Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 9–18

УДК 517.984 : 517.958

Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы «капиллярная жидкость-газ»[1]

Э. Л. Газиев*, **Н. Д. Копачевский****,***, **З. З. Ситшаева***,***

*Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, 95015.

**Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, 95007,

***Воронежский государственный университет, Воронеж, 394006.

E-mail: egaziev@list.ru, kopachevsky@list.ru, szz2008@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается двумерная проблема собственных колебаний системы, состоящей из идеальной капиллярной жидкости и баротропного газа в ограниченной области, и ассоциированная с ней спектральная задача сопряжения. Приводятся собственные функции задачи с горизонтальной границей сопряжения. Доказана теорема об интегральном представлении оператора, обратного к оператору потенциальной энергии системы, и найден вид функции Грина соответствующей краевой задачи.

Ключевые слова: капиллярная жидкость, газ, стратификация, собственные колебания, спектральная задача, оператор потенциальной энергии, функция Грина, обратный оператор.

Введение

Проблемы гидромеханики невесомости описываются начально-краевыми и краевыми спектральными задачами, большинство которых не поддается аналитическому решению, см. монографии [1], [2], [7], [16]. В этой связи внимание исследователей привлекают прямые методы решения, основанные на вариационном подходе, см., например, монографии и статьи [2], [3], [8]–[16]. В перечисленных работах построение проекционного способа нахождения приближенного (обобщенного) решения осуществляется с использованием вариационных или энергетические соотношений, которому удовлетворяет точное решение рассматриваемых задач. Самостоятельный интерес представляет также проблема выбора координатных функций, которая для задач гидродинамики капиллярной жидкости, а также стратифицированных жидкостных сред, обсуждается, в частности, в работах [2], [3], [6], [10], [13]. В работах [1], [4], [15] изучается проблема малых движений и собственных колебаний для гидросистемы «жидкость–баротропный газ» в ограниченной области, в условиях близких к невесомости. Существенной особенностью спектральной краевой задачи, соответствующей этой проблеме, является наличие спектрального параметра в одном из уравнений задачи и в одном из граничных условий на криволинейной (в общем случае) поверхности сопряжения областей. Для этой задачи вариационные отношения были получены в [1, с. 100, 108], [4, с. 25, 33], см. также [15]. Разработанный на их основе проекционный метод был предложен в [6], координатные функции — найдены в [5], [6].

Нерешенным аспектом изучаемой проблемы остается вопрос о нахождении оператора, обратного к оператору потенциальной энергии системы, обусловленному влиянием

[1]Исследования второго и третьего соавторов выполнены при финансовой поддержке фонда РНФ, (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

© Э. Л. ГАЗИЕВ, Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, З. З. СИТШАЕВА

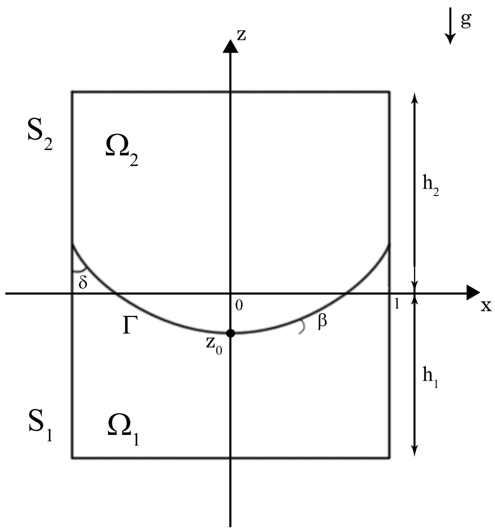

Рис. 1. Поперечное сечение канала.

капиллярных и гравитационных сил и определенному в точках поверхности сопряжения. Этот вопрос для двумерной задачи о собственных колебаниях идеальной жидкости со свободной поверхностью в сосуде решен в [2, с. 317–318], см. также [16]. Цель данной работы — обобщить эту методику на случай двумерной задачи о собственных колебаниях системы «жидкость–баротропный газ», находящейся в условиях близких к невесомости.

1. Постановка проблемы и основные предположения

Сформулируем постановку проблему, следуя работам [4], [15]. В декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим прямоугольный канал, поперечное сечение которого лежит в плоскости Oxz (т. е. при $y = \mathrm{const}$). Будем считать, что нижнее днище $\widetilde{\Gamma}_1$ и верхнее днище $\widetilde{\Gamma}_2$ лежат в плоскостях $z = -\widetilde{h}_1$, $\widetilde{h}_1 > 0$, и $z = \widetilde{h}_2$, $\widetilde{h}_2 > 0$, соответственно.

Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ и баротропным газом. Предположим, что гравитационное поле с ускорением $\vec{g} = -\beta g_0 \vec{e}_3$ действует вдоль оси Oz сверху вниз, $\vec{e}_3$ — орт оси Oz, g_0 — ускорение свободного падения, β — коэффициент перегрузки. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ криволинейную (в общем случае) равновесную поверхность сопряжения, т. е. поверхность, которая разделяет среды в состоянии статического равновесия. Тогда в состоянии статического равновесия жидкость занимает область $\widetilde{\Omega}_1$, ограниченную поверхностью $\widetilde{\Gamma}$, частью $\widetilde{S}_1 \subset \widetilde{S}$ твердой боковой стенки $\widetilde{S}$ и нижним днищем $\widetilde{\Gamma}_1$ контейнера, а газ расположен в области $\widetilde{\Omega}_2$, ограниченной поверхностью $\widetilde{\Gamma}$, частью $\widetilde{S}_2 \subset \widetilde{S}$ стенки, $\widetilde{S} = \widetilde{S}_1 \cup \widetilde{S}_2$, и верхним днищем $\widetilde{\Gamma}_2$.

Эту проблему можно рассматривать в поперечном сечении, т. е. в двумерной постановке в плоскости Oxz, см. рис. 1. Здесь через Γ обозначена дуга, которую образует поверхность $\widetilde{\Gamma}$ с плоскостью $y = 0$. В дальнейших рассуждениях дугу Γ будем считать найденной и использовать параметрическую форму ее представления:

$$x_\Gamma = x_\Gamma(s), \quad z_\Gamma = z_\Gamma(s), \quad -s_1 \le s \le s_1, \quad x_\Gamma(s_1) = l, \quad x_\Gamma(-s_1) = -l.$$

Выберем в качестве характерного размера полуширину l канала, а характерной плотности — плотность жидкости ρ_1 и перейдем к безразмерным переменным. Тогда баротропный газ (см. [4], [15]) является экспоненциально стратифицированным и

$$\rho_{2,0} := \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0)\exp(-2\varepsilon z), \quad \varepsilon := \beta g_0 l/(2a^2),$$

где $a^2 = \mathrm{const}$ — квадрат скорости звука в газе. Для проблемы малых собственных колебаний гидросистемы получаем следующую спектральную задачу для потенциалов смещений $\Phi_1 := \Phi_1(x,z)$ в жидкости и $\Phi_2 := \Phi_2(x,z)$ в газе в безразмерной форме:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ (\text{при } \ x = \pm 1, \ \ z = -h_1), \tag{1.1}$$

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda\alpha^2\Phi_2 \ \ (\text{в } \ \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{при } \ x = \pm 1, \ \ z = h_2), \tag{1.2}$$

с кинематическим и динамическим условиями сопряжения

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta, \ \ -s_0 \le s \le s_0, \quad x_\Gamma(-s_0) = -1, \ \ x_\Gamma(s_0) = 1,$$

$$P_\Gamma(-\Delta_\Gamma + a_\sigma)P_\Gamma\zeta =: B_\sigma\zeta = \lambda(\Phi_1 - P_\Gamma(\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2), \quad -s_0 \le s \le s_0, \tag{1.3}$$

$$-\zeta'(-s_0) + \chi\zeta(-s_0) = 0, \quad \zeta'(s_0) + \chi\zeta(s_0) = 0, \tag{1.4}$$

и условиями нормировки

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \ \int\limits_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z)\Phi_2 d\Omega_2 = 0, \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta_0\Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}(z)\,\mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2), \quad \Delta_\Gamma := d^2/ds^2, \quad P_\Gamma\zeta := \zeta - \frac{1}{2s_0}\int\limits_{-s_0}^{s_0}\zeta ds, \tag{1.6}$$

$$a_\sigma(s) := -(k(s))^2 + (B_0 - b_0\exp(-2\varepsilon z))\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3}), \quad \chi := -k(s_0)\cos\delta/\sin\delta, \tag{1.7}$$

$$h_1 := \frac{\widetilde{h}_1}{l}, \ h_2 := \frac{\widetilde{h}_2}{l}, \ \lambda := \frac{\rho_1\omega^2 l^3}{\sigma}, \ \alpha^2 := \frac{\sigma}{\rho_1 l a^2}, \ B_0 := \frac{\beta\rho_1 g_0 l^2}{\sigma}, \ b_0 := \frac{\beta\rho_{2,0}(0)g_0 l^2}{\sigma}. \tag{1.8}$$

$\vec{n}$ — вектор внешней нормали; $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ; $\zeta = \zeta(s)$ — отклонение от равновесной дуги Γ в точке s вдоль $\vec{n}$; $k = k(s)$ — кривизна поверхности Γ; $0 < \delta < \pi$ — угол смачивания; ортопроектор P_Γ действует из пространства $L_2(-s_0, s_0)$ в подпространство

$$L_{2,0}(-s_0, s_0) := \{u = u(s) \in L_2(-s_0, s_0), \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} u(s)ds = 0\}.$$

Отметим, что в спектральной задаче (1.1)–(1.5) неизвестный спектральный параметр λ входит в уравнение (1.2) и граничное условие (1.3). Если оператор B_σ положительно определен, то в [4], [15] доказано, что собственные значения задачи (1.1)–(1.5) можно получить с помощью вариационного отношения

$$\frac{\int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\,d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2\,d\Omega_2}{\alpha^2\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\Phi_2|^2\,d\Omega_2 + \int_{-s_0}^{s_0}\Big[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\,(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)))ds\Big]} \tag{1.9}$$

на функциях $(\Phi_1;\Phi_2) \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$ удовлетворяющих второму и третьему условиям нормировки из (1.5).

2. Вычисление оператора B_σ^{-1}

Основную трудность при нахождении собственных значений с использованием функционала (1.9) составляет нахождение слагаемых вида

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0}\Big[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\,(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)))ds\Big],$$

т. е. проблема обращения оператора B_σ, действующего в подпространстве $L_{2,0}(-s_0, s_0)$. В монографии [2, с. 317-319] приводится без вывода способ нахождения оператора B_σ^{-1} для двумерной задачи о колебаниях одной идеальной жидкости. Ниже мы обобщим эту методику на случай плоской задачи для системы «капиллярная жидкость–баротропный газ». Изложим предварительно некоторые соображения.

1°. В силу симметрии изучаемой (двумерной) задачи функции $u = u(s)$ либо четные либо нечетные, и потому пространства H_1 и H_2 соответственно нечетных и четных функций являются инвариантными относительно линейного дифференциального оператора B_σ. Тогда они инвариантны и относительно обратного оператора B_σ^{-1} (интегрального). Поэтому, во-первых, можно искать решать задачи раздельно в пространствах H_1 и H_2, а во-вторых, решение можно искать с использованием функции Грина.

2°. Как уже упоминалось выше, задача с горизонтальной границей является частным случаем проблемы с произвольным углом смачивания (т. е. постоянная χ может быть как нулем, так и не нулем), потому в качестве координатных функций $(\Phi_{1k};\Phi_{2kp})$ естественно выбрать решения задачи с горизонтальной границей. Такая спектральная проблема была решена в статье [5] при условии $h_2 = 1$. С использованием методики [5] при произвольном $h_2 > 0$ для любого $k \geq 1$ получено, что

$$\Phi_{1k} = \mathrm{ch}(\mu_k(z+h_1))\left\{\begin{array}{ll}\sin(\mu_k x) & \text{в } H_1,\\ \cos(\mu_k x) & \text{в } H_2,\end{array}\right\},\quad \mu_k = \pi(k-1/2),$$

$$\begin{gathered}\Phi_{2k0} = b_{k0}\exp(\varepsilon z)((\xi_{k0}-\varepsilon)\exp(\xi_{k0}(z-h_2))+\\ +(\varepsilon+\xi_{k0})\exp(-\xi_{k0}(z-h_2)))\left\{\begin{array}{ll}\sin(\mu_k x) & \text{в } H_1,\\ \cos(\mu_k x) & \text{в } H_2,\end{array}\right\},\quad b_{k0} = -\frac{\mu_k \mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{2\mathrm{sh}(\xi_{k0}h_2)(\xi_{k0}^2-\varepsilon^2)},\\ \Phi_{2kp} = b_{kp}\exp(\varepsilon z)((\varepsilon\sin(\gamma_{kp}h_2)+\gamma_{kp}\cos(\gamma_{kp}h_2))\cos(\gamma_{kp}z)+\\ +(-\varepsilon\cos(\gamma_{kp}h_2)+\gamma_{kp}\sin(\gamma_{kp}h_2))\sin(\gamma_{kp}z))\left\{\begin{array}{ll}\sin(\mu_k x) & \text{в } H_1,\\ \cos(\mu_k x) & \text{в } H_2,\end{array}\right\},\\ b_{kp} = \mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1)/(\sin(\gamma_{kp}h_2)(\varepsilon^2+\gamma_{kp}^2)),\quad p = 1,2,\ldots .\end{gathered}$$

Перейдем к нахождению оператора B_σ^{-1}. В подпространстве функций $L_{2,0}(-s_0, s_0)$ с нулевым средним значением на равновесной дуге Γ рассмотрим задачу

$$B_\sigma u = f, \quad u = u(s) \in L_{2,0}(-s_0, s_0), \;\; f = f(s) \in L_{2,0}(s_0, s_0), \tag{2.1}$$

в которой оператор B_σ действует по закону (см. (1.3), (1.4), (1.6)–(1.8))

$$B_\sigma u := P_\Gamma[-u'' + a_\sigma(s)u], \;\; -s_0 < s < s_0, \quad -u' + \chi u|_{s=-s_0} = 0, \quad u' + \chi u|_{s=s_0} = 0. \tag{2.2}$$

Заметим, что из (1.7) следует, что функция $a_\sigma(s)$ — четная, а константа χ определяется углом смачивания. Рассмотрим неоднородную задачу (2.1)–(2.2). Представим ее решение $u = u(s)$ через ядро $G(s, \varrho)$ интегрального оператора B_σ^{-1}:

$$u = (B_\sigma^{-1} f)(s) = \int\limits_{-s_0}^{s_0} G(s, \varrho) f(\varrho) d\varrho,$$

которое выражается через решения $v_1 = v_1(s) \in H_1$ и $v_2 = v_2(s) \in H_2$ однородных задач

$$-v_1'' + a_\sigma(s)v_1 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_1(0) = 0, \;\; v_1'(0) = 1, \tag{2.3}$$

$$-v_2'' + a_\sigma(s)v_2 = 0, \quad -s_0 < s < s_0, \quad v_1(0) = 1, \;\; v_1'(0) = 0, \tag{2.4}$$

соответственно. Общее решение однородного уравнения, соответствующего задаче (2.1)–(2.2), имеет представление

$$u_{00} = c_1 v_1(s) + c_2 v_2(s).$$

Решение уравнения (2.1) будем отыскивать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$u = c_1(s)v_1(s) + c_2(s)v_2(s). \tag{2.5}$$

С использованием граничных условий из (2.2) приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_1', c_2':

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f + c_3 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$c_3 = \frac{1}{2s_0} \int\limits_{-s_0}^{s_0} (a(s)u - u'')ds = -\frac{1}{2s_0} \int\limits_{-s_0}^{s_0} [c_1' v_1' + c_2' v_2']ds.$$

Детерминант

$$D(s) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$$

системы (2.6) является вронскианом и равен const. В самом деле, имеем

$$D'(s) = v_1 v_2'' - v_1'' v_2 = v_1 a(s) v(2) - a(s) v_1 v_2 \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad D(s) = \text{const} = D(0) = -1.$$

Тогда

$$c_1'(s) = -v_2(s)[f(s) + c_3], \quad c_2'(s) = v_1(s)[f(s) + c_3],$$

и после интегрирования приходим к выражениями для коэффициентов $c_1(s)$ и $c_2(s)$:

$$c_1(s) = -\int_0^s v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho - c_3\int_0^s v_2(\varrho))d\varrho + c_1^0, \quad c_2(s) = \int_0^s v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho - c_3\int_0^s v_1(\varrho))d\varrho + c_2^0.$$

Отсюда с учетом (2.5) следует, что

$$u = c_1^0 v_1(s) + c_2^0 v_2(s) + v_1(s)[-\int_0^s v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho - c_3\int_0^s v_2(\varrho))d\varrho] +$$
$$+ v_2(s)[\int_0^s v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho + c_3\int_0^s v_1(\varrho))d\varrho].$$

Теперь с использованием граничных условий из (2.2) находим коэффициенты c_1^0 и c_2^0:

$$c_2^0 = \frac{\tau_1}{2\tau_2}\int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \frac{c_3}{\tau_2}[-\tau_1\psi_2(s_0) + \tau_2\psi_1(s_0)] - \Big(\int_0^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int_0^{-s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho\Big),$$

$$c_1^0 = -\frac{\tau_2}{2\tau_1}\int_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho + \Big(\int_0^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int_0^{-s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho\Big);$$

и, наконец, общее решение $u = u(s)$ задачи (2.1)–(2.2) в виде

$$u(s) = c_3F(s) + \frac{1}{2}\int_{-s_0}^{s_0} \widetilde{w}(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho, \tag{2.7}$$

где

$$\tau_j := v_j'(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^s v_j(\varrho)d\varrho, \quad j = 1, 2,$$

$$F(s) := \Big(\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s) - \psi_1(s)\Big)v_2(s) + v_2(s)\psi_1(s) - v_1(s)\psi_2(s),$$

$$\widetilde{w}(s,\varrho) := \frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho) - v_1(s)v_2(\varrho) - v_2(s)v_2(\varrho),$$

$$G_0(s,\varrho) := \begin{cases} v_2(s)v_1(\varrho) & -s_0 \le \varrho \le s \le s_0, \\ v_1(s)v_2(\varrho) & -s_0 \le s \le \varrho \le s_0. \end{cases}$$

Осталось вычислить коэффициент c_3, который найдем из условия, обеспечивающего единственность решения в пространстве $u \in L_{2,0}(-s_0, s_0)$, т. е. из условия нормировки функции $\zeta(s)$ (см. первое условие в (1.5)):

$$0 = \int_{-s_0}^{s_0} u(s)ds = c_3\int_{-s_0}^{s_0} F(s)ds + \frac{1}{2}\int_{-s_0}^{s_0} ds\int_{-s_0}^{s_0} \widetilde{w}(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} ds\int_{-s_0}^{s_0} G_0(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho. \tag{2.8}$$

Для этого определим с учетом четности $v_2(s)$ и нечетности $v_1(s)$ все слагаемые в правой части соотношения (2.8). Первое слагаемое равно

$$c_3 \int\limits_{-s_0}^{s_0} F(s)ds = -2c_3\tau_3, \quad \tau_3 := -\int\limits_{0}^{s_0} F(s)ds. \tag{2.9}$$

Для второго слагаемого и третьего слагаемых получаем выражения

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-s_0}^{s_0} ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} \widetilde{w}(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho = \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau_1}{\tau_2}\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(s)ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho -$$
$$-\frac{\tau_2}{\tau_1}\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(s)ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(s)ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho -$$
$$-\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(s)ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho\Big) = \psi_2(s_0)\Big(\frac{\tau_1}{\tau_2}\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho\Big),$$

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} G_0(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho = \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(s)ds \int\limits_{-s_0}^{s} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(s)ds \int\limits_{s}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho.$$

Далее, вычислим сумму второго и третьего слагаемых в правой части (2.8), при этом добавим и вычтем слагаемое

$$\psi_2(s_0)\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)\,d\varrho$$

и учтем, что

$$\int\limits_{-s_0}^{s} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho = \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \int\limits_{s}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho;$$

затем поменяем порядок интегрирования, в результате получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-s_0}^{s_0} ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} \widetilde{w}(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int\limits_{-s_0}^{s_0} ds \int\limits_{-s_0}^{s_0} G_0(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho =$$
$$= \frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s_0)\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(\varrho)f(\varrho)\psi_2(\varrho)d\varrho + \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(s)ds \int\limits_{s}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho. \tag{2.10}$$

Последнее слагаемое в равенстве (2.10) с учетом нечетности $v_1(s)$ равно

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_1(s)ds \int\limits_{s}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho = \int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)\psi_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho - \psi_1(s_0)\int\limits_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho;$$

с учетом этого соотношение (2.10) приводится к виду

$$\frac{1}{2}\int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} \widetilde{w}(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho + \int_{-s_0}^{s_0} ds \int_{-s_0}^{s_0} G_0(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho = \Big[\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s_0) - \psi_1(s_0)\Big]\int_{-s_0}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho +$$
$$+\int_{-s_0}^{s_0}[v_2(\varrho)\psi_1(\varrho) - v_1(\varrho)\psi_2(\varrho)]f(\varrho)d\varrho = \int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho)f(\varrho)d\varrho. \quad (2.11)$$

Теперь из соотношения (2.8) с использованием суммы (2.9) и (2.11) получаем, что

$$c_3 = \frac{1}{2}\tau_3^{-1}\int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho)f(\varrho)d\varrho,$$

и, наконец, с учетом (2.7) получаем единственное решение $u = u(s)$ задачи (2.1)–(2.2):

$$u(s) = \frac{1}{2}\tau_3^{-1}F(s)\int_{-s_0}^{s_0} F(\varrho)f(\varrho)d\varrho +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-s_0}^{s_0}\Big\{\frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho) - v_1(s)v_2(\varrho) - v_2(s)v_1(\varrho)\Big\}f(\varrho)d\varrho +$$
$$+v_1(s)\int_{s}^{s_0} v_2(\varrho)f(\varrho)d\varrho + v_2(s)\int_{-s_0}^{s} v_1(\varrho)f(\varrho)d\varrho =: \int_{-s_0}^{s_0} G(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. *Задача* (2.1), *в которой оператор* B_σ *действует по закону* (2.2), *имеет единственное решение в пространстве*

$$L_{2,0}(-s_0,s_0) := \Big\{u = u(s) \in L_2(-s_0,s_0), \quad \int_{-s_0}^{s_0} u(s)ds = 0\Big\} = H_1 \oplus H_2,$$

Это решение представляется в виде

$$u(s) = \int_{-s_0}^{s_0} G(s,\varrho)f(\varrho)d\varrho,$$

где H_1 *и* H_2 *— пространства нечетных и четных функций переменной* s*;*

$$G(s,\varrho) = \begin{cases} v_2(s)v_1(\varrho) + \frac{1}{2}w(s,\sigma) & -s_0 \le \varrho \le s \le s_0, \\ v_1(s)v_2(\varrho) + \frac{1}{2}w(s,\sigma) & -s_0 \le s \le \varrho \le s_0, \end{cases},$$

$$w(s,\sigma) = \tau_3^{-1}F(s)F(\varrho) + \frac{\tau_1}{\tau_2}v_2(s)v_2(\varrho) - \frac{\tau_2}{\tau_1}v_1(s)v_1(\varrho) - v_1(s)v_2(\varrho) - v_2(s)v_1(\varrho),$$

$$F(s) = \Big(\frac{\tau_1}{\tau_2}\psi_2(s) - \psi_1(s)\Big)v_2(s) + v_2(s)\psi_1(s) - v_1(s)\psi_2(s),$$

$$\tau_3 := -\int_0^{s_0} F(s)ds, \quad \tau_j := v_j'(s_0) + \chi v_j(s_0), \quad \psi_j(s) = \int_0^{s} v_j(\varrho)d\varrho, \ \ j = 1, 2;$$

функции $v_1 = v_1(s) \in H_1$ *и* $v_2 = v_2(s) \in H_2$ *являются решениями задач* (2.3), (2.4).

3. Выводы

В работе доказана теорема о форме функции Грина краевой задачи для оператора потенциальной энергии системы «капиллярная жидкость–газ», которая позволяет найти оператор, обратный к оператору потенциальной энергии рассматриваемой системы. С использованием этого утверждения можно найти коэффициенты системы Ритца, полученной на основе вариационного отношения (1.9). Аналогичные результаты могут быть получены и в осесимметричном случае.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.
2. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.
3. *Барняк М. Я., Лещук О. П.* Проекційний метод розв'язування задачі про власні коливання в'язкої рідини в циліндрі з урахуванням поверхневого натягу // Акустичний вісник. — 2008. — Т.11, №3. — С. 3–12.
4. *Газиев Э. Л., Копачевский Н. Д.* Малые движения и собственные колебания гидросистемы «жидкость–баротропный газ»// Украинский матем. вестник. — 2013. — Т.10, №1. — С. 16-53.
5. *Газиев Э. Л.* Собственные колебания гидросистемы «жидкость–газ» в цилиндрической области // Динамические системы. — 2012. — Т.2(30), №1–2. — С. 3–22.
6. *Газиев Э. Л.* О вариационном подходе к решению одной спектральной задачи сопряжения с искомым параметром в уравнении и условии на криволинейной границе // XXII Междунар. научная конференция «Математика. Экономика. Образование». VIII Междунар. симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». VIII Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве». Дюрсо, 27 мая–3 июня 2014 г. — Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. — С. 46.
7. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
8. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. — Симферополь: ФОРМА, 2008. — 140 с.
9. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 7–10.
10. *Луковский И. А., Барняк М. Я.* Модифікація варіаційного методу розв'язку задач про власні коливання рідини в похилому циліндрі // Доповіді НАН України. — 1997. — №5. — С. 62—66.
11. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наукова думка, 1984. — 229 с.
12. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

13. *Barnyak M. Ya.* Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form // Ukrainian Math. Journal. — 2005. — Vol.57, no.12. — P. 1853–1869.
14. *Gavrilyuk I. P., Lukovsky I. A., Makarov V. L., Timokha A. N.* Evolutional problems of the contained fluid. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т.58. — 233 с.
15. *Gaziev E. L., Kopachevsky N. D.* Small motions and eigenoscillations of a “fluid-barothropic gas” hydrosystem // Journal of Math. Sciences. — Vol.192, no.4, 2013. — P. 389–416.
16. *Myshkis A. D., Babckii V. G., Kopachevsky N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-Gravity Fluid Mechanics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc, 1987. — 583 pp.

Получена 02.06.2014