номера k. Решения импульсных систем традиционно предполагаются непрерывными слева.

Для упрощения дальнейших рассуждений перейдем к комплексно сопряженным переменным

$$z = x_1 + ix_2, \qquad \overline{z} = x_1 - ix_2. \tag{1.3}$$

Положим $\lambda = \alpha + i\beta$. В новых переменных система (1.1), (1.2) примет вид

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{|m|\geq 2} G_m z^{m_1}\overline{z}^{m_2}, \qquad t \neq \tau_k, \tag{1.4}$$

$$z(\tau_k^+) = z(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \quad t = \tau_k. \tag{1.5}$$

Точнее, здесь записана только половина уравнений системы. Вторая половина комплексно сопряжена с уравнениями (1.4), (1.5), не содержит дополнительной информации и может быть опущена для сокращения записи. Простые, но громоздкие вычисления позволяют найти явные формулы зависимости коэффициентов G_m уравнения (1.4) от коэффициентов системы (1.1):

$$\begin{aligned}
|m| = 2: \\
G_{20} &= \frac{1}{4}\left(g^1_{20} + g^2_{11} - g^1_{02}\right) + \frac{i}{4}\left(g^2_{20} - g^1_{11} - g^2_{02}\right), \\
G_{11} &= \frac{1}{2}\left(g^1_{20} + g^1_{02}\right) + \frac{i}{2}\left(g^2_{20} + g^2_{02}\right), \\
G_{02} &= \frac{1}{4}\left(g^1_{20} - g^2_{11} - g^1_{02}\right) + \frac{i}{4}\left(g^2_{20} + g^1_{11} - g^2_{02}\right),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
|m| = 3: \\
G_{30} &= \frac{1}{8}\left(g^1_{30} + g^2_{21} - g^1_{12} - g^2_{03}\right) + \frac{i}{8}\left(g^2_{30} - g^1_{21} - g^2_{12} + g^1_{03}\right), \\
G_{21} &= \frac{1}{8}\left(3g^1_{30} + g^2_{21} + g^1_{12} + 3g^2_{03}\right) + \frac{i}{8}\left(3g^2_{30} - g^1_{21} + g^2_{12} - 3g^1_{03}\right), \\
G_{12} &= \frac{1}{8}\left(3g^1_{30} - g^2_{21} + g^1_{12} - 3g^2_{03}\right) + \frac{i}{8}\left(3g^2_{30} + g^1_{21} + g^2_{12} + 3g^1_{03}\right), \\
G_{03} &= \frac{1}{8}\left(g^1_{30} - g^2_{21} - g^1_{12} + g^2_{03}\right) + \frac{i}{8}\left(g^2_{30} + g^1_{21} - g^2_{12} - g^1_{03}\right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Первое приближение импульсной системы (1.4), (1.5) распадается на независимые линейные уравнения для комплексно сопряженных переменных

$$\dot{y} = \lambda y, \quad t \neq \tau_k, \quad y(\tau_k^+) = y(\tau_k)\exp(-\alpha\theta), \quad t = \tau_k. \tag{1.8}$$

Легко видеть, что эта система является устойчивой при любых $\lambda \in \mathbb{C}$, но ни одна траектория не стремится к нулю. Поэтому во всех системах семейства (1.1), (1.2) наблюдается критический случай.

Пусть $\tau_{k_0-1} < t_0 \leq \tau_{k_0}$, $k_0 \geq 1$. Обозначим через $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ решение задачи Коши для линейного приближения (1.8) с начальным условием $y(t_0^+) = y_0$. Тогда для произвольного $k \geq k_0$

$$y(t; t_0, y_0) = y(\tau_k^+)e^{\lambda(t-\tau_k)}, \quad \text{при } \tau_k < t \leq \tau_{k+1}. \tag{1.9}$$

При этом

$$y(\tau_{k_0}) = y_0 e^{\lambda(\tau_{k_0}-t_0)}, \quad y(\tau_{k_0}^+) = y(\tau_{k_0})e^{-\alpha\theta}, \quad y(\tau_{k_0+1}) = y(\tau_{k_0}^+)e^{\lambda\theta} = y(\tau_{k_0})e^{i\beta\theta}.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$y(\tau_{k_0+s}) = y(\tau_{k_0})e^{i\beta\theta s}, \quad y(\tau_{k_0+s}^+) = y(\tau_{k_0}^+)e^{i\beta\theta s}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

и

$$|y(\tau_{k_0+s})| = |y(\tau_{k_0})|, \quad \left|y(\tau_{k_0+s}^+)\right| = \left|y(\tau_{k_0}^+)\right|, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{1.11}$$

Как видим, модуль $|y(t; t_0, y_0)|$ является непрерывной слева θ-периодической функцией. Из (1.10) следует, что решение $y(t; t_0, y_0)$ первого приближения (1.8) также будет непрерывной слева периодической функцией при $t \geq \tau_{k_0}$, если чисела $\beta\theta$ и π соизмеримы. В случае общего положения отношение $\beta\theta/\pi$ не является рациональным числом и потому решение $y(t; t_0, y_0)$ уже не будет периодической функцией, но любая траектория линейного приближения на фазовой плоскости (x_1, x_2) (так же, как и траектория $y(t)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$)

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\operatorname{Re} y(t; t_0, y_0), \operatorname{Im} y(t; t_0, y_0))$$

будет всюду плотна в кольце

$$\left|y(\tau_{k_0}^+)\right| \leq |x| \leq |y(\tau_{k_0})| \quad (\text{при } \alpha > 0). \tag{1.12}$$

2. Построение вспомогательной функции

Введем в рассмотрение множества $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\tau_k, \tau_{k+1})$, $\mathcal{G} = \mathcal{T} \times B_h$. Распространение прямого метода Ляпунова на системы с импульсным воздействием совершенно естественно допускает использование разрывных по времени t функций Ляпунова [20, 21]. Следующий класс $\mathcal{V}_1$ кусочно-дифференцируемых функций часто используется в работах, посвященных устойчивости импульсных систем.

Будем говорить, что функция $V\colon G \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto V(t, x)$ принадлежит классу $\mathcal{V}_1$, если она обладает свойствами: (1) $V(t, 0) \equiv 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$; (2) функция V непрерывно дифференцируема на множестве $\mathcal{G}$; (3) для всякого x из B_h и $k = 1, 2, \ldots$ $\lim_{t\to\tau_k-0} V(t, x) = V(\tau_k, x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{(t,\xi)\to(\tau_k+0,x)} V(t, \xi) = V(\tau_k + 0, x).$$

Линеаризация (1.8) имеет положительно определенный первый интеграл

$$V_0(t, z, \overline{z}) = z\overline{z}e^{-2\alpha(t-\tau_k)} = |z|^2 e^{-2\alpha(t-\tau_k)}, \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}. \tag{2.1}$$

Функция V_0 ограничена в G и имеет разрывы первого рода на плоскостях $\{t = \tau_k\}$:

$$V_0(\tau_k^+, z) = z\overline{z}, \quad V_0(\tau_k, z) = z\overline{z}\exp(-2\alpha\theta).$$

Таким образом, функция V_0 принадлежит описанному выше классу функций $\mathcal{V}_1$. Более того,

$$\Delta V_0\big|_{t=\tau_k} = V_0(\tau_k^+, ze^{-\alpha\theta}, \overline{z}e^{-\alpha\theta}) - V(\tau_k, z, \overline{z}) = 0. \tag{2.2}$$

На интервале $\tau_k < t < \tau_{k+1}$ производная V_0 в силу уравнений системы (1.4) имеет вид

$$\dot{V_0}\Big|_{(1.4)}(t, z, \overline{z}) = \Phi_3(t, z, \overline{z}) + \ldots, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \tag{2.3}$$

где $\Phi_3(t, z, \overline{z})$ — однородный многочлен степени 3 относительно z, $\overline{z}$:

$$\Phi_3(t, z, \overline{z}) = e^{-2\alpha(t-\tau_k)} 2\,\mathrm{Re}\left[G_{20}z^2\overline{z} + G_{11}z\overline{z}^2 + G_{02}\overline{z}^3\right], \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1},$$

а многоточие обозначает сумму одночленов степени 4 и выше. Учитывая, что $\mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\,\overline{f}$, упростим выражение для Φ_3:

$$\Phi_3(t, z, \overline{z}) = e^{-2\alpha(t-\tau_k)} 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{G_{02}}z^3 + (G_{20} + \overline{G_{11}})z^2\overline{z}\right], \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}. \tag{2.4}$$

Пусть $\tau_{k_0-1} < t_0 \le \tau_{k_0}$, $k_0 \ge 1$, $y(t) = y(t; t_0, z_0)$ — решение системы линейного приближения (1.8), $m = (m_1, m_2) \ge 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию

$$Y_{m,\lambda_0}(t) = e^{\lambda_0(t-\tau_k)}[y(t)]^{m_1}[\overline{y(t)}]^{m_2}, \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}.$$

Для всякого $s = 0, 1, 2, \ldots$ с учетом (1.10) получим

$$\int\limits_{\tau_{k_0+s}}^{\tau_{k_0+s+1}} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt = \left[y(\tau_{k_0}^+)\right]^{m_1}\left[\overline{y(\tau_{k_0}^+)}\right]^{m_2} e^{i\beta\theta(m_1-m_2)s} Const_{m,\lambda_0}, \tag{2.5}$$

где

$$Const_{m,\lambda_0} = \begin{cases} \dfrac{e^{(\lambda_0+m_1\lambda+m_2\overline{\lambda})\theta} - 1}{\lambda_0+m_1\lambda+m_2\overline{\lambda}}, & \text{если } \lambda_0 + m_1\lambda + m_2\overline{\lambda} \ne 0, \\ \theta, & \text{если } \lambda_0 + m_1\lambda + m_2\overline{\lambda} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Предположим, что $\tau_{k_0+N} \le t < \tau_{k_0+N+1}$, тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{\tau_{k_0}} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt + \sum_{s=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_{k_0+s}}^{\tau_{k_0+s+1}} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt + \int\limits_{\tau_{k_0+N}}^{t} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt. \tag{2.7}$$

С учетом (2.5) получим

$$\sum_{s=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_{k_0+s}}^{\tau_{k_0+s+1}} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt = Const_{m,\lambda_0}\left[y(\tau_{k_0}^+)\right]^{m_1}\left[\overline{y(\tau_{k_0}^+)}\right]^{m_2} \sum_{s=0}^{N-1} e^{i\beta\theta(m_1-m_2)s}. \tag{2.8}$$

Используя метод суммирования [6, с. 247], легко показать, что

$$\sum_{s=0}^{N-1} e^{i\gamma s} = \begin{cases} \dfrac{e^{i\gamma N} - 1}{e^{i\gamma} - 1}, & \text{если } \gamma \ne 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}, \\ N, & \text{если } \gamma = 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Учитывая формулы (2.7)–(2.9), приходим к заключению:

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\left\{Y_{m,\lambda_0}(t)\right\} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} Y_{m,\lambda_0}(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \beta\theta(m_1-m_2) \neq 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}, \\ Const_{m,\lambda_0}\left[y(\tau^+_{k_0})\right]^{m_1}\left[\overline{y(\tau^+_{k_0})}\right]^{m_2}, & \text{если } \beta\theta(m_1-m_2) = 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.10}$$

значение $Const_{m,\lambda_0}$ определено в (2.6).

Обозначим

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\Phi_3(t,z,\overline{z})\right\}\big|_{(1.8)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_3(t,y(t),\overline{y(t)})\,dt, \tag{2.11}$$

где $y(t) = y(t;t_0,z_0)$ — решение системы линейного приближения (1.8). Предел в правой части (2.10) существует в силу свойств решений уравнения (1.8) и ограниченности непрерывной слева функции Φ_3. Из (2.4) и (2.10) следует, что среднее (2.11) будет тождественно равно нулю (и при этом предельный переход в (2.11) равномерен по $t_0 \geq 0$), если

$$\beta\theta \neq \frac{2\pi l}{3}, \quad l\in\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

3. Построение возмущения вспомогательной функции

В случае общего положения условие (2.12) выполняется. Тогда существуют ограниченные в области G решения линейного уравнения в частных производных относительно неизвестной функции $U(t,z,\overline{z})$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z}\lambda z + \frac{\partial U}{\partial \overline{z}}\overline{\lambda}\overline{z} = -\Phi_3(t,z,\overline{z}). \tag{3.1}$$

Естественно искать решение уравнения (3.1) в виде однородного многочлена

$$U(t,z,\overline{z}) = u_{30}(t)z^3 + u_{21}(t)z^2\overline{z} + u_{12}(t)z\overline{z}^2 + u_{03}(t)\overline{z}^3.$$

Поскольку все рассматриваемые в статье функции вещественнозначные, то $U(t,z,\overline{z}) = \overline{U(t,z,\overline{z})}$. Это означает, что $u_{03}(t) = \overline{u_{30}(t)}$ и $u_{12}(t) = \overline{u_{21}(t)}$. Поэтому функцию $U(t,z,\overline{z})$ будет удобно представить в следующей форме

$$U(t,z,\overline{z}) = 2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{U}(t,z,\overline{z}) = 2\,\mathrm{Re}\left[u_{30}(t)z^3 + u_{21}(t)z^2\overline{z}\right]. \tag{3.2}$$

Левая часть уравнения (3.1) есть производная функции U вдоль решения линейного приближения (1.8). Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\,\widetilde{U}(t,z,\overline{z})\right)\Big|_{(1.8)} = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt}\widetilde{U}(t,z,\overline{z})\Big|_{(1.8)}\right),$$

получим с учетом представления для $\Phi_3(t,z,\overline{z})$ следующее уравнение для отыскания неизвестных функций $u_{30}(t)$ и $u_{21}(t)$:

$$\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial z}\lambda z+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\overline{z}}\overline{\lambda}\overline{z}=-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\left[\overline{G_{02}}z^3+(G_{20}+\overline{G_{11}})z^2\overline{z}\right],\quad \tau_k<t\le\tau_{k+1}.$$

Вычисляя производные и приводя подобные, получим

$$\left[u'_{30}(t)+3\lambda u_{30}(t)\right]z^3+\left[u'_{21}(t)+(2\lambda+\overline{\lambda})u_{21}(t)\right]z^2\overline{z}=\\ =-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\left[\overline{G_{02}}z^3+(G_{20}+\overline{G_{11}})z^2\overline{z}\right],\quad \tau_k<t<\tau_{k+1}. \tag{3.3}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах в правой и левой части этого уравнения, выпишем искомые уравнения для неизвестных коэффициентов:

$$u'_{30}(t)+3\lambda u_{30}(t)=-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\overline{G_{02}},\\ u'_{21}(t)+(2\lambda+\overline{\lambda})u_{21}(t)=-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}(G_{20}+\overline{G_{11}}),\quad \tau_k<t<\tau_{k+1}.$$

Отсюда находим

$$u_{30}(t)=c_{30}e^{-3\lambda(t-\tau_k)}-\frac{\overline{G_{02}}}{\alpha+i3\beta}e^{-2\alpha(t-\tau_k)}, \tag{3.4}$$

$$u_{21}(t)=c_{21}e^{-(3\alpha+i\beta)(t-\tau_k)}-\frac{G_{20}+\overline{G_{11}}}{\alpha+i\beta}e^{-2\alpha(t-\tau_k)},\quad \tau_k<t\le\tau_{k+1}. \tag{3.5}$$

Выберем константы c_{30}, c_{21} так, чтобы

$$\Delta U(t,z,\overline{z})|_{t=\tau_k}=U(\tau_k^+,ze^{-\alpha\theta},\overline{z}e^{-\alpha\theta})-U(\tau_k,z,\overline{z})=0. \tag{3.6}$$

Из (3.2) следует, что это равенство будет выполнено, если

$$u_{30}(\tau_k^+)e^{-3\alpha\theta}=u_{30}(\tau_k),\qquad u_{21}(\tau_k^+)e^{-3\alpha\theta}=u_{21}(\tau_k),\quad k=1,2,\ldots \tag{3.7}$$

Не забывая наше предположение о том, что система (1.1)–(1.2) в общем положении и потому справедливо условие (2.12): $\beta\theta\ne\dfrac{2\pi l}{3}$ для всех $l\in\mathbb{Z}$, получаем окончательно

$$c_{30}=\frac{\overline{G_{02}}}{\alpha+i3\beta}\cdot\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i3\beta\theta}},\qquad c_{21}=\frac{G_{20}+\overline{G_{11}}}{\alpha+i\beta}\cdot\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i\beta\theta}}. \tag{3.8}$$

Замечательно то, что эти константы не зависят от k. Подставляя значения констант в (3.2), выпишем явное выражение для искомой функции

$$U(t,z,\overline{z})=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{G_{02}}}{\alpha+i3\beta}\left[\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i3\beta\theta}}e^{-3\lambda(t-\tau_k)}-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\right]z^3+\right.\\ \left.+\frac{G_{20}+\overline{G_{11}}}{\alpha+i\beta}\left[\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i\beta\theta}}e^{-(3\alpha+i\beta)(t-\tau_k)}-e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\right]z^2\overline{z}\right\},\quad \tau_k<t\le\tau_{k+1}. \tag{3.9}$$

4. Вывод условий устойчивости системы (1.1)–(1.2) в случае общего положения

Рассмотрим положительно определенную в достаточно малой окрестности нуля и допускающую бесконечно малый высший предел функцию из класса $\mathcal{V}_1$

$$V_1(t,z,\overline{z}) = V_0(t,z,\overline{z}) + U(t,z,\overline{z}).$$

Согласно свойствам возмущения U

$$\dot{V}_1\Big|_{(1.4)} = \dot{V}_0\Big|_{(1.4)} + \dot{U}\Big|_{(1.4)} = \Phi_4(t,z,\overline{z}) + \ldots, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \tag{4.1}$$

где многоточие обозначает сумму одночленов степени 5 и выше, а $\Phi_4(t,z,\overline{z})$ — однородный многочлен степени 4 относительно z, $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}\Phi_4(t,z,\overline{z}) = 2\operatorname{Re}\sum_{|m|=4}\widetilde{\Phi}_4^m(t)z^{m_1}\overline{z}^{m_2} = e^{-2\alpha(t-\tau_k)}2\operatorname{Re}\sum_{|m|=3}G_m z^{m_1}\overline{z}^{m_2+1} + \\ + 2\operatorname{Re}\left\{[u_{30}(t)3z^2 + 2u_{21}(t)z\overline{z}]\sum_{|m|=2}G_m z^{m_1}\overline{z}^{m_2} + \right. \\ \left. + u_{21}(t)z^2\sum_{|m|=2}\overline{G_{(m_2,m_1)}}z^{m_1}\overline{z}^{m_2}\right\}, \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \end{aligned}\tag{4.2}$$

Нам нет необходимости выписывать явно коэффициенты всех мономов, образующих $\Phi_4(t,z,\overline{z})$. В рассматриваемой ситуации общего положения на характер устойчивости нулевого решения влияет только коэффициент $\widetilde{\Phi}_4^{(2,2)}(t)$ при мономе $z^2\overline{z}^2 = |z|^4$:

$$\widetilde{\Phi}_4^{(2,2)}(t) = e^{-2\alpha(t-\tau_k)}G_{21} + 3u_{30}(t)G_{02} + u_{21}(t)(\overline{G_{20}} + 2G_{11}), \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}. \tag{4.3}$$

Функция V_1 сконструирована так, что она сохраняет непрерывность вдоль любой интегральной кривой системы (1.4)–(1.5) $(\Delta V_1(t,z,\overline{z})|_{t=\tau_k} = 0)$. Поэтому функция V_1 удовлетворяет условиям (i)-(iii) и (vi) теоремы 1 об асимптотической устойчивости, доказанной в статье авторов [3]. Из (1.12) следует, что выполнено также и условие (iv). Основным условием теоремы 1 является условие знакоопределенности среднего значения

$$\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\Phi_4(t,z,\overline{z})\right\}|_{(1.8)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\Phi_4(t,y(t),\overline{y(t)})\,dt. \tag{4.4}$$

Заметим, что при $|m| = 4$ разность $m_1 - m_2$ равна нулю лишь при $m_1 = m_2$. Поэтому из (4.2), (2.10) и (2.12) следует, что

$$\underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\Phi_4(t,z,\overline{z})\right\}|_{(1.8)} = \underset{t}{\mathrm{M}}\left\{\widetilde{\Phi}_4^{(2,2)}(t)|y(t)|^4\right\}. \tag{4.5}$$

Подставим (3.8) в (3.4), (3.5) и представим функции $u_{30}(t)$, $u_{21}(t)$ в виде

$$\begin{aligned} u_{30}(t) &= c_{30}^{(1)}e^{-3\lambda(t-\tau_k)} + c_{30}^{(2)}e^{-2\alpha(t-\tau_k)}, \\ u_{21}(t) &= c_{21}^{(1)}e^{-(3\alpha+i\beta)(t-\tau_k)} + c_{21}^{(2)}e^{-2\alpha(t-\tau_k)}, \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \end{aligned}\tag{4.6}$$

где $c_{30}^{(1)} = c_{30}$, $c_{21}^{(1)} = c_{21}$, $c_{30}^{(2)}$, $c_{21}^{(2)}$ — комплексные постоянные, которые нетрудно выписать из (3.4), (3.5) и (3.8). Подставим выражения (4.6) в (4.3) и после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_4^{(2,2)}(t) = e^{-2\alpha(t-\tau_k)}G_{21} + 3\big[c_{30}^{(1)}e^{-3\lambda(t-\tau_k)} + c_{30}^{(2)}e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\big]G_{02}+ \\ + \big[c_{21}^{(1)}e^{-(3\alpha+i\beta)(t-\tau_k)} + c_{21}^{(2)}e^{-2\alpha(t-\tau_k)}\big](\overline{G_{20}} + 2G_{11}) = \\ = C_{2\alpha}e^{-2\alpha(t-\tau_k)} + C_{3\lambda}e^{-3\lambda(t-\tau_k)} + C_{3\alpha+i\beta}e^{-(3\alpha+i\beta)(t-\tau_k)}, \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \quad (4.7)\end{aligned}$$

где константы имеют вид

$$\begin{aligned} C_{2\alpha} &= G_{21} - 3\frac{|G_{02}|^2}{\alpha+i3\beta} - \frac{|G_{20}+\overline{G_{11}}|^2 + |G_{11}|^2 + G_{20}G_{11}}{\alpha+i\beta}, \\ C_{3\lambda} &= 3\frac{|G_{02}|^2}{\alpha+i3\beta}\cdot\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i3\beta\theta}}, \\ C_{3\alpha+i\beta} &= \frac{|G_{20}+\overline{G_{11}}|^2 + |G_{11}|^2 + G_{20}G_{11}}{\alpha+i\beta}\cdot\frac{1-e^{\alpha\theta}}{1-e^{-i\beta\theta}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

И наконец, из (4.7), (4.8) и (4.5) находим, что знак среднего (4.5) определяет следующее выражение

$$\mathcal{I} = \operatorname{Re}\left[C_{2\alpha}\frac{e^{2\alpha\theta}-1}{2\alpha} + C_{3\lambda}\frac{e^{(\alpha-i3\beta)\theta}-1}{\alpha-i3\beta} + C_{3\alpha+i\beta}\frac{e^{(\alpha-i\beta)\theta}-1}{\alpha-i\beta}\right]. \tag{4.9}$$

На основании теорем 1 и 2 из [3] нулевое решение нелинейной импульсной системы (1.1)–(1.2) равномерно асимптотически устойчиво при $\mathcal{I} < 0$, а при $\mathcal{I} > 0$ — тотально неустойчиво (все траектории покидают малую окрестность нуля в фазовом пространстве). Явный вид формулы (4.9) очень сложен и изучению свойств показателя $\mathcal{I}$ при изменении параметров системы (1.1)–(1.2) будет посвящена вторая часть настоящей статьи.

5. Заключение

В статье найдены условия равномерной асимптотической устойчивости и тотальной неустойчивости нулевого решения нелинейной импульсной системы второго порядка в критическом случае в предположении, что система находится в общем положении. Характер устойчивости определяется скалярным показателем $\mathcal{I}$, являющимся аналогом ляпуновской величины в критическом случае центра (и совпадает с ним, когда импульсное воздействие отсутствует). Формула (4.9) показателя $\mathcal{I}$ значительно сложнее ляпуновской величины. Во второй части статьи будет детально изучено поведение показателя $\mathcal{I}$ при изменении параметров системы, в частности, при приближении величины $\beta\theta$ к критическим значениям $(2/3)\pi l$, $l = 1, 2, \ldots$, когда показатель $\mathcal{I}$ не определен.

Список цитируемых источников

1. *Анашкин О. В., Довжик Т. В., Митько О. В.* Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. — 2010. — Вып.28. — С. 3–8.
2. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Неустойчивость в системах с импульсным воздействием // Ученые записки ТНУ, серия физ.-мат. науки. — 2011. — Т.24(63), №1. — С. 101–106.

3. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием. — Динамические системы. — 2011. — Т.1(29), №1. — С. 5–14.
4. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях // Докл. НАН Украины — 2008. — №6. — С.46-52.
5. *Веретенников В. Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
6. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. — 376 с.
7. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т.52, №1. — С.70–80.
8. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Аналог критического случая Каменкова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Сиб. журн. индустр. матем. — 2012. — Т.15, №1. — С. 22–33.
9. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Теория нормальных форм А. Пуанкаре и ее приложения к теории устойчивости положений равновесия импульсных систем в особенных случаях. — Динамические системы. — 2013. — Т.3(31), №1-2. — С. 3–24.
10. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Теоремы о сведении в задаче об устойчивости критических положений равновесия дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Нелінійні коливання. — 2013. — Т.16, №4. — С. 475–495.
11. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивость критических положений равновесия некоторых классов сложных импульсных систем. — Известия РАН. Теория и сист. управления. — 2014. — №1. — С. 22–34.
12. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости решений крупномасштабных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. — Дифференциальные уравнения. — 2014. — №1. — С. 22–34.
13. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифферниальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. сборник. — 2003. — Т.194, №.10. — С.117–132.
14. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Харьков: ОНТИ, 1892. — 250+XI с.
15. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л.-М.: ОНТИ, 1935. — 386 с.
16. *Ляпунов А. М.* Избранные труды: работы по теории устойчивости. – М.: Наука, 2007. — 574 с.
17. *Перестюк Н. А., Плотников В. И., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
18. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
19. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.
20. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — N.-Y., Halsted Press, 1989.
21. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — World Scientific, Singapure – New Jersey – London, 1989.
22. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. — Singapure-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific, 1995. — 462 pp.

Получена 10.05.2014