением аналогичных утверждений [13, 14] на случай с импульсного воздействия вида (2).

Пример 3. Требованиям следствия удовлетворяет задача о построении решений вырожденной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad \mathcal{L}z(\cdot) = 0, \quad t \in [0; 2\pi], \quad t \neq \tau_1 := \pi, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{L}z(\cdot) := \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (z(0) - z(\pi - 0)) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (z(\pi + 0) - z(2\pi)) \end{array} \right],$$

кроме того

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) := 4\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (10) выполнено. Решение $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta, \ c_\delta \in \mathbb{R}^1$ однородной части системы (16) без импульсного воздействия имеет вид

$$X_0(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

следовательно $P_{Q^*} = 0$. Таким образом, для задачи (16) имеет место некритический случай, при этом неоднородная система (16) с импульсным воздействием имеет только тривиальное решение. Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (16) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s)](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Обобщенный оператор Грина задачи с импульсным воздействием (16) имеет вид

$$\mathcal{G}[f(s);0](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma_0} + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [0;\pi[, \\ X_0(t)\bar{\gamma_1} + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\pi;2\pi]; \end{cases},$$

где

$$\bar{\gamma_0} = -\frac{2\sqrt{2}\,(1+4e^{\pi})}{5\,(1+e^{\pi})}, \quad \bar{\gamma_1} = -\frac{2\sqrt{2}\,\left(1+e^{\pi}+3e^{2\pi}\right)}{5\,(1+e^{\pi})}.$$

В том случае, когда матрица $B^+(t)A(t)$ — постоянного ранга δ и имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической, достаточные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной линейной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2) могут быть получены аналогично [10, 11].

Список цитируемых источников

1. *Бойчук А.А., Шегда Л.М* Вироженные нетеровы краевые задачи // Нелинейные колебания. — 2007. — Т.10, №3. — С. 303–312.
2. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 287 с.
4. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
5. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.
6. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.
7. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т.37, №8. — С. 1132–1135.
8. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады РАН. — 2001. — Т.379, №2. — С. 170–172.
9. *Чуйко С. М.* Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально алгебраических систем // Abstr. of Int. Conf. “Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation”, Киев, 25–27.05.2011. — С. 137.
10. *Чуйко С. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. — 2013. — Т.5, №5. — С. 769–783.
11. *Чуйко С.М.* Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Spectral and Evolution Problems. — no.23. — 2013. — С. 148–157.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht–Boston: VSP, 2004. — XIV+317 pp.

13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Vol.53, no.6. — P. 777–788.
14. *Boichuk A., Langerova M., Ruzickova M., Voitushenko E.* Systems of singular differential equations with pulse action // Advances in Difference Equations. — 2013. — Vol.1. — P. 1–11.
15. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 pp.
16. *Pignani T. J., Whyburn W. M.* Differential Systems with Interface and General Boundary Conditions // F. Elisha Mitchell Sci. Soc. — 1956. — № 72. — P. 1–14.
17. *Sčhwabik S.* Differential Equations with Interface Conditions// Časopis Pro pestovani matematiky. — 1980. — roč. 105. — P. 391–410.

Получена 31.03.2014