

УДК 530.182

## Разрывные и хаотические автоколебания в неявно сингулярно возмущенных динамических системах

В. В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины,  
Киев 03057. E-mail: gosul@ukr.net

**Аннотация.** Для неявно сингулярно возмущенных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка найдены некоторые достаточные условия существования разрывных (релаксационных) периодических решений (автоколебаний), определяемых с помощью некоторой вспомогательной динамической системы с импульсным воздействием. Показано, что определенные таким образом разрывные периодические решения обладают типичными свойствами релаксационных автоколебаний, определяемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Также установлена возможность появления хаотических автоколебаний как расширенных решений рассматриваемых систем.

**Ключевые слова:** неявно сингулярно возмущенная система, релаксационное периодическое решение, хаотические автоколебания.

### 1. Введение

Во многих реальных механических, радиотехнических, биологических и др. объектах наблюдаются периодически колебательные процессы, в которых медленное, плавное изменение состояния объекта в течение конечного промежутка времени чередуется с быстрым, скачкообразным изменением его состояния за бесконечно малое время. Такие колебательные процессы получили название разрывных или релаксационных колебаний [1, 2].

Простейшей математической моделью, описывающей релаксационные колебания, являются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром  $\varepsilon \rightarrow 0$  при части производных [2, 3]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (1.1)$$

Периодические по времени решения сингулярно возмущенных систем типа (1.1) называются релаксационными автоколебаниями [4].

Классическим примером системы, имеющей релаксационные автоколебания, служит система уравнений Ван-дер-Поля [2, 5]:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = x - \frac{y^3}{3} + y. \quad (1.2)$$

Вопрос о существовании релаксационных автоколебаний в системе (1.1) решается в терминах вырожденной системы [3], являющейся гибридной системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad g(x, y) = 0. \quad (1.3)$$

Траектории системы (1.3) в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  естественно трактовать как пределы фазовых траекторий невырожденной системы (1.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В частности, фазовая траектория релаксационных автоколебаний системы (1.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к замкнутой траектории системы (1.3), состоящей из чередующихся участков двух типов: участков, проходимых фазовой точкой системы (1.3) за конечное время (каждый из них лежит на кривой, определяемой уравнением  $g(x, y) = 0$ ), и участков, проходимых фазовой точкой системы (1.3) мгновенно. Каждый из них начинается в точке срыва, т. е. в точке, где

$$g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \neq 0.$$

Решение системы (1.3), соответствующее такой замкнутой траектории (предельному циклу), состоящее из описанных выше участков "быстрых" и "медленных" движений, называется разрывным периодическим решением [3].

В монографии [3] определены условия существования релаксационных автоколебаний в системе (1.1). Также получены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотические формулы для характеристик таких автоколебаний – периода, амплитуды и т. д. Асимптотические формулы для периода и амплитуды релаксационных автоколебаний в системе уравнений (1.2) впервые получил А. А. Дородницын [5].

В данной работе рассматриваются условия появления релаксационных периодических решений в системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, z), \quad (1.4)$$

где  $y = \varphi(z)$ , и функция  $\varphi$  не имеет однозначной обратной функции. Переходом к новым переменным, система (1.4) приводится к следующей неявно сингулярно возмущенной системе [6]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(z)), \quad \varphi'(z) \frac{dz}{dt} = g(x, z). \quad (1.5)$$

Возможность появления в системе (1.5) релаксационных периодических решений обусловлена возникновением малого параметра  $\varepsilon = \varphi'(z(t)) \rightarrow 0$  при  $z(t) \rightarrow z^*$  ( $z^* : \varphi'(z^*) = 0$ ), т.е. когда компонента  $z(t)$  фазовой траектории находится вблизи критической точки  $z^*$  функции  $\varphi(z)$ . При этом участки "быстрых" движений фазовой траектории расположены вдоль прямой, определяемой уравнением  $z = z^*$ .

## 2. Постановка задачи

В некоторой ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2(x, y)$  рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \varphi(y) \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (2.1)$$

где функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $\varphi(y)$  предполагаются непрерывными и достаточно гладкими, чтобы в данной области выполнялись условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для рассматриваемой системы. При этом также предполагается, что функция  $\varphi(y)$  имеет изолированный простой ноль  $y^* : \varphi(y^*) = 0, \varphi'(y^*) \neq 0$

такой, что при некоторых  $h_k > 0$  ( $k = \overline{1;3}$ ) имеет место включение  $\mathcal{O}_{h_1, h_2, h_3}(y^*) = I(h_1; h_2) \times I(y^* - h_3; y^*) \subset \mathcal{O}$ , где символ

$$I(\alpha; \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \min(\alpha; \beta) < x < \max(\alpha; \beta)\}$$

обозначает открытый интервал вещественной оси  $\mathbb{R}$  с концами в точках  $\alpha$  и  $\beta$ , а его замыкание, обозначим символом  $\bar{I}(\alpha; \beta)$ .

Обозначим через  $x = x(t, x_0, y_0)$ ,  $y = y(t, x_0, y_0)$  решение задачи Коши для системы (2.1) с начальными условиями:

$$x(t_0, x_0, y_0) = x_0, \quad y(t_0, x_0, y_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Т.к. система (2.1) является автономной, то не нарушая общности будем считать, что начальный момент времени  $t_0 = 0$ . Также положим  $\forall \varepsilon > 0, \forall z \in I(h_1; h_2)$

$$t_\varepsilon(z) = \inf \left\{ \tau > 0 : \lim_{t \rightarrow \tau - 0} \frac{dx(t, z, y^* - \varepsilon)}{dy(t, z, y^* - \varepsilon)} = 0 \right\}, \quad t(z) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon(z). \quad (2.3)$$

Определим отображение полупоследования для системы (2.1).

**Определение 1.** Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $I(\alpha; \beta) \subseteq I(h_1; h_2)$  и отображение  $\Pi_\varepsilon : I(\alpha; \beta) \rightarrow I(h_1; h_2)$ , определяется по правилу

$$\forall z \in I(\alpha; \beta) \quad \Pi_\varepsilon(z) = x(t_\varepsilon(z), z, y^* - \varepsilon). \quad (2.4)$$

Тогда отображение

$$\Pi : I(\alpha; \beta) \rightarrow I(h_1; h_2), \quad \forall z \in I(\alpha; \beta) \quad \Pi(z) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_\varepsilon(z), \quad (2.5)$$

будем называть отображением полупоследования для системы (2.1).

Отметим, что достаточным условием существования отображения полупоследования (2.5) является, например, следующее:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x^* \in I(h_1; h_2) : \forall \varepsilon \in I(0; \varepsilon_0) \quad x(t_\varepsilon(x^*), x^*, y^* - \varepsilon) \in I(h_1; h_2). \quad (2.6)$$

Действительно, в принятых обозначениях соотношение (2.6) означает, что справедливо включение  $\Pi_\varepsilon(x^*) \in I(h_1; h_2)$ . Поэтому из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных следует существование подинтервала  $I(\alpha; \beta) \subseteq I(h_1; h_2)$  на котором определено отображение (2.4), или после предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , определено отображение полупоследования (2.5).

Предположим, что  $I(\alpha; \beta)$  максимальный интервал, на котором определено отображение полупоследования (2.5). Тогда, согласно теореме о вложенных шарах (см. [8] стр.69), последовательность отрезков  $\{\bar{I}(x, \Pi(x))\}_{x \in I(\alpha; \beta)}$  имеет единственную общую точку  $x^{**} \in I(h_1; h_2)$ . Таким образом справедливо равенство

$$\bigcap_{x \in I(\alpha; \beta)} \bar{I}(x; \Pi(x)) = \{x^{**}\}.$$

Поэтому, если  $x^* \in I(h_1; x^{**})$ , то  $\text{doom}(\Pi) = I(h_1; x^{**})$ ,  $\text{cod}(\Pi) = I(x^{**}; h_2)$ , а когда  $x^* \in I(x^{**}; h_2)$  справедливо  $\text{doom}(\Pi) = I(x^{**}; h_2)$ ,  $\text{cod}(\Pi) = I(h_1; x^{**})$ .

Отметим, т.к.

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=y^* \pm \varepsilon} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \frac{f'_x(x, y^*)}{g'_x(x, y^*)} \frac{1 + O(\varepsilon)}{\varphi'(y^*)} \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

то фазовые траектории системы (2.1), начальные состояния которых расположены по разные стороны от прямой  $y = y^*$ , приближаются навстречу друг к другу. Это означает, что система уравнений (2.1) определяет в полуплоскостях, разделяемых прямой  $y = y^*$ , разные динамические системы и не допускает доопределения по непрерывности фазовых траекторий на этой прямой.

Далее, по аналогии с явно сингулярно возмущенными динамическими системами [3], определим разрывные релаксационные автоколебания (периодические решения) в системе (2.1). При этом "медленные" движения будут определяться собственно фазовыми траекториями системы (2.1) в левой полуплоскости от прямой  $y = y^*$ , а "быстрые" движения будут происходить скачком вдоль прямой  $y = y^*$ . Непрерывно дифференцируемое "соединение" данных участков траекторий будет осуществляться с помощью фазовых траекторий некоторой вспомогательной динамической системы с фазовым пространством, расположенном в правой полуплоскости от прямой  $y = y^*$ .

При некотором  $h_4 > 0$  в области  $\tilde{O}_{h_1, h_2, h_4}(y^*) = I(h_1; h_2) \times \bar{I}(y^*; y^* + h_4) \subset \mathbb{R}^2(\tilde{x}, \tilde{y})$  рассмотрим произвольную динамическую систему:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = F(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = G(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (2.7)$$

фазовые траектории которой пересекают прямую  $\tilde{y} = y^*$  под прямым углом, т.е.

$$\left. \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=y^*} = 0.$$

Определим отображение полупоследования для системы (2.7). Полагаем

$$\forall z \in I(h_1; h_2) \quad \tilde{t}(z) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf \left\{ \tau > 0 : \lim_{t \rightarrow \tau - 0} \frac{d\tilde{x}(t, z, y^* + \varepsilon)}{d\tilde{y}(t, z, y^* + \varepsilon)} = 0 \right\}.$$

Отображение полупоследования  $\tilde{\Pi} : I(\alpha; \beta) \rightarrow I(h_1; h_2)$  для системы (2.7) определяем как

$$\forall z \in I(\alpha; \beta) \quad \tilde{\Pi}(z) = \tilde{x}(\tilde{t}(z), z, y^*), \quad (2.8)$$

где также предполагается, что  $I(\alpha; \beta)$  максимальный интервал, на котором определено рассматриваемое отображение.

Введем условное обозначение, обозначив символом  $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}(x; \tilde{\Pi}(x))_{x \in I(\alpha; \beta)}$  динамическую систему (2.7) с функцией полупоследования  $\tilde{\Pi}(x)$ . Тогда на множестве  $\mathbf{K} = \{\tilde{\mathcal{D}}\}$  всех систем (2.7) определим отношение эквивалентности, полагая

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 \sim \tilde{\mathcal{D}}_2 \Leftrightarrow \tilde{\Pi}_{\tilde{\mathcal{D}}_1}(x) = \tilde{\Pi}_{\tilde{\mathcal{D}}_2}(x) \quad \forall x \in I(\alpha; \beta). \quad (2.9)$$

Обозначим также через  $\mathbf{K}/\sim = \{[\tilde{\mathcal{D}}]\}$  фактор-множество, построенное по отношению (2.9), где  $[\tilde{\mathcal{D}}]$  означает множество всех систем (2.7), эквивалентных системе  $\tilde{\mathcal{D}}$ .

### 3. Вспомогательные результаты

Отметим, что введенные выше отображения полупоследования (2.5) и (2.8) являются неубывающими функциями на области их определения. Действительно, т.к. по теореме существования и единственности решений следует невозможность пересечений фазовых траекторий, начинающихся в разных точках фазовой плоскости, то  $\forall \varepsilon > 0$  соответствующие отображения  $\Pi_\varepsilon$  и  $\tilde{\Pi}_\varepsilon$  являются убывающими функциями. Далее переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем необходимое свойство отображений полупоследования. Введем в рассмотрение следующее множество

$$\mathbf{C}_+^1(\bar{I}(h_1; h_2), L) = \left\{ \psi \in \mathbf{C}^1(\bar{I}(h_1; h_2)) : \forall x \in \bar{I}(h_1; h_2) \psi(x) \geq 0, 1 > \psi'(x) \geq 0, \sup_{x \in \bar{I}(h_1; h_2)} (1 - \psi'(x)) = L \right\}.$$

**Лемма 1.** Пусть  $\psi \in \mathbf{C}_+^1(\bar{I}(h_1; h_2), L)$  и предположим, что  $\exists x^* \in I(h_1; h_2)$ , такое, что выполняются следующие условия:

$$1) \Pi(x^*) \in I(h_1; h_2); \quad 2) \Pi(x) > \Pi(x^*) \text{ при } x < x^*; \quad 3) \Pi(x) < \Pi(x^*) \text{ при } x > x^*. \quad (3.1)$$

Тогда справедливо неравенство  $\left[ \tilde{\mathcal{D}}(\Pi(x), x - \text{sgn}(x - x^*)\psi(x))_{x \in I(\alpha; \beta)} \right] \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Положим  $\varphi(x) = x - \text{sgn}(x - x^*)\psi(x)$  и рассмотрим консервативную систему:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = y^* - \tilde{x}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} - x^{**}.$$

Данная система с помощью преобразования  $\tilde{x} \rightarrow \mu(\tilde{x})$ , где  $\mu(\tilde{x}) = \tilde{x}$ , если  $\tilde{x} > x^{**}$  и  $\mu(\tilde{x}) = 2x^{**} - \varphi(x)$  при  $\tilde{x} < x^{**}$ , приводится к системе  $\tilde{\mathcal{D}}$ , функция полупоследования  $\tilde{\Pi}$  которой удовлетворяет следующему равенству

$$\tilde{\Pi}(\Pi(x)) = x - \text{sgn}(x - x^*)\psi(x) \quad \forall x \in I(\alpha; \beta),$$

что, эквивалентно исходному доказываемому неравенству.

Далее определим также отображение  $\Pi_\Sigma : I(\alpha; \beta) \rightarrow I(h_1; h_2)$ , полагая

$$\Pi_\Sigma(x) = \tilde{\Pi}(\Pi(x)) \quad \forall x \in I(\alpha; \beta), \quad (3.2)$$

где  $\tilde{\Pi} : I(\alpha; \beta) \rightarrow I(h_1; h_2)$  отображение полупоследования произвольной динамической системы из класса эквивалентности

$$\left[ \tilde{\mathcal{D}}(\Pi(x), x - \text{sgn}(x - x^*)\psi(x))_{x \in I(\alpha; \beta)} \right]. \quad (3.3)$$

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда отображение (3.2) является липшицевым с константой  $L$ , т.е. выполняется неравенство

$$|\Pi_\Sigma(x_1) - \Pi_\Sigma(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I(\alpha; \beta).$$

**Доказательство.** Согласно определению отображения  $\tilde{\Pi}$  имеем

$$\tilde{\Pi}(\Pi(x)) = x - \operatorname{sgn}(x - x^*)\psi(x) \quad \forall x \in I(\alpha; \beta). \quad (3.4)$$

Пусть для определенности  $x_1 \leq x^* \leq x_2$  (остальные возможные случаи рассматриваются аналогично). Тогда по теореме Лагранжа  $\exists \xi \in I(x_1; x_2): \psi(x_1) - \psi(x_2) = \psi'(\xi)(x_1 - x_2)$ . Далее, согласно определению отображения  $\Pi_\Sigma$ , используя равенство (3.4), получаем:

$$\begin{aligned} |\Pi_\Sigma(x_1) - \Pi_\Sigma(x_2)| &= \Pi_\Sigma(x_2) - \Pi_\Sigma(x_1) = x_1 + \psi(x_1) - (x_2 - \psi(x_2)) = \\ &= (1 - \psi'(\xi))(x_2 - x_1) - 2\psi(x_1) \leq L|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Также непосредственно из (3.4) следует, что  $\tilde{\Pi}(\Pi(x^*)) = x^*$ , т.е. точка  $x^*$  является неподвижной для отображения  $\Pi_\Sigma$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}^*$  динамическую систему, определяемую следующим образом в области  $\mathcal{O}_{h_1, h_2, h_3, h_4}(y^*) = I(h_1; h_2) \times I(y^* - h_3; y^* + h_4)$ . В подобласти  $\mathcal{O}_{h_1, h_2, h_3}(y^*)$  ее фазовые траектории совпадают с фазовыми траекториями системы (2.1), которые продолжаются по непрерывности в подобласть  $\tilde{\mathcal{O}}_{h_1, h_2, h_4}(y^*)$  с помощью фазовых траекторий любой динамической системы  $\tilde{\mathcal{D}}$  из класса эквивалентности (3.3). Тогда, как несложно проверить, отображение  $\Pi_\Sigma$ , определяемое формулой (3.2), является отображением Пуанкаре для полученной динамической системы  $\mathcal{D}^*$ .

При  $0 < L < 1$ , согласно леммы 2, отображение  $\Pi_\Sigma$  является сжимающим. В этом случае из свойств отображения Пуанкаре [7, 9] следует, что динамическая система  $\mathcal{D}^*$  имеет устойчивый предельный цикл, который обозначим символом  $\Gamma(\mathcal{D}^*)$ .

#### 4. Определение и условия существования разрывных периодических автоколебаний

Рассмотрим в области  $\mathcal{O}_{h_1, h_2, h_3, h_4}(y^*)$  динамическую систему с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = F^*(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G^*(x, y) \quad \text{при } t \neq \tau_k, \quad (4.1)$$

$$\Delta x(t) = g(x(t)) \quad \text{при } t = \tau_k, \quad (4.2)$$

где дифференциальные уравнения (4.1) задают динамическую систему  $\mathcal{D}^*$ ,  $g(x) = \tilde{\Pi}(x) - x$ ,  $\tilde{\Pi}$  – функция полупоследования (2.8) произвольной динамической системы из класса эквивалентности (3.3),  $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$ ,  $\{\tau_k\}_{k=0}^\infty$  – последовательность моментов импульсного воздействия, которая определяется рекуррентно

$$x|_{t=0} = x_0, y|_{t=0} = y^*, \tau_0 = \Pi(x_0), \tau_k = t(x'_k), x'_k = \tilde{\Pi}(x_k), x_k = \Pi(x_{k-1}), \quad (4.3)$$

где  $k \geq 1$ ,  $\Pi$  – отображение полупоследования системы (2.1),  $t = t(z)$  – функция, определяемая с помощью (2.3).

**Определение 2.** Периодическое орбитально асимптотически устойчивое решение динамической системы с импульсным воздействием (4.1) – (4.3) будем называть релаксационными периодическими автоколебаниями динамической системы (2.1).

Анонсируя результаты из предыдущего параграфа, приходим к следующей формулировке основного утверждения.

**Теорема 1.** *Предположим, что для системы (2.1)  $\exists x^* \in I(h_1; h_2)$ , такое, что для ее функции полупоследования  $\Pi(x)$  выполняются условия (3.1) из леммы 1. Пусть также  $\psi \in \mathbf{C}_+^1(\bar{I}(h_1; h_2), L)$ , где константа  $0 < L < 1$ . Тогда данная система имеет релаксационное периодическое решение, понимаемое в смысле определения 2.*

Отметим, что в определении 2 релаксационное периодическое решение фактически состоит из участков предельного цикла динамической системы  $\mathcal{D}^*$ , которые "соединяются" вдоль прямой  $y = y^*$  с помощью функции  $\psi$ . Ввиду этого релаксационное периодическое решение наследует основные свойства непрерывных периодических автоколебаний [4]. Так, в частности выполняется условие независимости амплитуды периодического автоколебательного решения от начального состояния системы.

**Пример.** *Рассматривается динамическая система:*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(f(y) - kx^a), \quad f'(y) \frac{dy}{dt} = \beta(y - x), \quad (4.4)$$

где  $\alpha, \beta = \text{const} > 0$ ,  $a \geq 1$ ,  $f(y)$  – произвольная гладкая унимодальная, выпуклая вверх функция (например:  $f(y) = R - r(y - y_0)^2$ , где  $R, r > 0$ ),  $k > 0$ : уравнение  $f(y) - ky^2 = 0$  имеет два корня. При данных предположениях, система (4.4) имеет релаксационное периодическое (автоколебательное) решение.

На рис.1 приведены результаты численных расчетов разрывных автоколебаний для системы (4.4) при некоторых фиксированных значениях ее параметров.

Рис. 1. Предельный цикл и релаксационные автоколебания в системе (4.4) при  $R = 2$ ,  $r = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = 2$ ,  $k = 0.25$

## 5. Хаотические автоколебания

В окрестности особой точки  $y = y^*$  системы (2.1) ее фазовые траектории "сшиваются" с помощью функции  $\psi$ . Выбор данной функции из класса  $\mathbf{C}_+^1(\bar{I}(h_1; h_2), L)$  при

$0 < L < 1$  позволил построить динамическую систему  $\mathcal{D}^*$  с предельным циклом  $\Gamma(\mathcal{D}^*)$ . При этом аттрактор разрывных автоколебаний системы (2.1) состоит из части предельного цикла  $\Gamma(\mathcal{D}^*)$  и отрезка, отсекающего им от прямой  $y = y^*$ . Далее будет показано, что возможно осуществить выбор функции  $\psi$  так, что "соединенные" с помощью ее фазовые траектории системы (2.1) порождают хаотическую динамику. Действительно, положим в системе с импульсным воздействием (4.1) – (4.2)

$$g(x) = \tilde{\Pi}(x) - x - h\sigma(x - X), \quad (5.1)$$

где  $h, X = \text{const} > 0$ ,  $\sigma(z) = 1$ , если  $z \geq 0$  и  $\sigma(z) = 0$  при  $z < 0$ .

Не нарушая общности, при необходимости выполняя линейную замену координат, далее будем полагать, что  $y^* = 0$ . Рассмотрим вначале отдельно случай, когда отображение (5.1) может быть точно вычислено. Предположим, что система (4.1) допускает следующее семейство решений:

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y(t) = C_2 \exp(\lambda t) \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $C_1, C_2, \varphi_0$  – произвольные постоянные, а константы  $\lambda$  и  $\omega$  – определяются системой. Данное допущение по сути означает, что система (4.1) предполагается линейной. При этом соотношение (4.2), в данном случае, может быть записано в следующей рекуррентной форме

$$x_n = \Psi x_{n-1} - h\sigma(\Psi x_{n-1} - X) \quad (n \geq 1), \quad (5.2)$$

где  $\Psi = \exp(\lambda 2\pi/\omega)$ .

Отметим, что (5.1) можно трактовать как точечное отображение прямой в себя. Частным случаем, данного отображения при  $\Psi = 2, h = X = 1$  является отображение "зуб пилы" возможность появления хаотической динамики в котором, рассмотрена, например в [10].

В зависимости от значений коэффициентов отображения (5.1) возможны два типа его графика, приведенные на рис.2.

Если справедливо неравенство  $h < X(\Psi - 1)$ , т.е. точка  $O_1$  лежит выше точки  $O_2$  (рис.2 – а), то при любом начальном условии последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  является неограниченной. Амплитуда колебаний фазовой координаты  $x(t)$  с некоторого момента времени оказывается больше, чем  $h/(\Psi - 1)$ , после чего она монотонно и неограниченно возрастает. Если выполняется обратное неравенство  $h \geq X(\Psi - 1)$ , то точка  $O_1$  расположена ниже чем  $O_2$  (рис.2 – б). В этом случае характер поведения последовательности (5.2) зависит от начальных условий. Если  $x_0 > h/(\Psi - 1)$ , то последовательность (5.2) является неограниченной, монотонно возрастающей. При  $x_0 < h/(\Psi - 1)$  данная последовательность является ограниченной и проявляет хаотическую динамику. При этом исходная система с импульсным воздействием (4.1) – (4.2) имеет хаотические автоколебания, определяемые странным аттрактором, состоящим из участков фазовых траекторий системы (4.1). При этом сама динамическая система (4.1) является линейной.

Для произвольной нелинейной системы (4.1) количественно оценить характер динамики последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , порождаемой отображением (5.1) невозможно. Однако качественно в этом случае график разрывного отображения (5.1) может иметь один из типов, приведенных на рис.3.

Для графика, представленного на рис.3 – а, в исходной системе с импульсным воздействием (4.1) – (4.2) при любых начальных условиях устанавливаются периодические

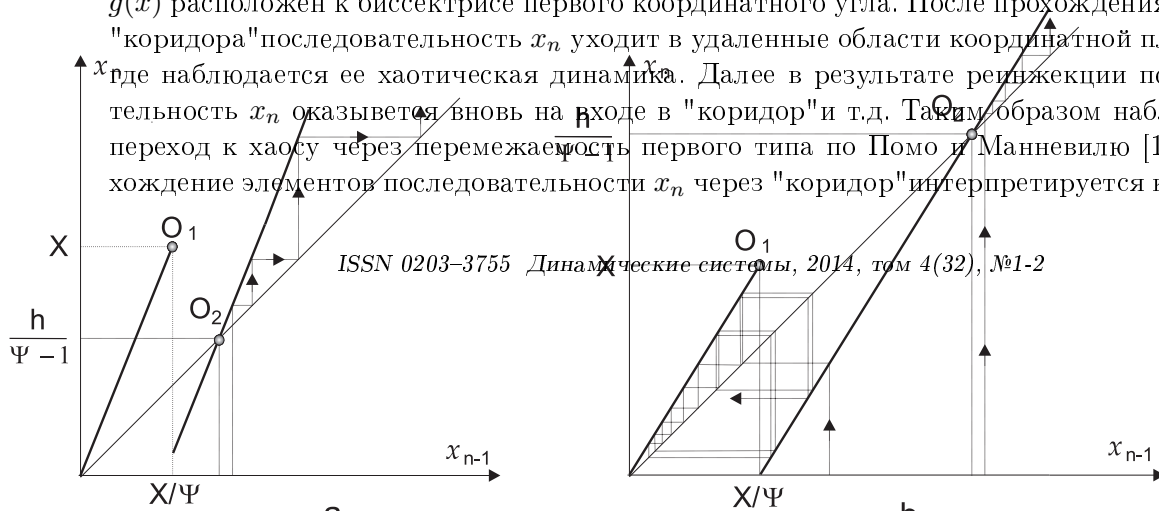


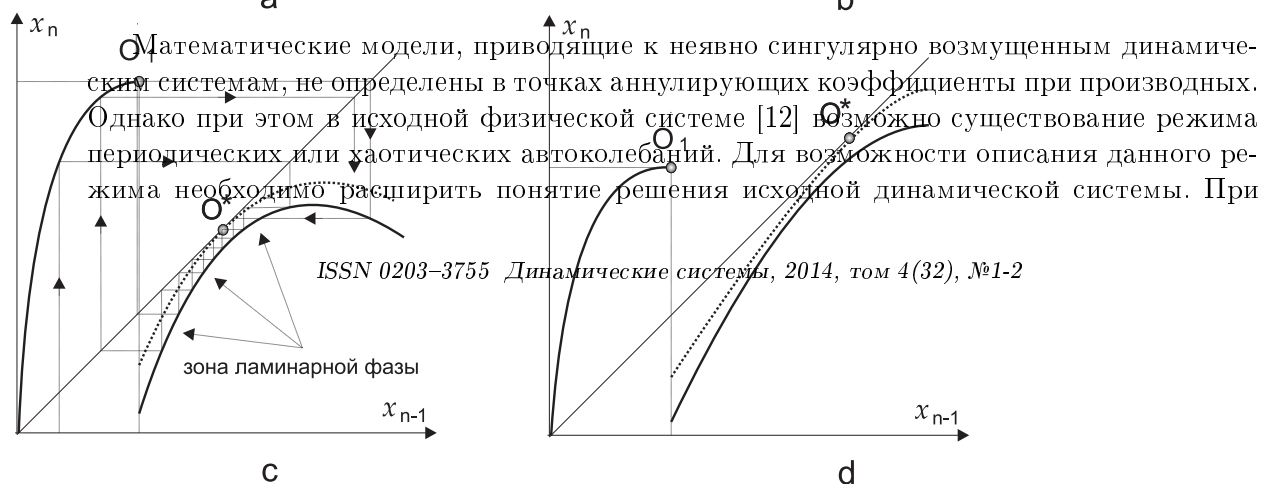
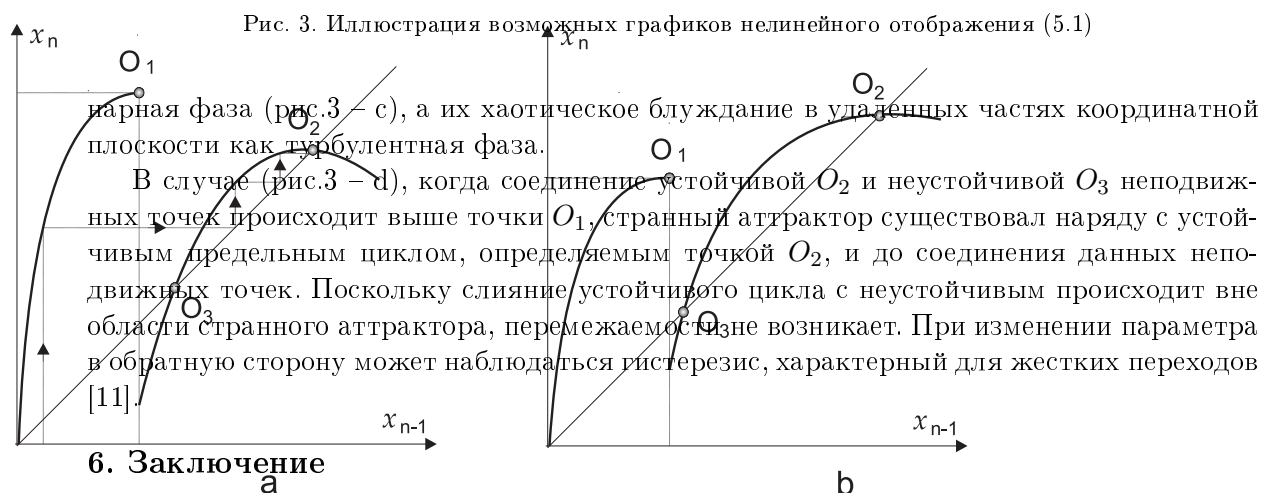
Рис. 2. Лесенки Ламерея последовательности (5.2) для различных начальных условий

автоколебания, соответствующие устойчивой неподвижной точке  $O_2$ . В случае рис.3 – б система является бистабильной, в зависимости от начальных условий возбуждаются либо периодические автоколебания, либо хаотические, т.е. в фазовом пространстве системы (4.1) – (4.2) имеются два аттрактора – предельный цикл и странный аттрактор. Для случаев, соответствующим рис.3 – с,d, при любых начальных условиях возможны только хаотические автоколебания.

Неподвижные точки  $O_2$  и  $O_3$  отображения  $g(x)$  определяют в импульсной системе (4.1) – (4.2) соответственно устойчивый и неустойчивый предельные циклы. При этом переход от графиков рис.3 – а, б к графикам рис.3 – с, d происходит в результате соединения неподвижных точек  $O_2$  и  $O_3$ , что отвечает касательной бифуркации [9, 10] слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

В точке  $O^*$  соединения неподвижных точек  $O_2$  и  $O_3$  график отображения  $g(x)$  касается биссектрисы первого координатного угла. При этом в зависимости от взаимного расположения точек  $O_1$  и  $O^*$  возможны различные бифуркации в результате слияния точек  $O_2$  и  $O_3$ . Если точка  $O_1$  расположена не выше чем точка  $O^*$ , то до соединения точек  $O_2$  и  $O_3$  странный аттрактор отсутствовал, а существовала лишь непритягивающая гомоклиническая структура. Слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов происходит как раз в области этой структуры, которая после слияния становится притягивающей и образует хаотический аттрактор. В терминах отображения (5.1) данная бифуркация состоит в следующем. На месте исчезнувшей пары неподвижных точек  $O_2$  и  $O_3$  образуется узкий "коридор" (рис.3 – с), прохождение которого элементами последовательности  $x_n$  требует тем большего числа итераций, чем ближе график отображения  $g(x)$  расположен к биссектрисе первого координатного угла. После прохождения данного "коридора" последовательность  $x_n$  уходит в удаленные области координатной плоскости, где наблюдается ее хаотическая динамика. Далее в результате реинжекции последовательность  $x_n$  оказывается вновь на входе в "коридор" и т.д. Таким образом наблюдается переход к хаосу через перемежаемость первого типа по Полю и Манневиллю [10]. Прохождение элементов последовательности  $x_n$  через "коридор" интерпретируется как лами-





этом мы фактически переходим к новой математической модели. В этом отношении имеется аналогия с понятием обобщенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений или их систем, когда изначально от дифференциальной формы записи математической модели переходят фактически к вариационной постановке, в которой фигурируют лишь интегральные функционалы.

В данной работе рассмотрен определенный класс (2.1) неявно сингулярно возмущенных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для которого расширено понятие их решения, приводящее к системам с импульсным воздействием вдоль фазовых траекторий исходной системы. В частности показано, возможность существования разрывных (релаксационных) периодических и хаотических автоколебаний как расширенных решений рассмотренных динамических систем.

### Список цитируемых источников

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 918 с.
2. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 477 с.
3. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1966. — 248 с.
4. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010. — 552 с.
5. *Дородницын А. А.* Прикладная математика и механика. — 1947. — Т.11, №3. — С. 313 – 328.
6. *Гоцуленко В. В.* Релаксационные периодические автоколебания, определяемые неявно сингулярно возмущенными системами обыкновенных дифференциальных уравнений// Труды четвертой Междунар. науч. конф. молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского. — 2012. — 36–37.
7. *Арнольд В. И., Ильясенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 149 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
9. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1966. — 472 с.
10. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001 — 296 с.
11. *Мартынов Б. А., Бочков В. В.* Введение в стохастическую динамику. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. — 91 с.
12. *Gotsulenko V. V., Gotsulenko V. N.* Distinctive feature of self-oscillations (surging) of impeller pumps// Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2012. — Vol.85, no.1. — P. 125–130.

Получена 30.09.2011    Переработана 02.02.2014