Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 165–169

УДК 517.523+511.216

О значениях бесконечных произведений, порождённых некоторыми рекуррентными соотношениями 2-го порядка

Д. В. Третьяков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail:dvttvd@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрена задача о вычислении бесконечных произведений специального вида, построенных по рекуррентным последовательностям второго порядка. На основании предложенного в работе параметрического метода получены формулы для вычисления указанных произведений. При доказательстве формул были использованы известные по другой работе автора соотношения для числовых рядов специального вида, составленных также с помощью рекуррентных последовательностей второго порядка. Рассмотрены частные случаи разложений в бесконечные произведения.

Ключевые слова: бесконечные произведения, рекуррентные последовательности второго порядка.

1. Постановка задачи

В работе [1] была получена формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{n+1}^2}{\sqrt{b}\cdot b^{n-1}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{\sqrt{b}v_1}\right), \qquad (1.1)$$

где $\{v_n\}$ рекуррентная последовательность, удовлетворяющая уравнению

$$v_n = av_{n-1} - bv_{n-2}, \qquad n \geq 3$$

без начальных условий. Здесь $a > 0$, $b > 0$ — фиксированные числа, $D = a^2 - 4b \geq 0$, $\Delta = v_2^2 - v_3v_1$.

В этой заметке предложен метод вычисления бесконечных произведений специального вида, использующий аналог формулы (1.1).

2. Вспомогательные предложения

Пусть $a > 0$, $b < 0$ — фиксированные числа, такие что $a^2 > |b|$. Рассмотрим последовательность $\{v_n\}$, которая задаётся равенствами:

$$\begin{cases} v_n = av_{n-1} - bv_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ v_0 = 1, v_1 > 0, \\ v_1^2 < v_2. \end{cases}$$

Имеет место

Лемма 1. *Элементы последовательности $\{v_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$v_n^2 - v_{n+1}v_{n-1} = b^{n-2}\Delta,\ n \geq 2, \text{ где } \Delta = v_2^2 - v_3v_1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Действительно, используя рекуррентные соотношения для последовательности $\{v_n\}$, получим:

$$v_n(av_{n-1}) = (av_n)v_{n-1}, \quad v_n(v_n + bv_{n-2}) = (v_{n+1} + bv_{n-1})v_{n-1},$$
$$v_n^2 - v_{n+1}v_{n-1} = b(v_{n-1}^2 - v_nv_{n-2}) = b^2(v_{n-2}^2 - v_{n-1}v_{n-3}) = \ldots =$$
$$= b^{n-2}(v_2^2 - v_3v_1) = b^{n-2}\Delta.$$

□

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{n+1}^2}{i\sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4|b|}}{2i\sqrt{|b|}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{i\sqrt{|b|}v_1}\right). \tag{2.2}$$

Доказательство. Выражение для общего элемента ряда из левой части (2.2) с помощью равенства

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$$

преобразуем следующим образом:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{av_n^2}{i\sqrt{|b|}\cdot b^{n-2}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_n(v_{n+1}+bv_{n-1})}{i\sqrt{|b|}(v_n^2 - v_{n-1}v_{n+1})}\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{n+1}}{i\sqrt{|b|}v_n}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_n}{i\sqrt{|b|}v_{n-1}}\right). \tag{2.3}$$

Будем изменять индекс n в соотношении (2.3) в пределах от 2 до m и после этого просуммируем полученное:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{i\sqrt{|b|}v_1}\right) + \sum_{n=2}^{m} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_n^2}{i\sqrt{|b|}\cdot b^{n-2}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{m+1}}{i\sqrt{|b|}v_m}\right) \tag{2.4}$$

При $m \to \infty$ отношение $\dfrac{v_{m+1}}{v_m}$ стремится к большему корню квадратного уравнения $x^2 = ax - b$. Следовательно, переходя в (2.4) к пределу, мы получаем формулу (2.2). □

3. О бесконечных произведениях, порождённых рекуррентными последовательностями 2-го порядка

Докажем вначале вспомогательное предложение.

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$\frac{av_{n+1}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta} > 0,\ n \in \mathbb{N}; \tag{3.1}$$

$$\left(1 - \frac{4\sqrt{|b|}}{a + \sqrt{a^2+4|b|} + 2\sqrt{|b|}}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{|b|}\cdot v_1}{v_2 - \sqrt{|b|}\cdot v_1}\right) > 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если n нечётное, то по лемме 1

$$av_{n+1}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta = (a - \sqrt{|b|})v_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}v_{n+2}v_n > 0.$$

Предположим, что n чётное. При $n = 2$

$$av_3^2 - \sqrt{|b|}\cdot |b|\Delta = (a^3 - \sqrt{|b|}\cdot|b|)v_2^2 + 2a^2|b|v_1v_2 + a|b|^2v_1^2 + \sqrt{|b|}\cdot|b|v_3v_1 > 0.$$

Если неравенство $av_{k+1}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{k-1}\Delta > 0$ справедливо при всех чётных $k \le n$, то

$$av_{n+3}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{n+1}\Delta = a(a^2v_{n+2}^2 + 2a|b|v_{n+2}v_{n+1} + |b|^2v_{n+1}^2) - \sqrt{|b|}\cdot b^{n+1}\Delta =$$

$$= |b|^2(av_{n+1}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta) + a^3v_{n+2}^2 + 2a^2|b|v_{n+2}v_{n+1} > 0.$$

Правая скобка в (3.2) положительна так как

$$v_2 - \sqrt{|b|}\cdot v_1 = av_1 + |b| - \sqrt{|b|}\cdot v_1 > 0.$$

Левая скобка в (3.2) также положительна:

$$\frac{4\sqrt{|b|}}{a + \sqrt{a^2+4|b|} + 2\sqrt{|b|}} < \frac{4\sqrt{|b|}}{2a + 2\sqrt{|b|}} < 1.$$

Лемма доказана. □

Воспользуемся известной формулой:

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{iz-1}{iz+1},\ z \in \mathbb{C}$$

Преобразуем общий элемент ряда и правую часть формулы (2.2):

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{n+1}^2}{i\sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}\right) = \frac{1}{2i}\ln\frac{av_{n+1}^2 - \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta} =$$

$$= \frac{1}{2i}\ln\left(1 - \frac{2\sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}\cdot b^{n-1}\Delta}\right), \tag{3.3}$$

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{a + \sqrt{a^2+4|b|}}{2i\sqrt{|b|}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{i\sqrt{|b|}\cdot v_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\ln\frac{a + \sqrt{a^2+4|b|} - 2\sqrt{|b|}}{a + \sqrt{a^2+4|b|} + 2\sqrt{|b|}} - \frac{1}{2i}\ln\frac{v_2 - \sqrt{|b|}\cdot v_1}{v_2 + \sqrt{|b|}\cdot v_1} =$$

$$= \frac{1}{2i} \ln \left[\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4|b|} - 2\sqrt{|b|}}{a + \sqrt{a^2 + 4|b|} + 2\sqrt{|b|}} \right) \left(\frac{v_2 + \sqrt{|b|}v_1}{v_2 - \sqrt{|b|}v_1} \right) \right]. \tag{3.4}$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-1}}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|} \cdot b^{n-1}\Delta}$$

абсолютно сходится. В самом деле, используем для этого известную асимптотику последовательности $\{v_n\}_n$ (см., напр.,[3]):

$$v_n \sim \frac{v_2 - \lambda_2 v_1}{\sqrt{a^2 + 4|b|}} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4|b|}}{2} \right)^{n-1}, \text{ где } \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4|b|}}{2}. \tag{3.5}$$

Тогда из (3.5) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^n |av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}b^{n-1}\Delta|}{|b|^{n-1}|av_{n+2}^2 + \sqrt{|b|}b^n\Delta|} = |b| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{|b|}\Delta(a^2+4|b|)}{ab(v_2-\lambda_2 v_1)^2} \left(\frac{4b}{a^2+4|b|} \right)^n}{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4|b|}}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{|b|}\Delta(a^2+4|b|)}{a(v_2-\lambda_2 v_1)^2} \left(\frac{4b}{a^2+4|b|} \right)^n} \right| =$$

$$= \frac{4|b|}{(a + \sqrt{a^2 + 4|b|})^2} < 1 .$$

Установленная сходимость указанного ряда обеспечивает [2] сходимость следующего бесконечного произведения

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2\sqrt{|b|}b^{n-1}\Delta}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}b^{n-1}\Delta} \right).$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для последовательности* $\{v_n\}_n$ *справедливо разложение:*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2\sqrt{|b|}b^{n-1}\Delta}{av_{n+1}^2 + \sqrt{|b|}b^{n-1}\Delta} \right) = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4|b|} - 2\sqrt{|b|}}{a + \sqrt{a^2 + 4|b|} + 2\sqrt{|b|}} \right) \left(\frac{v_2 + \sqrt{|b|}v_1}{v_2 - \sqrt{|b|}v_1} \right) \tag{3.6}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $a = 3, b = -1$. Последовательность $\{v_n\}_n$ зададим равенствами:

$$\begin{cases} v_n = 3v_{n-1} + v_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ v_0 = 1 = v_1, \\ v_2 = 2 \end{cases}.$$

Тогда $\Delta = -3$ и формула (3.6) принимает вид:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{v_{n+1}^2 - 2} \right) = \sqrt{13} - 2.$$

Пример 2. Пусть $a = 2$, а $b = -3$.

$$\begin{cases} v_n = 2v_{n-1} + 3v_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ v_0 = 1 = v_1, \\ v_2 = 2 \end{cases}.$$

Отсюда $\Delta = -3$. По формуле (3.6)

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}(-3)^n}{2v_{n+1}^2 + \sqrt{3}(-3)^n}\right) = 2 + \sqrt{3}.$$

Ещё один пример.

Пример 3. $a = 4$, $b = -5$,

$$\begin{cases} v_n = 4v_{n-1} + 5v_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ v_0 = 1, v_1 = 2, \\ v_2 = 5. \end{cases}$$

Вычислим величину $\Delta = -35$ и применим формулу (3.6):

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{14\sqrt{5}(-5)^n}{4v_{n+1}^2 - 7\sqrt{5}(-5)^n}\right) = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

4. Заключение

В настоящей работе получены формулы для вычисления бесконечных произведений специального вида, порождённых рекуррентными последовательностями 2-го порядка, на основе предложенного здесь параметрического метода. Данные произведения в литературе ранее не рассматривались. В качестве примеров рассмотрены различные частные случаи разложений некоторых констант.

Список цитируемых источников

1. *Пода Н. С., Третьяков Д. В.* О значениях числовых рядов, порождённых некоторыми рекуррентными соотношениями 2-го порядка и специальными функциями. // Динамические системы. — 2012. — Т.2(30), №3-4 — С. 337–346.
2. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплесного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.
3. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.

Получена 14.05.2014