Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 121–134

УДК 681.5.037.6

Алгебраический подход к формированию быстрых алгоритмов исследования абсолютной устойчивости

А. Т. Барабанов*, **А. С. Лисогурский****

*Севастопольский национальный технический университет
Севастополь 99053. *E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua*
**Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности,
Севастополь 99015. *E-mail: lisogurskiy@gmail.com*

Аннотация. Работа посвящена развитию алгебраического подхода в исследовании частотных критериев абсолютной устойчивости и применению аналитических методов в задаче построения быстрых методов анализа условий абсолютной устойчивости многомерных нелинейных систем. В предлагаемых методах континуальный анализ частотных условий абсолютной устойчивости с априорно задаваемыми параметрами заменяется эквивалентными условиями, подразумевающими анализ точно определенного числа значений вещественных многочленов и рациональных функций без необходимости априорного указания значений неопределенных параметров. Программная реализация соответствующих методов характеризуется значительным снижением вычислительных затрат и возможностью выполнения многопараметрического анализа устойчивости многомерных нелинейных систем.

Ключевые слова: абсолютная устойчивость, критерий абсолютной устойчивости, вещественный полиномиальный анализ, алгебраический критерий, машинно-ориентированный метод, многомерные нелинейные системы.

1. Введение и постановка задачи

Как известно частотные методы широко применяются в теории и проектировании линейных систем. После появления теоремы В. М. Попова они заняли прочное место и в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем. Важнейшие результаты этой теории формулируются в терминах частотных характеристик систем, которые исключительно наглядно представляют условия устойчивости, в особенности для одномерных систем простой структуры с типовыми звеньями первого и второго порядков. Построение частотных годографов и анализ условий устойчивости в этом случае не вызывает затруднений для широкого круга практических задач. Графоаналитические методы оказываются удобными и эффективными средствами исследований.

Однако с ростом сложности описания линейной части системы, когда передаточные функции являются рациональными функциями общей конструкции, даже построение частотного годографа и его анализ становятся непростой задачей. Это объясняется тем, что континуум точек только приближенно можно представить дискретным множеством, причем это представление требует значительных временных ресурсов для достижения необходимой точности выявления свойств годографа.

Наконец, следует отметить, что для наиболее сложных конструкций частотных критериев абсолютной устойчивости (многомерные системы) возможности графической интерпретации критериев практически исчезают.

Вместе с тем представляют интерес и существенное практическое значение аналитические методы анализа частотных критериев абсолютной устойчивости без каких-либо графических построений. Подобный подход впервые был использован Шиляком в работе [16], где, полагая известным неопределенный параметр θ, формулируется алгебраический критерий на основе анализа частотного критерия абсолютной устойчивости Попова. Позднее в работе [15] Сафонов и Вецнер получили компьютерно-ориентированный частотный критерий анализа абсолютной устойчивости систем с неубывающей монотонной нелинейностью. В [9] рассматривается алгебраическое содержание критерия В. М. Попова для случая одной нелинейности. Как и в работе Шиляка неопределенный параметр полагается известным, а проверка основного условия критерия сводится к задаче отделения действительных нулей заданного полинома, при этом предлагается схема итеративного поиска нулей по известным коэффициентам полинома. В работе [15] И. Б. Юнгер представил алгебраический критерий абсолютной устойчивости, основанный на проверке набора полиномов на гурвицевость. Данный подход получил развитие в работе [10], где рассматривается векторный алгебраический критерий абсолютной устойчивости для случая стационарных нелинейностей. Абсолютная устойчивость здесь понимается не в смысле асимптотической устойчивости в целом тривиального решения системы, а в смысле существования несобственных интегралов вида [10]

$$\int_0^\infty |\xi(t)|^2\,dt < \infty, \qquad \int_0^\infty |x(t)|^2\,dt < \infty.$$

Проверка условий абсолютной устойчивости здесь также сводится к задаче отделения действительных нулей полиномов, коэффициенты которых зависят от параметров линейного и нелинейного блоков системы, а также неопределенных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. Для решения данной задачи предлагается [10] использовать метод Штурма, критерий неотрицательности полиномов Шиляка, модифицированные алгоритмы Рауса и Гурвица.

Тем не менее, наличие неопределенных параметров в условиях упомянутых алгебраических критериев, а также сложная процедура перехода к эквивалентным алгебраическим неравенствам затрудняет их использование на практике. Другими словами, авторы упомянутых работ [9, 10, 14, 15, 16] концентрируются на решении задачи отделения действительных корней полиномов. Предлагаемые ими алгебраические критерии выполнения частотных неравенств рассматриваемых теорем не решают проблему неопределенного выбора значений параметров, и в итоге сводятся к перебору в континууме.

В настоящей статье ставится задача дальнейшего развития алгебраического подхода [2, 3, 5] в анализе частотных критериев абсолютной устойчивости в ее классическом смысле как асимптотической устойчивости в целом тривиального решения системы (по А. М. Ляпунову). Рассматриваемый подход основан на решении общей проблемы Рауса-Гурвица в теории систем [6, с дальнейшими ссылками] и идее локализации анализа полиномиальной формы классических частотных критериев, когда частотные условия для рациональных функций трансформируются в адекватные условия для вещественных многочленов, требующих лишь анализа точно определенного множества их значений на вещественной оси. Также рассматривается задача получения сравнительной оценки временных ресурсов, требующихся для компьютерной реализации частотного и алгебраического подходов в применении классических критериев абсолютной устойчивости.

2. Полиномиальный анализ типичных частотных критериев абсолютной устойчивости одномерных систем

Рассмотрим типичные частотные критерии абсолютной устойчивости одномерных систем. По [5]

1) круговой
$$\mathrm{Re}\,[1+k_1W(j\omega)]\,[1+k_2W(j\omega)]^*>0, \tag{1}$$

2) В. М. Попова
$$\frac{1}{k}+\mathrm{Re}\,[(1+j\omega\theta)W(j\omega)]>0, \tag{2}$$

3) В. А. Якубовича для систем с дифференцируемой нелинейностью
$$\mathrm{Re}\Big\{\,[1+k_1W(j\omega)]^*\,[1+k_2W(j\omega)]\,\Big\}+\frac{\theta}{\tau_1+\tau_2\omega^2}\mathrm{Re}[j\omega W(j\omega)]>0. \tag{3}$$

Здесь числа k_1, k_2 характеризуют сектор нелинейности, причем неравенство (2) записано для случая $k_1=0$, $k_2=k$; $W(s)$ — передаточная функция линейной части системы вида
$$W(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{b_0s^m+\dots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+\dots+a_{n-1}s+a_n},$$
где $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, $n>m$, все корни многочлена $q(s)$ лежат в левой полуплоскости.

Указанные типы частотных неравенств существенно различаются тем, что неравенство (1) не содержит неопределенных параметров (нуль-параметрическое неравенство), неравенство (2) содержит один, а неравенство (3) — три параметра, однако для третьего параметра θ в (3) без ограничения общности можно ограничиться лишь значениями $\theta\in\{0,1,-1\}$ [12].

В [5] переход к полиномиальным соотношениям осуществляется путем представления частотных неравенств с помощью многочленов (и определяемых ими рациональных функций) вещественной переменной на отрицательной полуоси. Так для частотных характеристик $P(\omega)=\mathrm{Re}W(j\omega)$, $Q(\omega)=\mathrm{Im}W(j\omega)$, $M^2(\omega)=|W(j\omega)|^2$, $M^2(\omega)=W(j\omega)W(-j\omega)$, из которых следует при $x=-\omega^2$
$$\left.\begin{aligned}
&P(\omega)=A(x)/D(x),\quad \omega Q(\omega)=B(x)/D(x),\quad M^2(\omega)=d(x)/D(x),\\
&A(s^2)=\frac{1}{2}[p(s)q(-s)+p(-s)q(s)]=\text{чет}\{p(s)q(-s)\},\\
&B(s^2)=\frac{1}{2}[(-s)p(s)q(-s)+sp(-s)q(s)]=\text{чет}\{(-s)p(s)q(-s)\},\\
&D(s^2)=q(s)q(-s)=\text{чет}\{q(s)q(-s)\},\quad d(s^2)=p(s)p(-s)=\text{чет}\{p(s)p(-s)\},
\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}
&A(x)=u(x)U(x)-xv(x)V(x), && B(x)=x[u(x)V(x)-v(x)U(x)],\\
&D(x)=U^2(x)-xV^2(x), && d(x)=u^2(x)-xv^2(x)],
\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}
&u(x)=b_m+b_{m-2}x+b_{m-4}x^2+\dots, && v(x)=b_{m-1}+b_{m-3}x+b_{m-5}x^2+\dots,\\
&U(x)=a_n+a_{n-2}x+a_{n-4}x^2+\dots, && V(x)=a_{n-1}+a_{n-3}x+a_{n-5}x^2+\dots,
\end{aligned}\right\}$$
$$p(s)=u(s^2)+sv(s^2),\quad q(s)=U(s^2)+sV(s^2).$$

Здесь чет$\{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots\} = a_0 + a_2 s^2 + \dots$.

В результате критерии (1), (2), (3) принимают равносильную полиномиальную форму

1) круговой

$$\pi(x) = G(x) > 0, \; x \le 0; \tag{4}$$

2) В. М. Попова

$$\pi(x) = B(x)[R(x) - \theta] > 0, \; x \le 0; \tag{5}$$

3) В. А. Якубовича для систем с дифференцируемой нелинейностью

$$\pi(x) = G(x)[\tau_1 - \tau_2 x - \theta r(x)] > 0, \; x \le 0. \tag{6}$$

Здесь $G(x) = D(x) + (k_1 + k_2)A(x) + k_1 k_2 d(x)$, $R(x) = G(x)/B(x)$, $r(x) = 1/R(x)$. В анализе неравенств (4), (5), (6) также будем использовать следующее утверждение.

Лемма ([5]). *Если неравенства* (5), (6), $\tau_1 > 0$ *выполняются при* $\theta \ne 0$, *то*

а) верно неравенство

$$G(0) > 0;$$

б) для всех различных вещественных отрицательных корней β_i, $i = 1, 2, \dots, s$ *многочлена* $B(x)$

$$G(\beta_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, s;$$

в) для всех различных вещественных отрицательных корней γ_i, $i = 1, 2, \dots, l$ *многочлена* $G(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{либо } B(\gamma_i) < 0, \; i = 1, 2, \dots, l, \\ \textit{либо } B(\gamma_i) > 0, \; i = 1, 2, \dots, l, \end{array}\right\}$$

Отметим, что в случае, когда многочлен $\pi(x)$ не содержит неопределенных параметров, как в круговом критерии (4), исследование абсолютной устойчивости сводится к анализу распределения корней многочлена на вещественной оси. Решение этой задачи может быть получено с помощью алгоритмов Рауса-Гурвица [4] конечным числом арифметических операций над коэффициентами многочлена $\pi(x)$. Также могут использоваться численные алгоритмы поиска корней многочлена по его коэффициентам.

При наличии в условиях абсолютной устойчивости неопределенных параметров соответствующая оценка может быть получена путем анализа свойств многочленов и рациональных функций, определяющих передаточную функцию системы [5]. Так из соотношения (5) видно, что для того, чтобы неравенство было справедливо при всех $x < 0$, необходимо выбирать значение θ так, чтобы в интервалах положительности $B(x)$ это значение всегда было меньше значений $R(x)$ в соответствующем интервале, в интервалах отрицательности $B(x)$ – соответственно больше. На рис. 1 представлена иллюстрация данного утверждения.

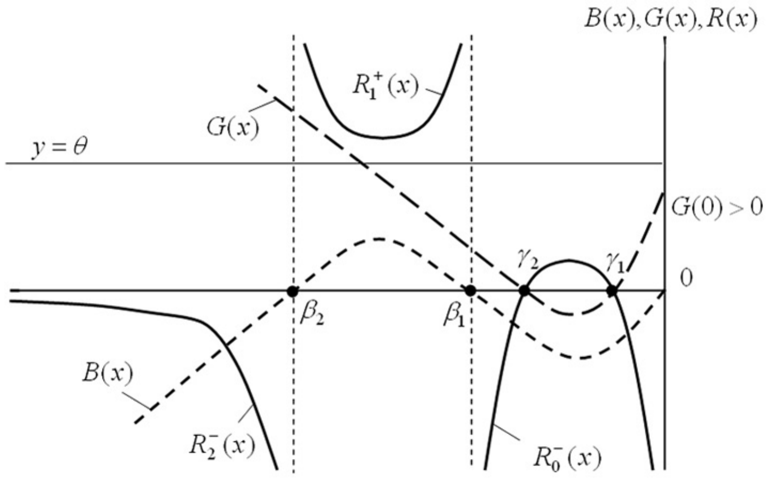

Рис. 1. Многочлены $B(x)$, $G(x)$, ветви функции $R(x)$

Функция $R(x)$ имеет разрывы в точках $x = \beta_i,\ i \in 0, 1, ..., s$ (β_i – корни многочлена $B(x)$) и распадается на ветви $R_i^+(x)$ и $R_i^-(x)$ (в зависимости от знака $B(x)$). Во всех конечных интервалах $(\beta_{i+1}), \beta_i)$ ветви имеют экстремумы, определяемые корнями многочлена $E(x) = G'(x)B(x) - G(x)B'(x)$. Если все корни β_i четной кратности или многочлен $B(x)$ вовсе не имеет отрицательных корней, то он не меняет знака на отрицательной полуоси $x < 0$. Итак, функция $R(x)$ либо разрывна с ветвями одного знакового индекса ($R^+(x)$ или $R^-(x)$), либо непрерывна при $x < 0$ и неограничена на концах интервала $(-\infty, 0)$, представляя собой одну ветвь ($R^+(x)$ или $R^-(x)$).

Иными словами, для выполнения неравенства (5) необходимо выполнение условий леммы, а также одного из следующих пунктов [5]:

1) в случае, когда многочлен $B(x)$ не меняет знака на отрицательной полуоси $x < 0$, необходимы и достаточны неравенства

$$\theta < R^+_{min} \text{ при } B(x) \geq 0 \text{ и } \theta > R^-_{max} \text{ при } B(x) \leq 0; \text{ или}$$

2) в случае, когда многочлен $B(x)$ меняет знак на отрицательной полуоси $x < 0$, необходимы и достаточны неравенства

$$R^-_{max} < \theta < R^+_{min}$$

Здесь R^+_{min} – наименьшее и R^-_{max} – наибольшее значения $R(x)$ на множестве ветвей $R_i^+(x)$ и $R_i^-(x)$ соответственно. Таким образом, неопределенный поиск значений параметра θ здесь заменяется вполне определенной процедурой определения экстремальных точек рациональной функции $R(x)$, а в частных случаях – вычислением корней многочленов $B(x)$ и $G(x)$.

Можно предложить следующую процедуру анализа условий абсолютной устойчивости системы с одним стационарным нелинейным блоком (критерий В. М. Попова):

1) анализ необходимых условий устойчивости исследуемой нелинейной системы (устойчивость соответствующей системы сравнения);

2) построение многочленов $B(x)$, $G(x)$, $R(x)$ в (5) по известной передаточной функции линейной части системы и требуемому размеру K-сектора нелинейности;

3) проверка условия леммы $G(0) > 0$;

4) вычисление отрицательных вещественных корней многочленов $B(x)$ и $G(x)$;

5) если многочлен $B(x)$ не имеет вещественных отрицательных корней, то условия абсолютной устойчивости для стационарных нелинейностей из заданного сектора выполняются, иначе переходим к следующему шагу;

6) последовательная проверка условий б) и в) леммы;

7) если многочлен $B(x)$ не меняет знака при $x < 0$, то условия абсолютной устойчивости выполняются, иначе переходим к следующему шагу;

8) поиск экстремумов R^+_{min}, R^-_{max} ветвей функции $R(x)$ и проверка условия $R^-_{max} < R^+_{min}$.

Положительным исходом представленной вычислительной процедуры считается случай, когда либо выполнены пункты 1 – 5, либо когда выполнены пункты 1 – 7 кроме пункта 5 (случай, когда многочлен $B(x)$ имеет вещественные отрицательные корни, но не меняет знак при $x < 0$, т.е. все корни четной кратности), либо когда выполнены все пункты кроме 5 и 7 (случай, когда многочлен $B(x)$ меняет знак при $x < 0$).

Таким образом, одно-параметрическое неравенство (5) сводится к нуль-параметрической вычислительной процедуре (процедуре однозначной, без параметра). При этом область допустимых значений параметра θ в условии (5) однозначно определяется свойствами передаточной функции линейной части исследуемой системы, в частности локальными минимумами и максимумами рациональной функции $R(x)$: R^+_{min} и R^-_{max}.

Аналогичным образом выполняется полиномиальный анализ критерия для системы с дифференцируемой нелинейностью в форме (6), при этом число неопределенных параметров в общем случае сокращается до одного, в частных случаях вычислительная процедура является нуль-параметрической [7, с дальнейшими ссылками].

3. Полиномиальный анализ частотных критериев абсолютной устойчивости многомерных систем

В этом случае частотные критерии абсолютной устойчивости принимают вид [12]

1) для кругового критерия

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \mathrm{Re}\{[\mathbf{I}_m + \mathbf{K}_1\mathbf{W}(j\omega)]\tau[\mathbf{I}_m + \mathbf{K}_2\mathbf{W}(j\omega)]\} > 0,\ -\infty < \omega < \infty;$$

2) для критерия В. М. Попова (стационарные нелинейности из сектора)

$$\mathbf{Z}(\tau, \Theta, j\omega) = \tau\mathbf{K}^{-1} + \mathrm{Re}[(\tau + j\omega\Theta)\mathbf{W}(j\omega)] > 0, \quad -\infty < \omega < \infty; \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{K}_1 = \mathrm{diag}\{k_1^1, \ldots, k_1^m\}$, $\mathbf{K}_2 = \mathrm{diag}\{k_2^1, \ldots, k_2^m\}$ — границы секторов одномерных нелинейностей, неравенство (7) записано для случая $\mathbf{K}_1 = 0$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}$; $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \ldots, \tau_m > 0$, $\Theta = \mathrm{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ — произвольные диагональные матрицы; m — число нелинейных блоков; $\mathbf{W}(j\omega)$ — матричная передаточная функция линейной части системы; $\mathbf{Z}(\cdot)$ — эрмитова матрица, а $\mathrm{Re}\mathbf{Z} = (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^*)$, где звездочка означает эрмитово сопряжение.

По существу, применение векторных критериев подразумевает указание такой совокупности вещественных параметров, при которых матричное частотное неравенство выполняется. В отличие от скалярного случая, выбор значений неопределенных параметров и анализ положительной определенности эрмитовых матриц критериев не может быть заменен простыми геометрическими построениями [7, с дальнейшими ссылками].

Рассмотрим вещественную полиномиальную форму критериев для случая двух стационарных нелинейностей (В. А. Якубович, [12]). Полагая $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$, $\theta_1 = \tau_1\vartheta_1$, $\theta_2 = \tau_2\vartheta_2$, находим

$$Z_{11}(\tau_1, \vartheta_1; j\omega) = \tau_1\big(\frac{1}{k_1} + \mathrm{Re}(1 + j\omega\vartheta_1)W_{11}(j\omega)\big);$$
$$Z_{22}(\tau_2, \vartheta_2; j\omega) = \tau_2\big(\frac{1}{k_2} + \mathrm{Re}(1 + j\omega\vartheta_2)W_{22}(j\omega)\big);$$
$$Z_{12}(\tau_1, \tau_2, \vartheta_1, \vartheta_2; j\omega) = \frac{1}{2}\big(\tau_1(1 + j\omega\vartheta_1)W_{12}(j\omega) + \tau_2(1 - j\omega\vartheta_2)W_{21}(-j\omega)\big);$$
$$Z_{21}(\tau_1, \tau_2, \vartheta_1, \vartheta_2; j\omega) = \bar{Z}_{12}(\tau_1, \tau_2, \vartheta_1, \vartheta_2; j\omega);$$

Для того чтобы матрица $\mathbf{Z}(j\omega)$ была положительно определенной при всех ω: $-\infty < \omega < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы ее главные диагональные миноры были положительны

$$Z_{11} > 0; \quad Z_{22} > 0; \quad Z_{11}Z_{22} - |Z_{12}|^2 > 0. \tag{8}$$

Поскольку по условию критерия $\tau_1, \tau_2 > 0$, неравенства $Z_{11} > 0$, $Z_{22} > 0$ представляются в виде скалярных критериев В. М. Попова. Они определяют область $D(\vartheta)$ допустимых значений ϑ_1, ϑ_2.

Пусть $\tau = \tau_2/\tau_1 > 0$ и введены обозначения

$$a(\vartheta_2, \omega) = (1 + \omega^2\vartheta_2^2)\big|W_{21}(j\omega)\big|^2, \quad c(\vartheta_1, \omega) = (1 + \omega^2\vartheta_1^2)\big|W_{21}(j\omega)\big|^2,$$
$$b(\vartheta_1, \vartheta_2, \omega) = 2\left[\frac{1}{k_1} + \mathrm{Re}(1 + j\omega\vartheta_1)W_{11}(j\omega)\right]\left[\frac{1}{k_2} + \mathrm{Re}(1 + j\omega\vartheta_2)W_{22}(j\omega)\right] -$$
$$- \mathrm{Re}\big[(1 + j\omega\vartheta_1)(1 + j\omega\vartheta_2)W_{12}(j\omega)W_{21}(j\omega)\big].$$

Тогда третье условие в (8) может быть представлено в виде неравенства для квадратного трехчлена

$$f(\tau) = -a\tau^2 + 2b\tau - c > 0, \tag{9}$$

при $-\infty < \omega < \infty$, $a > 0$, $c > 0$.

Задаваясь значениями $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in D(\vartheta)$ и $-\infty < \omega < \infty$, будем иметь значения коэффициентов a, b, c и корней $\lambda_{1,2} = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)$ соответствующего квадратного трехчлена. При этом возможны следующие случаи (рис. 2):

1) $\delta = b^2 - ac > 0$. Оба корня вещественные, т.е. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. При τ: $\lambda_2 < \tau < \lambda_1$, $f(\tau) > 0$, т.е. условие положительной определенности матрицы (Z) на данной частоте ω выполняется;

2) $\delta = b^2 - ac < 0$. Это значит, что при данном значении ω многочлен $f(\tau)$ знака не меняет и $f(\tau) < 0$ в силу $a > 0$. Следовательно, третье условие в (8) не выполняется, и матрица (Z) не является положительно определенной, условия абсолютной устойчивости не выполняются.

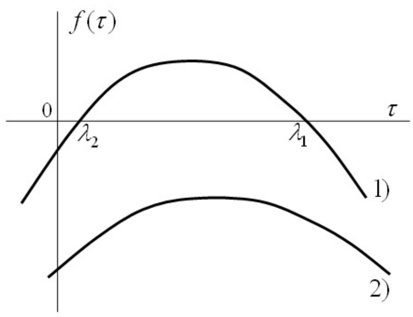

Рис. 2. Корни квадратного трехчлена $f(\tau)$

Для того чтобы неравенство (9) было справедливо во всем диапазоне частот, необходимо и достаточно, чтобы условие $\sup_\omega \lambda_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \omega) < \inf_\omega \lambda_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \omega)$ имело место при всех ω: $-\infty < \omega < \infty$.

Таким образом, необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (7) для случая двух нелинейностей представляют собой совокупность условий

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \exists\, D(\vartheta), \\ 2.\ \exists\, \vartheta_* \in D(\vartheta) \text{ такое, что } b^2 > ac,\ \forall\omega, \\ 3.\ \sup\limits_{\omega} \lambda_2(\vartheta_*, \omega) < \inf\limits_{\omega} \lambda_1(\vartheta_*, \omega). \end{array}\right\} \tag{10}$$

В результате для решения задачи построения наиболее широкого сектора абсолютной устойчивости при известных параметрах системы с двумя стационарными нелинейностями, необходимо для различных значений k_1, k_2 из области устойчивости соответствующей системы сравнения

1) по условиям $Z_{11} > 0$, $Z_{22} > 0$ определить область допустимых значений $D(\vartheta)$;

2) в полученной области произвести поиск подмножества (точек ϑ_*), в котором выполняется второе условие в (10);

3) проверить выполнение третьего условия в (10).

Итак, анализ положительной определенности эрмитовых матриц сводится к исследованию совокупности скалярных неравенств с сокращенным числом априорно задаваемых параметров. Точнее неопределенная процедура поиска значений параметров τ_1, τ_2 заменяется вполне определенной процедурой проверки существования неравенства $\sup_\omega \lambda_2(\omega) < \frac{\tau_2}{\tau_1} < \inf_\omega \lambda_1(\omega)$.

Применяя положения из пункта 2, представим условия (10) в полиномиальной форме. Так частотные условия $Z_{11} > 0$, $Z_{22} > 0$ в (8) трансформируются для вещественных многочленов $\pi_i(x) = G_i(x) - \vartheta_i B_{ii}(x)$, $G_i(x) = D(x)/k_i + A_{ii}(x)$, $x = -\omega^2 \leq 0$, $i = 1, 2$, в эквивалентные условия

$$\rho^-(\pi_i) = 0, \quad \pi_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

где $\rho^-(\pi_i)$ – число всех вещественных отрицательных корней многочлена $\pi_i(x)$.

Тогда задача выделения области априорно задаваемых параметров $D(\vartheta_1, \vartheta_2)$ в условиях (10) заменяется более предпочтительной однозначной вычислительной процедурой из пункта 2 – вычислением коэффициентов и корней многочленов, а также нахождением локальных экстремумов заданных рациональных функций. Так если многочлен $B_{ii}(x)$, $i = 1, 2$ не меняет знака при $x \le 0$, то для соответствующего i получаем допустимую область $\vartheta_i < R^+_{min_i}$ при $B_{ii}(0) > 0$, $\vartheta_i > R^-_{max_i}$ при $B_{ii}(0) < 0$. В противном случае $\vartheta_i \in [R^-_{max_i}, R^+_{min_i}]$.

В свою очередь условие (9) принимает вид

$$f(\tau) = -a(x)\tau^2 + 2b(x)\tau - c(x) > 0, \quad x = -\omega^2 \le 0, \quad \tau > 0, \tag{12}$$

где

$$a(x, \vartheta_2) = (1 - x\vartheta_2^2)\frac{d_{21}(x)}{D(x)}; \quad c(x, \vartheta_1) = (1 - x\vartheta_1^2)\frac{d_{12}(x)}{D(x)};$$

$$\begin{aligned} b(x, \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{2}{D^2(x)}\big[\frac{1}{k_1}D(x) + A_{11}(x) - \vartheta_1 B_{11}(x)\big]\big[\frac{1}{k_2}D(x) + A_{22}(x) - \vartheta_2 B_{22}(x)\big] - \\ - \frac{A_{12}(x)A_{21}(x)}{D^2(x)} - \frac{\tilde{B}_{12}(x)B_{21}(x)}{D^2(x)} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{D^2(x)}[B_{12}(x)A_{21}(x) + B_{21}(x)A_{12}(x)] + \\ + \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{D^2(x)}[-xA_{12}(x)A_{21}(x) - B_{12}(x)B_{21}(x)], \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_{12}(x) = B_{12}(x)/x = u_{12}(x)V_{12}(x) - v_{12}(x)U_{12}(x).$$

Тогда необходимое условие реализации (при соответствующих ϑ_1, ϑ_2) неравенства (12) (второе условие в (10)) заменяется эквивалентными условиями

$$\rho^-(\delta) = 0; \ \delta(0) > 0; \ \delta(x) = b^2(x) - a(x)c(x). \tag{13}$$

Третье условие в (10) в полиномиальной форме сохраняет свой вид, а значения корней зависят от коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$. В компьютерной реализации предлагаемого метода для определения $\sup_x \lambda_2(x)$ и $\inf_x \lambda_1(x)$ можно воспользоваться стандартными итеративными процедурами нахождения экстремумов заданных функций. При этом в качестве точки начального приближения целесообразно указывать середину интервалов непрерывности функций $\lambda_i(x)$.

Аналогично получается комплекс скалярных условий для векторного кругового критерия абсолютной устойчивости системы с двумя произвольными нелинейностями. Таким образом, как и в скалярном случае, аналитические возможности частотных критериев (кругового и В. М. Попова) для двух нелинейностей позволили заменить проверку положительной определенности эрмитовой матрицы критерия с неопределенными параметрами однозначной вычислительной процедурой. Этот результат позволяет реализовать автоматизированные процедуры построения областей абсолютной устойчивости в пространстве параметров нелинейных блоков [7, с дальнейшими ссылками].

4. Оценки вычислительной эффективности предлагаемых методов

Практическое применение предложенных вычислительных методов рассматривается на примере оптимальной системы управления боковым движением летательного аппарата [1, 8]. При этом составлен комплекс программ по автоматизированному исследованию абсолютной устойчивости в пакете Matlab. Выбор системы Matlab как платформы реализации сформулированных методов обусловлен наличием в ней средств по работе с передаточными функциями и полиномами, которые значительно упрощают реализацию предложенных вычислительных методов исследования условий абсолютной устойчивости.

С целью определения степени эффективности предложенных методов для начала оценим вычислительные затраты на построение одной точки частотного годографа и расчет одного корня заданного многочлена. В качестве оценки будем использовать понятия флопа, под которым подразумевается выполнение одной операции с плавающей точкой [11].

Построение одной точки годографа подразумевает вычисление $\mathrm{Re}W(j\omega) = \frac{1}{2}\big[W(j\omega)+W(-j\omega)\big]$ и $\mathrm{Im}W(j\omega) = \frac{1}{2j}\big[W(j\omega)-W(-j\omega)\big]$, которое, в конце концов, сводится к вычислению значений многочленов $p(j\omega)$ и $q(j\omega)$. Известно, что вычисление значения многочлена в одной точке по схеме Горнера оценивается в $2n-1$ флопов, где n – степень многочлена, а под флопом понимается одна операция с плавающей точкой [11]. Тогда несложно видеть, что вычисление значения $W(j\omega)$ в заданной точке потребует $2(m+n)-1$ флопов, где m и n степень многочленов $p(s)$ и $q(s)$ соответственно, а для построения одной точки годографа потребуется $8(m+n)$ флопов. В свою очередь вычисление корней многочлена в современных программных комплексах реализуется путем нахождения собственных чисел по QR-алгоритму сопровождающей матрицы многочлена. В литературе приводятся различные оценки соответствующих вычислительных затрат в зависимости от используемой модификации метода. По [11] количество флопов на нахождение корней многочлена будем оценивать как $10n^3$.

При этом несмотря на то, что одна точка годографа требует значительно меньших затрат, необходимо помнить что количество таких точек для получения ясной картины при построении годографов может исчисляться тысячами в зависимости от свойств системы. Также отметим, что для сложных объектов управления построение частотных годографов связано с двумя проблемами, которые существенно усложняют непосредственное применение частотных критериев абсолютной устойчивости.

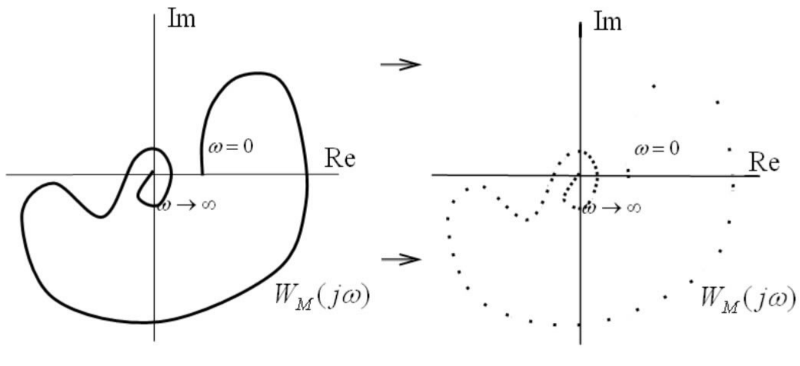

Рис. 3. Проблема выбора шага изменения частоты при построении годографов сложных объектов управления

Во-первых, на малых частотах наблюдается существенное изменение положения точки годографа при незначительном изменении ω, в то время как с ростом частоты скорость изменения положения точки годографа снижается. В результате возникает проблема оптимального выбора шага изменения частоты (рис. 3). С одной стороны, в случае выбора малого шага изменения частоты может наблюдаться переполнение памяти при построении частотного годографа на ЭВМ. Так в системе визуализации математических расчетов MathCad в задаче построения графиков функций существует ограничение в 1 млн. точек. Таким образом, нельзя построить частотный годограф в интервале частот $0 < \omega < 100$ с шагом изменения менее $\Delta\omega = 0,001$. С другой стороны, выбор большего значения $\Delta\omega$ может привести к недостаточно точным результатам исследования. Использование же переменного шага изменения частоты требует дополнительного времени со стороны исследователя.

Во-вторых, в анализе комплекснозначных кривых сложных объектов управления важен выбор изначального масштаба, обеспечивающего полноту получаемой картины, а в задаче поиска наиболее широкого сектора абсолютной устойчивости с заданной точностью может потребоваться многократное изменение масштаба при проведении «предельной» прямой Попова [13] и одновременное рассмотрение нескольких значащих участков (рис. 4).

Пренебрежение указанными особенностями построения и анализа частотных годографов сложных объектов управления может привести к неточным и принципиально неверным результатам. Иными словами, применение частотного подхода в исследовании сложных нелинейных систем нередко подразумевает участие исследователя в формировании окончательного результата, а также содержит множество тонкостей, которые необходимо учитывать в анализе получаемых частотных годографов, что, в целом, может потребовать значительного времени.

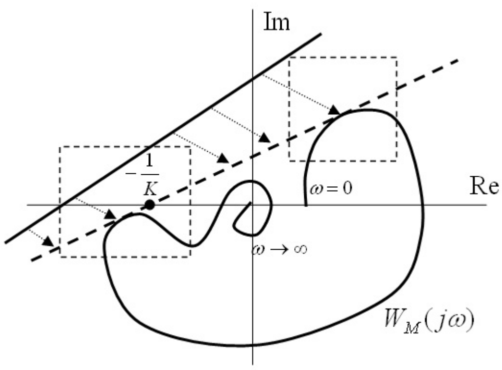

Рис. 4. Необходимость рассмотрения нескольких значащих участков в задаче получения наиболее широкого K-сектора абсолютной устойчивости

Напротив, в предлагаемом алгебраическом подходе исключается континуальный анализ частотных условий абсолютной устойчивости. Он полностью заменяется анализом распределения вещественных отрицательных корней критериальных многочленов и вычислением значений вещественной рациональной функции в конечном числе точек вещественной оси, которое определяется порядком исследуемой системы и ее свойствами. Так для представленного в пункте 2 вычислительного метода анализа условий абсолютной устойчивости критерия В. М. Попова может быть получена следующая оценка количества операций с плавающей точкой:

$$N = 20n^3 + 28n^2 + 55n + 16,$$

где n – порядок системы. При чем эта оценка отражает вычислительные затраты в самом неблагоприятном случае, когда требуется проведение расчетов по всем восьми пунктам процедуры.

Согласно полученной оценке для рассматриваемой системы автоматического управления боковым движением летательного аппарата шестого порядка количество флопов на проверку условий абсолютной устойчивости критерия В. М. Попова составило $N \cong 5,7 \cdot 10^3$. В то время как при использовании частотного подхода только построение модифицированного годографа линейной части системы в интервале частот $\omega \in [0,\ 100]$ с шагом $\Delta\omega = 0,01$ требует на порядок больше флопов – $N \cong 8,8 \cdot 10^5$.

Таблица 1. Время выполнения типовых операций в исследовании абсолютной устойчивости по критерию В. М. Попова

1. Построение частотного годографа.	2 с	1. Проверка необходимых условий устойчивости	<0,1 мс
2. Анализ получаемых комплексно-значных кривых: подбор оптимального масштаба, подбор шага изменения частоты.	3-5 мин	2. Вычисление коэффициентов многочленов $B(x)$, $G(x)$	<0,1 мс
3. Проведение «оптимальных» касательных в решении задачи выделения наиболее широкого K-сектора абсолютной устойчивости.	5-10 мин	3. Вычисление вещественных отрицательных корней многочленов.	<0,1 мс
4. Многократное повторение пунктов 1-3 в задаче выделения областей устойчивости в пространстве параметров системы.	15 мин	4. Вычисление экстремумов R^+_{min}, R^-_{max} ветвей функции $R(x)$.	1,5 мс
		5. Многократное повторение пунктов 1-4 в задаче выделения областей абсолютной устойчивости.	<0,05 с

Фактическое время выполнения соответствующих подпрограмм для системы Matlab на ЭВМ в конфигурации CPU 2GHz, RAM 2GB для решения задачи построения наиболее широкого K-сектора выполнения условий абсолютной устойчивости критерия В. М. Попова на основе разработанных вычислительных методов, с заданной точностью до четвертого знака после запятой составило 0,031 секунды. Решение аналогичной задачи с использованием геометрической интерпретации критерия требует постоянного диалога с исследователем и учета указанных выше тонкостей в анализе получаемых частотных годографов. При этом время, затрачиваемое на соответствующий анализ, может измеряться в десятках минут. В табл. 1 представлена оценка времени выполнения типовых операций в решении задачи построения наиболее широкого сектора абсолютной устойчивости системы управления боковым движением летательного аппарата с помощью критерия В. М. Попова, полученная с использованием ЭВМ в конфигурации CPU 2GHz, RAM

2GB. При этом следует учитывать, что пункты 2 – 4 в геометрической интерпретации критерия В. М. Попова (табл. 1) фактически не могут быть автоматизированы.

5. Заключение

Применение метода вещественного полиномиального анализа частотных критериев в задаче исследования абсолютной устойчивости сложного объекта управления в ее классической постановке (асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения системы) позволило с одной стороны продемонстрировать существенные сложности использования классических частотных методов, а с другой – сформулировать альтернативные однозначные алгебраические методы анализа условий абсолютной устойчивости систем с одной и двумя нелинейностями.

Помимо того, что задача абсолютной устойчисовсти рассматривается в ее классической постановке, существенным преимуществом предлагаемых методов является именно однозначность анализа, т.е. отсутствие в условиях устойчивости неопределенных параметров, которые характерны для частотных и алгебраических критериев абсолютной устойчивости. В результате появляется возможность разрабатывать программное обеспечение полностью автоматизированного анализа условий абсолютной устойчивости многомерных систем управления, в том числе и с несколькими нелинейностями.

Программная реализация предложенных методов характеризуется значительным снижением вычислительных затрат по сравнению с частотным подходом в применении критериев абсолютной устойчивости и позволяет выполнять многопараметрический анализ многомерных нелинейных систем, содержащий построение областей устойчивости в плоскости параметров нелинейностей, затрачивая на это сотые доли секунды.

Список цитируемых источников

1. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш.шк., 1989. — 447 с.
2. *Барабанов А. Т.* Алгебраические критерии абсолютной устойчивости // Динамические системы: респ. междувед. науч. сб. / М-во образования Украины, Симфероп. гос. ун-т им. М. В. Фрунзе. — Киев: 1999. — Вып. 15. — С. 3–13.
3. *Барабанов А. Т.* Алгебраический критерий абсолютной устойчивости в классе систем с дифференцируемой нелинейностью // Динамические системы: респ. междувед. науч. сб. / М-во образования Украины, Симфероп. гос. ун-т им. М. В. Фрунзе. — Киев: 2000. — Вып. 16. — С. 8–15.
4. *Барабанов А. Т.* Анализ распределения корней многочлена на основе обобщенной схемы Рауса // Динамические системы: респ. междувед. науч. сб. / М-во образования Украины, Симфероп. гос. ун-т им. М. В. Фрунзе. — Киев: 1993. — Вып. 13. — С. 107–118.
5. *Барабанов А. Т.* Вещественный полиномиальный анализ частотных критериев абсолютной устойчивости // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2000. — №1. — С. 5–14.
6. *Барабанов А. Т.* Гурвицевы формы решения общей проблемы Рауса // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1994. — №1. — С. 3-–19.
7. *Барабанов А. Т., Лисогурский А. С.* Применение вещественного полиномиального анализа частотных критериев абсолютной устойчивости в задаче построения алгоритмов автоматизированного исследования // Годишник на Технически университет. — Варна: 2010. — Т. 1. — С. 44–49.
8. *Брайсон А.* Новые идеи по теории управления // Аэрокосмическая техника. — 1986. — №8. — С. 31–42.

9. *Герасимов О. И., Шифф К. В., Юнгер И. Б.* Метод численного анализа устойчивости автоматических систем со скалярными нелинейностями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1989. — №2. — С. 80-–86.
10. *Герасимов О. И., Юнгер И. Б.* Частотно-алгебраический анализ абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического управления // Автоматика и телемеханика. — 1992. — №1. — С. 213-–217.
11. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
12. *М*етоды исследования нелинейных систем автоматического управления. / Под ред. Р. А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
13. *С*правочник по теории автоматического управления. / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
14. *Юнгер И. Б.* Алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического управления // Автоматика и телемеханика. — 1987. — №1. — С. 48-–54.
15. *Safonov M. G., Wyetzner G.* Computer-aided stability analysis renders Popov criterion obsolete // IEEE Trans. Automat. Control. — 1987. — V.32, №12. — P. 125-–132.
16. *Siljak D. D.* Nonlinear Systems, Parameters Analysis and Design. — Wiley: New York, 1969. — 646 p.

Получена 12.02.2014