Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 19–26

УДК 517.922

Спектральная задача, ассоциированная с проблемой малых движений вязкоупругого стержня

Е. В. Сёмкина

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kozirno@gmail.com*

Аннотация. Проблема малых движений вязкоупругого стержня сводится к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра второго порядка. В работе рассматривается задача о нормальных колебаниях вязкоупругого стержня, то есть спектральная задача для операторного пучка, связанного с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка. Для этой задачи доказаны полнота и базисность системы собственных векторов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, операторный пучок, спектральная задача.

Введение

В данной работе изучается задача о колебании вязкоупругого стержня. Уравнение продольных колебаний однородного стержня (см. [4, с.130]) в абстрактно-операторной форме описывается интегро-дифференциальным уравнением второго порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Задачи для полных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка более общего вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \qquad (1)$$

ранее изучались в работах [5], [6], [8]. Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, причём учитываются эффекты релаксации. Искомая функция $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ задаёт поле смещений системы относительно состояния равновесия, а операторные коэффициенты в (1) имеют отчётливый физический смысл. Так, A является оператором кинетической энергии и потому $A = A^* > 0$. Далее, B есть оператор потенциальной энергии; если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то $B = B^* \geq 0$. Оператор $F = F^* \geq 0$ учитывает диссипацию энергии, а оператор $G = G^*$ учитывает действие кориолисовых (гироскопических) сил. Наконец, интегральные слагаемые учитывают явления релаксации.

В работе [5] речь идёт о задачах Коши для уравнения (1), когда $A = I$. В статьях [6], [8] получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи (1), причём считается, что A — ограниченный оператор ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), который, вообще говоря, может иметь неограниченный обратный.

Спектральные проблемы, связанные с неполными интегро-дифференциальными уравнениями второго порядка, возникали в работах [7], [3], а некоторые задачи, ассоциированные с полными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра, исследовались в статьях [2], [1] в случаях, когда $A = I$.

В настоящей работе изучается спектральная задача связанная с полным интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка, не разрешённым относительно старшей производной. Построения, проведённые здесь, обобщают результаты из [7].

1. Сведение интегро-дифференциального уравнения второго порядка к дифференциальному уравнению первого порядка

Рассмотрим полное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго порядка вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + \beta B\frac{du}{dt} + Bu - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Bu(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (2)$$

$$0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \gg 0, \quad 0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

$$\alpha_k, \beta > 0, \quad 0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < +\infty, \quad 1 - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k} > 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Осуществим в (2) замену $A^{1/2}u = v$, имеем

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \beta A^{-1/2}BA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A^{-1/2}BA^{-1/2}v(s)ds =$$
$$= A^{-1/2}f(t) =: \widetilde{f}(t), \quad v(0) = A^{1/2}u^0, \; v'(0) = A^{1/2}u^1. \quad (3)$$

Введём обозначение $A^{-1/2}BA^{-1/2} =: D \gg 0$, а затем с помощью интегрирования по частям преобразуем интегральные слагаемые в последнем уравнении к более удобному виду:

$$\alpha_k\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Dv(s)ds = \frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t Dv(s)de^{-\gamma_k(t-s)} =$$
$$= \frac{\alpha_k}{\gamma_k}Dv(t) - \frac{\alpha_k}{\gamma_k}Dv(0)e^{-\gamma_k t} - \frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}Dv'(s)ds.$$

В дальнейших рассуждениях будем считать, что $v(0) = A^{1/2}u^0 \in \mathcal{D}(D)$. С учётом проведенных вычислений уравнение (3) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + D^{1/2}\left(\beta D^{1/2}\frac{dv}{dt} + D^{1/2}v - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}D^{1/2}v + \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}\int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}D^{1/2}v'(s)ds\right) =$$
$$= \widetilde{f}(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}De^{-\gamma_k t}v(0) =: \widehat{f}(t). \quad (4)$$

Введём обозначения:

$$\delta := 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\gamma_k} > 0, \quad \rho_k := \frac{\alpha_k}{\gamma_k}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Осуществим в уравнении (4) следующие замены:

$$w := v', \quad v_0 := \delta^{1/2} D^{1/2} v, \quad v_k := \rho_k^{1/2} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} D^{1/2} v'(s) ds, \quad k = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Преобразованное уравнение (4) вместе с продифференцированными второй и третьей заменами (6) запишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + \delta^{1/2} D^{1/2} \left(\delta^{-1/2} \beta D^{1/2} w + v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \delta^{-1/2} \rho_k^{1/2} v_k \right) = \widehat{f}(t), \\ \dfrac{dv_0}{dt} = \delta^{1/2} D^{1/2} \dfrac{dv}{dt} = \delta^{1/2} D^{1/2} w \\ \dfrac{d\widehat{v}}{dt} = \widehat{\rho}^{1/2} D^{1/2} w - \widehat{\gamma} \widehat{v}, \end{cases}$$

где $\widehat{\rho}^{1/2} := (\rho_1^{1/2} I, \ldots, \rho_m^{1/2} I)^\tau$, $\widehat{\gamma} := \operatorname{diag}\{\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I\}$, $\widehat{v} = (v_1, \ldots, v_m)^\tau$.

Запишем эту систему вместе с начальными условиями в виде дифференциального операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{m+2} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{B} y = \widehat{F}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{7}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \delta^{1/2} D^{1/2} & 0 & 0_m^\tau \\ 0 & I & 0 \\ 0_m & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{-1} \beta I & I & \delta^{-1/2} (\widehat{\rho}^{1/2})^\tau \\ -I & 0 & 0 \\ -\delta^{-1/2} \widehat{\rho}^{1/2} & 0 & \widehat{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1/2} D^{1/2} & 0 & 0_m^\tau \\ 0 & I & 0 \\ 0_m & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$y = (w, v_0, \widehat{v})^\tau \in \mathcal{H}^{m+2}, \; y^0 := (w(0); v_0(0); \widehat{v}(0))^\tau = (A^{1/2} u^1; \delta^{1/2} D^{1/2} A^{1/2} u^0; 0_m^\tau)^\tau,$$
$$\widehat{F}(t) := (\widehat{f}(t); 0; 0_m^\tau)^\tau, \; 0_m := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau, \quad \widehat{I}_m := \operatorname{diag}\{\underbrace{I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}\}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{ y \in \mathcal{H}^{m+2} : \; (\delta^{1/2} \beta D^{1/2} w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^\tau \delta^{-1/2} \widehat{v}) \in \mathcal{D}(D^{1/2}), \; w \in \mathcal{D}(D^{1/2}) \}$$

формулой

$$\mathcal{B} y = \begin{pmatrix} \delta^{1/2} D^{1/2} \left(\delta^{-1/2} \beta D^{1/2} w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^\tau \delta^{-1/2} \widehat{v} \right) \\ -\delta^{1/2} D^{1/2} w \\ -\widehat{\rho}^{1/2} D^{1/2} w + \widehat{\gamma} \widehat{v} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}). \tag{9}$$

2. Постановка спектральной задачи

Будем искать решение однородного уравнения (7) (при $\widehat{F}(t) \equiv 0$) в виде $y(t) = e^{-\lambda t} y$. В результате получим уравнение $(\mathcal{B} - \lambda I) y = 0$, которое является спектральной задачей, ассоциированной с интегро-дифференциальным уравнением (2), где λ — спектральный параметр, y — амплитудный элемент. С учётом (9) перепишем эту спектральную задачу в виде системы:

$$\begin{cases} \delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w + v_0 + (\widehat{\rho}^{1/2})^{\tau}\delta^{-1/2}\widehat{v}\right) = \lambda w, \\ -\delta^{1/2}D^{1/2}w = \lambda v_0, \\ -\widehat{\rho}^{1/2}D^{1/2} + \widehat{\gamma}\widehat{v} = \lambda\widehat{v}. \end{cases}$$

Выразим из последних уравнений v_0, $\widehat{v}$:

$$v_0 = -\frac{\delta^{1/2}}{\lambda}D^{1/2}w, \quad \widehat{v} = -\widehat{\rho}^{1/2}(\lambda I_m - \widehat{\gamma})^{-1}D^{1/2}w,$$

и подставим в первое:

$$\delta^{1/2}D^{1/2}\left(\delta^{-1/2}\beta D^{1/2}w - \frac{\delta^{1/2}}{\lambda}D^{1/2}w - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n\delta^{-1/2}}{\lambda-\gamma_n}D^{1/2}w\right) = \lambda w.$$

Введём новую переменную $\xi = D^{1/2}w$, получим

$$\beta\xi - \frac{\delta}{\lambda}\xi - \sum_{n=1}^{m}\frac{\rho_n}{\lambda-\gamma_n}\xi - \lambda D^{-1}\xi = 0;$$

умножая теперь обе части на $-\lambda$ и учитывая обозначения (5), преобразуем последнее уравнение к следующему виду:

$$(I - \lambda\beta I + \lambda^2 D^{-1} + \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\lambda-\gamma_n}I)\xi = 0. \tag{10}$$

По условию $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а значит и $0 < D^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, и D — оператор с дискретным спектром. Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных значений D^{-1}, а $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система его собственных элементов, которая является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$. Из (10) получим характеристические уравнения:

$$f_k(\lambda) := 1 - \beta\lambda + \mu_k\lambda^2 - \sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n-\lambda} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Пусть $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $p = \overline{1, m+2}$, — решения характеристических уравнений, (11). Можно убедиться (см. (8)), что

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1}\beta I & I & (\widehat{\rho}^{1/2})^{\tau}\delta^{-1/2} \\ -I & 0 & 0_m \\ -\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2} & 0 & \widehat{\gamma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ -\frac{1}{\lambda}{}_k^{(p)}u_k \\ \widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_k^{(p)}\begin{pmatrix} \delta^{-1}D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ -\frac{1}{\lambda}{}_k^{(p)}u_k \\ \widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k \end{pmatrix}.$$

Можно проверить также, что следующая система

$$\varphi_k^{(p)}=\left(D^{-1/2}u_k,-\frac{\delta^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}u_k,\rho_1^{1/2}\left(\gamma_1-\lambda_k^{(p)}\right)^{-1}u_k,\ldots,\rho_m^{1/2}(\gamma_m-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k\right)^\tau=$$
$$=\left(\delta^{-1/2}\mu^{-1/2}u_k,-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}u_k,\rho_1^{1/2}\delta^{-1/2}\left(\gamma_1-\lambda_k^{(p)}\right)^{-1}u_k,\ldots,\rho_m^{1/2}\delta^{-1/2}(\gamma_m-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k\right)^\tau \quad (12)$$

является системой собственных векторов оператора $-\mathcal{B}$, отвечающая системе собственных значений $\lambda_k^{(p)}$.

3. О базисности собственных элементов задачи

Для проведения дальнейших построений введём в пространстве $\mathcal{H}^{m+2}$ индефинитное скалярное произведение по формуле:

$$[\varphi_1,\varphi_2]_{\mathcal{H}^{m+2}}=(u^{(1)},u^{(2)})_{\mathcal{H}}-(v_0^{(1)},v_0^{(2)})_{\mathcal{H}}-(\widehat{v}^{(1)},\widehat{v}^{(2)})_{\mathcal{H}^m}.$$
$$\forall\ \varphi_1=(u^{(1)};v_0^{(1)};\widehat{v}^{(1)})^\tau \text{ и } \varphi_2=(u^{(2)};v_0^{(2)};\widehat{v}^{(2)})^\tau.$$

Обозначим далее при любом $k\in\mathbb{N}$ через $\varphi_k^{(+)}$, $\varphi_k^{(-)}$ и $\varphi_k^{(0,i)}$, $i=\overline{1,m}$, собственные элементы $\varphi_k^{(p)}$ из (12), отвечающие собственным значениям из верхней (+) и нижней (−) комплексной полуплоскостей соответственно, а также на положительной полуоси.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$[\varphi_k^{(\pm)},\varphi_k^{(\pm)}]=0,\quad [\varphi_k^{(\pm)},\varphi_k^{(0i)}]=0,\quad [\varphi_k^{(+)},\varphi_k^{(-)}]=\delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(+)}),\quad [\varphi_k^{(-)},\varphi_k^{(+)}]=\delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(-)}),$$
$$[\varphi_k^{(0i)},\varphi_k^{(0i)}]=\delta^{-1}g_k'(\lambda_k^{(0i)}),\quad [\varphi_k^{(0i)},\varphi_k^{(\pm)}]=0,\quad [\varphi_k^{(0i)},\varphi_k^{(0j)}]=0,\quad i,j=\overline{1,m}.$$

где

$$g_k(\lambda):=\lambda^{-1}f_k(\lambda)=\frac{\delta}{\lambda}-\beta+\mu_k\lambda-\sum_{n=1}^m\frac{\alpha_n}{\gamma_n(\gamma_n-\lambda)},\quad k=1,2,\ldots.$$

Доказательство. Вычислим сначала всевозможные индефинитные скалярные произведения между элементами системы $\{\varphi_k^{(p)}\}$:

$$\begin{aligned}[\varphi_k^{(p)},\varphi_k^{(q)}]_{\mathcal{H}}&=(\delta^{-1/2}\mu_k^{-1/2}u_k,\delta^{-1/2}\mu_k^{-1/2}u_k)_{\mathcal{H}}-(\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}u_k,\frac{1}{\lambda_k^{(q)}}u_k)-\\&-\left(\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)})^{-1}u_k,\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(q)})^{-1}u_k\right)\\&=\delta^{-1}\mu_k^{-1/2}-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}\overline{\lambda_k^{(q)}}}-\sum_{n=1}^m\frac{\rho_n}{\delta(\gamma_n-\lambda_k^{(p)})(\gamma_n-\overline{\lambda_k^{(q)}})}=\\&=\delta^{-1}\left(\mu_k^{-1/2}-\frac{\delta}{\lambda_k^{(p)}\overline{\lambda_k^{(q)}}}-\sum_{n=1}^m\frac{\rho_n}{(\gamma_n-\lambda_k^{(p)})(\gamma_n-\overline{\lambda_k^{(q)}})}\right).\end{aligned}\quad (13)$$

Убедимся теперь, что $f_k(\lambda)=\lambda g_k(\lambda)$. Действительно,

$$f_k(\lambda)=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\beta+\mu_k\lambda-\sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\lambda(\gamma_n-\lambda)}\right)=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\beta+\mu_k\lambda-\sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\left(\frac{1}{\gamma_n-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)\right)=$$
$$=\lambda\left(\left(1-\sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda}-\beta+\mu_k\lambda-\sum_{n=1}^{m}\frac{\alpha_n}{\gamma_n(\gamma_n-\lambda)}\right)=\lambda g_k(\lambda). \quad (14)$$

Из (11), (14) получим следующие соотношения:

$$f_k(\lambda_k^{(p)})=\lambda_k^{(p)}g_k(\lambda_k^{(p)})=0, \quad k=1,2,\ldots, \quad p=\overline{1,m+2}.$$

Теперь утверждение леммы следует из (13), (14) с учётом того факта, что $\varphi_k^{(+)}=\overline{\varphi_k^{(-)}}$, а $\varphi_k^{(0i)}\in\mathbb{R}$, $k=1,2\ldots$, $i=\overline{1,m}$. □

Теорема 1. *Пусть все корни $\lambda_k^{(p)}$ характеристического уравнения простые, т.е.*

$$f_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0, \quad k=1,2,\ldots, \quad p=\overline{1,m+2}. \quad (15)$$

Тогда система собственных векторов $\{\varphi_k^{(p)}\}$ из (12) образует базис в пространстве $\mathcal{H}^{m+2}$.

Доказательство. Покажем, что любой элемент $\widetilde{\varphi}:=(\widetilde{w};\widetilde{v}_0,\widehat{v})^{\tau}\in\mathcal{H}^{m+2}$ может быть представлен в виде ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\varphi_k^{(p)}=\widetilde{\varphi}, \quad (16)$$

где коэффициенты $G_k^{(p)}$ находятся однозначно.

Запишем с учётом (12) это соотношение в координатной форме:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2}\right)u_k=\widetilde{w},\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\left(-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}\right)u_k\right)=\widetilde{v}_0,\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)}I_m)^{-1}\right)u_k=\widetilde{\widehat{v}},\end{cases}$$

Умножим каждое уравнение этой системы скалярно на u_k:

$$\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2}=(\widetilde{w},u_k)\\ \sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\left(-\frac{1}{\lambda_k^{(p)}}\right)=(\widetilde{v}_0,u_k)\\ \sum\limits_{p=1}^{m+2}G_k^{(p)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma}-\lambda_k^{(p)}I_m)^{-1}=(\widetilde{\widehat{v}},u_k), \quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Переобозначим, как и выше, $G_k^{(p)}$, $p = \overline{1, m+2}$, через $G_k^{(+)}$, $G_k^{(-)}$, $G_k^{(0i)}$, $i = \overline{1, m}$, перепишем последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} G_k^{(01)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + \ldots + G_k^{(0m)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + G_k^{(+)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} + G_k^{(-)}\delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} = (\widetilde{w}, u_k) \\ G_k^{(01)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(01)}}\right) + \ldots + G_k^{(0m)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(0m)}}\right) + G_k^{(+)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(+)}}\right) + G_k^{(-)}\left(-\dfrac{1}{\lambda_k^{(-)}}\right) = (\widetilde{v_0}, u_k) \\ G_k^{(01)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(01)} I_m)^{-1} + \ldots + G_k^{(0m)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(0m)} I_m)^{-1} + \\ + G_k^{(+)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(+)} I_m)^{-1} + G_k^{(-)}\widehat{\rho}^{1/2}\delta^{-1/2}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(-)} I_m)^{-1} = (\widetilde{\widehat{v}}, u_k), \ k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{17}$$

В матричной форме эту систему можно записать так:

$$R_k \begin{pmatrix} G_k^{(01)} \\ \vdots \\ G_k^{(0m)} \\ G_k^{(+)} \\ G_k^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\widetilde{w}, u_k) \\ (\widetilde{v_0}, u_k) \\ (\widetilde{\widehat{v}}, u_k) \end{pmatrix},$$

где R_k, $k = 1, 2, \ldots$, заданы по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \ldots & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} & \delta^{-1/2}\mu_k^{1/2} \\ -\frac{1}{\lambda_k^{(01)}} & \ldots & -\frac{1}{\lambda_k^{(0m)}} & -\frac{1}{\lambda_k^{(+)}} & -\frac{1}{\lambda_k^{(-)}} \\ \widehat{\rho}^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(01)} I_m)^{-1} & \ldots & \widehat{\rho}^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(0m)} I_m)^{-1} & \widehat{\rho}^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(+)} I_m)^{-1} & \widehat{\rho}^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\gamma} - \lambda_k^{(-)} I_m)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что R_k — матрица, составленная из векторов $\varphi_k^{(p)}$:

$$R_k = (\varphi_k^{(01)}, \ldots, \varphi_k^{(0m)}, \varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(-)}). \tag{18}$$

Введём теперь матрицу $\mathcal{J} := \mathrm{diag}\{I, -I, -I_m\}$.

Вычисляя $R_k^\tau \mathcal{J} R_k$ с учётом (18), и леммы 1, получим

$$R_k^\tau \mathcal{J} R_k = \begin{pmatrix} [\varphi_k^{(01)}, \varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(01)}, \varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(01)}, \varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(01)}, \varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(0m)}, \varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(0m)}, \varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(0m)}, \varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(0m)}, \varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(+)}, \varphi_k^{(-)}] \\ [\varphi_k^{(-)}, \varphi_k^{(01)}] & \ldots & [\varphi_k^{(-)}, \varphi_k^{(0m)}] & [\varphi_k^{(-)}, \varphi_k^{(+)}] & [\varphi_k^{(-)}, \varphi_k^{(-)}] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^{-1} g_k'(\lambda_k^{(01)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1} g_k'(\lambda_k^{(0m)}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{-1} g_k'(\lambda_k^{(+)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^{-1} g_k'(\lambda_k^{(-)}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу (15) следует, что

$$\det R_k^\tau \mathcal{J} R_k = (\det R_k)^2 = \delta^{-(m+2)} g_k'(\lambda_k^{(01)}) \cdot \ldots \cdot g_k'(\lambda_k^{(0m)}) g_k'(\lambda_k^{(+)}) g_k'(\lambda_k^{(-)}), \ k = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Учитывая ещё соотношения $f_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$, $f_k'(\lambda_k^{(p)}) = \lambda_k^{(p)} g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$, из (19) приходим к выводу, что $\det R_k \neq 0$. Значит, система (16) имеет единственное решение при любом $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}, \widetilde{v}_0, \widetilde{\widetilde{v}})^\tau \in \mathcal{H}^{m+2}$, а потому коэффициенты $G_k^{(p)}$ в ней находятся однозначно. □

Заключение

Исследована спектральная задача, ассоциированная с интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра второго порядка в гильбертовом пространстве. Подобная проблема, связанная с неполным интегро-дифференциальным уравнением второго порядка (2), когда $A = I$, $\beta = 0$, была исследована в [7]. В данной статье удается получить обобщение результатов работы [7] для спектральной задачи, ассоциированной с полным интегро-дифференциальным уравнением второго порядка, не разрешённым относительно старшей производной. По схеме, приведенной в [7], в задаче (2) осуществлён переход от исходного уравнения к дифференциальному уравнению первого порядка в сумме гильбертовых пространств. На этой основе изучена ассоциированная спектральная задача. Доказано, что система собственных векторов образует базис. В дальнейшем планируется получить разложение решения задачи в виде ряда по системе собственных элементов.

Автор благодарит профессора Н. Д. Копачевского за постановку задачи и руководство работой.

Список цитируемых источников

1. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14-21 августа, 2011). Часть 1. Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т.45. — С. 43–61.
2. *Закора Д. А.* Малые движения и нормальные колебания вращающейся идеальной релаксирующей жидкости // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2009. — Т. 22(61), № 1. — С. 53-76.
3. *Закора Д. А., Копачевский Н. Д.* О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка Н. Д. Копачевский // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2004. — Т. 17(56), № 1. — С. 10-26.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М: Наука, 1970. — 280 с.
5. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О. А.", 2012. — 152 с.
6. *Копачевский Н. Д., Сёмкина Е. В.* Об интегродифференциальных уравнениях Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2013. — Т. 26(65), № 1. — С. 52-79.
7. *Полищук А. В.* Колебания вязкоупругого стержня // КНЦ НАНУ, Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского. — 2013. — С. 71-72.
8. *Kopachevsky N. D., Syomkina E. V.* Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64-87. — ISSN 2077-9879.

Получена 29.05.2014