Динамические системы, 2014, том 4(32), №1-2, 3–8

УДК 517.98

Теорема Фуглида-Путнама для локально измеримых операторов

М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. И. Чилин*

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: fromen@bk.ru, mamuratov@gmail.com*
*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Ташкент 100174, УЗБЕКИСТАН. *E-mail: vladimirchil@gmail.com*

Аннотация. Доказан вариант теоремы Фуглида-Путнама для локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, не имеющей прямого слагаемого типа II. В случае произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ вариант теоремы Фуглида установлен для любой пары нормальных локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, локально измеримый оператор, теорема Фуглида-Путнама.

Введение

В 1950 году в работе [7] Б. Фуглидом было доказано, что всякий ограниченный линейный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и коммутирующий с нормальным оператором A, обязательно коммутирует и с оператором A^*. Эта теорема была усилена в 1951 году К.Р. Путнамом [9], показавшем, что для любой пары нормальных операторов A_1, A_2, действующих в $\mathcal{H}$, из равенства $BA_1 = A_2B$ следует равенство $BA_1^* = A_2^*B$. В последующие годы проводились различные исследования, связанные с попытками расширения класса инволютивных алгебр, для которых сохраняется утверждение теоремы Фуглида-Путнама. Так, например, в работе С.К. Берберяна ([5, Theorem 5]) было доказано, что теорема Фуглида-Путнама верна в классе всех алгебр $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к конечным AW^*-алгебрам $\mathcal{M}$ типа I, в частности, эта теорема верна и для алгебр $S(\mathcal{M})$, в случае когда $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана типа I.

В настоящей работе устанавливается справедливость теоремы Фуглида-Путнама для локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, не имеющей прямого слагаемого типа II. В случае произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, вариант теоремы Фуглида установлен для любой пары нормальных локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Используется терминология и определения теории алгебр фон Неймана ([8, 11]) и теории локально измеримых операторов ([1, 12]).

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ и $\mathbf{1}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{M}$ — подалгебра фон Неймана в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — центр $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ решетку всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ — множество всех конечных ортопроекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Плотно определенный в $\mathcal{H}$ замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, называется *измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такая, что $P_n \uparrow I$, $P_n(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $P_n^{\perp} = I - P_n \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $\mathfrak{D}(T)$ — область определения оператора T и $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является унитальной $*$-алгеброй над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел относительно операций сильной суммы $\overline{T+S}$, сильного произведения $\overline{TS}$ и операции перехода к сопряженному оператору T^*, при этом $\mathcal{M}$ есть $*$-подалгебра в $S(\mathcal{M})$ [10].

Плотно определенный в $\mathcal{H}$ замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, называется *локально измеримым* относительно алгебры $\mathcal{M}$, если существует последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ такая, что $Z_n \uparrow I$, $Z_n(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$, $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов также является унитальной $*$-алгеброй над полем комплексных чисел относительно тех же алгебраических операций и сопряжения, что и в $S(\mathcal{M})$, при этом, $S(\mathcal{M})$ есть $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Для любого подмножества $\mathcal{E} \subset LS(\mathcal{M})$ множество всех самосопряженных (соответственно, положительных) операторов из $\mathcal{E}$ обозначается через $\mathcal{E}_h$ (соответственно, $\mathcal{E}_+$). Частичный порядок в $LS_h(\mathcal{M})$ определяется его конусом $LS_+(\mathcal{M})$ и обозначается $\leq$.

Пусть T — замкнутый линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$ и пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ и U — частичная изометрия в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такая, что $U^*U = r(T)$ есть правый носитель оператора T. Известно, что $T \in LS(\mathcal{M})$ (соответственно, $T \in S(\mathcal{M})$) тогда и только тогда, когда $|T| \in LS(\mathcal{M})$ (соответственно, $|T| \in S(\mathcal{M})$) и $U \in \mathcal{M}$ ([1, §§ 2.2, 2.3]). Если $T \in LS_h(\mathcal{M})$, то спектральное семейство проекторов $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ оператора T принадлежит $\mathcal{M}$ ([1, § 2.1]).

Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M}$ — $*$-изоморфна алгебре $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех существенно ограниченных измеримых комплекснозначных функций, определенных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной локально конечной мерой μ.

Рассмотрим на $*$-алгебре $S(\mathcal{M}) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на (Ω, Σ, μ) (функции, равные почти всюду, отождествляются), топологию $t(L^{\infty}(\Omega))$ локальной сходимости по мере, т.е. отделимую векторною топологию, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$W(B, \varepsilon, \delta) := \{f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : \text{ существует множество } E \in \Sigma \text{ такое, что}$$

$$E \subseteq B, \mu(B \setminus E) \leq \delta, f\chi_E \in L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu), \|f\chi_E\|_{L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu)} \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, $\chi_E(\omega) = 1$, $\omega \in E$ и $\chi_E(\omega) = 0$, если $\omega \notin E$.

Заметим, что топология $t(L^{\infty}(\Omega))$ не изменится, если меру μ заменить на эквивалентную ей меру [12].

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана и пусть φ — $*$-изоморфизм из $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ на $*$-алгебру $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Обозначим через $L_+(\Omega, \Sigma, m)$ множество всех измеримых действительнозначных функций, заданных на (Ω, Σ, μ) и принимающих значения в расширенной полупрямой $[0, \infty]$ (функции, равные почти всюду, отождествляются). Пусть $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+(\Omega, \Sigma, \mu)$ — размерностная функция на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ [10].

Для произвольных чисел $\varepsilon, \delta > 0$ и множества $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$ положим

$$V(B,\varepsilon,\delta) := \{T \in LS(\mathcal{M}) : \text{ существуют } P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) \text{ такие, что}$$
$$TP \in \mathcal{M}, \|TP\|_{\mathcal{M}} \leq \varepsilon, \varphi(Z^{\perp}) \in W(B,\varepsilon,\delta), \mathcal{D}(ZP^{\perp}) \leq \varepsilon\varphi(Z)\}.$$

В работе [12] было показано, что система множеств

$$\{T + V(B,\varepsilon,\delta) : T \in LS(\mathcal{M}); \varepsilon, \delta > 0; B \in \Sigma; \mu(B) < \infty\} \tag{1}$$

определяет отделимую векторную топологию $t(\mathcal{M})$ на $LS(\mathcal{M})$, относительно которой множества (1) образуют базис окрестностей оператора $T \in LS(\mathcal{M})$. Топология $t(\mathcal{M})$ на $LS(\mathcal{M})$ называется *топологией сходимости локально по мере.* Алгебра $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является полной топологической $*$-алгеброй. При этом, топология $t(\mathcal{M})$ не зависит от выбора размерностной функции $\mathcal{D}$ и от выбора $*$-изоморфизма φ ([1, §3.5], [12]). Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ ([1, §2.3]) и топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с равномерной топологией, порожденной C^*-нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$

В дальнейшем нам понадобится следующий критерий сходимости сетей в топологии сходимости локально по мере.

Предложение 1. [1, §3.5] (i). Сеть $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ сходится к нулю в топологии $t(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда существует такая сеть $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, что $Z_\alpha P_\alpha \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ для любых $\alpha \in A$ и $\varphi(Z_\alpha^{\perp}) \longrightarrow 0$, $\mathcal{D}(Z_\alpha P_\alpha) \longrightarrow 0$ в топологии $t(L^\infty(\Omega))$, где $t(L^\infty(\Omega))$ — топология сходимости локально по мере на $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ и φ — $*$-изоморфизм из $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ на $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$.

(ii). Сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS(\mathcal{M})$ сходится к нулю в топологии $t(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $E_\lambda^{\perp}(|T_\alpha|) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$ для любого $\lambda > 0$, где $E_\lambda^{\perp}(|T_\alpha|)$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T_\alpha|$.

С помощью предложения 1 в [4, Proposition 2.3] установлены следующие свойства топологии $t(\mathcal{M})$.

Предложение 2. (i). Если сеть $\{T_\alpha\}$ лежит в $LS(\mathcal{M})$, $0 \neq Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, то $ZT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $ZT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(Z\mathcal{M})$.

(ii). Если $\{T_\alpha\} \subset LS(\mathcal{M})$, $0 \neq Z_i \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, $Z_iZ_j = 0, i \neq j, i,j \in I$, $\sup\limits_{i\in I} Z_i = \mathbf{1}$, $Z_iT_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(Z_i\mathcal{M})$ для всех $i \in I$, то $T_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$.

Из предложения 2 непосредственно получается следующий результат.

Следствие 1. *Если $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ и $Z_\alpha \downarrow 0$, то $Z_\alpha \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$.*

С помощью предложения 2 (ii) устанавливается следующие полезное свойство топологии $t(\mathcal{M})$.

Предложение 3. Если $T \in LS_+(\mathcal{M})$, то $E_{\lambda_n}^{\perp}(T) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$ при $\lambda_n \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно предложению 2.3.4 ([1]) существует возрастающая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathcal{M}$ такая, что $\sup Z_n = \mathbf{1}$ и $Z_nE_{\lambda_n}^{\perp}(T) \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$. Зафиксируем номер k и рассмотрим последовательность проекторов $E_n(k) = Z_kE_T^{\perp}(\lambda_n)$. Поскольку $\mathcal{D}(E_n(k)) \downarrow 0$ при $\lambda_n \to \infty$, то $E_n(k) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$. Поэтому $(Z_k - Z_{k-1})E_{\lambda_n}^{\perp}(T) \longrightarrow 0$ в топологии $t(\mathcal{M})$ при $\lambda_n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из предложения 2 (ii) следует, что $E_{\lambda_n}^{\perp}(T) \longrightarrow 0$ при $\lambda_n \longrightarrow \infty$. $\square$

2. PT-алгебры

Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра над полем комплексных чисел. Так же, как и в работе С.К. Берберяна ([5]), будем говорить, что теорема Фуглида-Путнама выполняется в алгебре $\mathcal{A}$ или, сокращенно, алгебра $\mathcal{A}$ является PT-алгеброй, если для любых элементов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ таких, что $A_iA_i^* = A_i^*A_i$, $i = 1, 2$, и для любого элемента $B \in \mathcal{A}$ из равенства $BA_1 = A_2B$ следует, что $BA_1^* = A_2^*B$.

В работе К.Р. Путнама [9] было доказано, что $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (и поэтому любая алгебра фон Неймана) является PT-алгеброй. Как уже отмечалось выше, если конечная алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип I, то алгебра $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$ является PT-алгеброй ([5, Theorem 5]). Следующая теорема устанавливает аналогичное свойство алгебры $LS(\mathcal{M})$ для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I или III.

Теорема 1. *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип I или тип III, то алгебра $LS(\mathcal{M})$ является PT-алгеброй.*

Доказательство. Согласно предложению 3 и теореме 3 из [2], в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип I или тип III, для каждого оператора $T \in LS(\mathcal{M})$ существует такая последовательность взаимно ортогональных центральных проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, что $\sup\limits_{n\geq 1} P_n = \mathbf{1}$ и $P_nT = TP_n \in \mathcal{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть T, S — нормальные операторы из $LS(\mathcal{M})$, $B \in LS(\mathcal{M})$, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, $P_nP_m = 0, n \neq m$, $\sup\limits_{n\geq 1} P_n = \mathbf{1}$ и $P_nB = BP_n \in \mathcal{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Допустим, что $BT = SB$. Тогда

$$(P_nB)T = (BT)P_n = (SB)P_n = S(P_nB).$$

Из теоремы Путнама следует:

$$P_n(BT^*) = (P_nB)T^* = S^*(P_nB) = P_n(S^*B)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\sup\limits_{n\geq 1} P_n = \mathbf{1}$, то

$$BT^* = S^*B.$$

□

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, не имеющая прямого слагаемого типа II. Тогда алгебра $LS(\mathcal{M})$ является PT-алгеброй.*

Приведем полезный пример PT-алгебры. Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — центрозначный след, $L^p(\mathcal{M}, \Phi)$ — некоммутативные L^p-пространства, ассоциированные с $\mathcal{M}$ и Φ, $p \geq 1$ [6], и

$$L^{\omega}(\mathcal{M}, \Phi) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(\mathcal{M}, \Phi)$$

соответствующая некоммутативная алгебра Аренса.

Теорема 2. *Алгебра $L^{\omega}(\mathcal{M}, \Phi)$ является PT-алгеброй.*

Доказательство. Так как $L^\omega(\mathcal{M},\Phi) \subseteq L^1(\mathcal{M},\Phi)$, то интеграл $\int T d\Phi,\quad T \in L^\omega(\mathcal{M},\Phi)$ является $S(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$-значным следом на $L^\omega(\mathcal{M},\Phi)$ [3]. Из [5, теорема 4] следует, что $L^\omega(\mathcal{M},\Phi)$ — PT-алгебра. $\square$

Заметим, что если τ — точный нормальный полуконечный числовой след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, то из [5, теорема 4] следует, что алгебра Аренса

$$L^\omega(\mathcal{M},\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(\mathcal{M},\tau)$$

также является PT-алгеброй.

Следующая теорема является аналогом теоремы Фуглида для произвольной пары локально измеримых операторов.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана и пусть T и S — нормальные операторы из $LS(\mathcal{M})$. Если $TS = ST$, то $TS^* = S^*T$.*

Доказательство. Пусть $T \in LS(\mathcal{M})$, $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T. Для любого натурального числа n определим операторы $P_n = E_{|T|}(n)$ и $A_n = P_nTP_n$. Очевидно, что $TP_n = U|T|P_n \in \mathcal{M}$ и поэтому $A_n \in \mathcal{M}$.

Так как T — нормальный оператор, то

$$|T|^2T = T^*TT = TT^*T = T|T|^2,$$

т.е. оператор T принадлежит коммутанту $\{|T|^2\}'$. Отсюда вытекает, что $|T|T = T|T|$ и $P_nT = TP_n$, $A_n = P_nT = TP_n$. Из равенства $ST = TS$ и нормальности оператора S следует, что $ET = TE$ для всех спектральных проекторов E оператора S. Из теоремы Фуглида следует, что $ET^* = T^*E$ и

$$|T|^2E = T^*TE = T^*ET = E|T|^2.$$

Тогда, $|T|E = E|T|$, откуда следует, что $P_nE = EP_n$ для всех спектральных проекторов E оператора S и для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как S — нормальный оператор из $LS(\mathcal{M})$, то $P_nS = SP_n$ и

$$A_nS = P_nTS = P_nST = SP_nT = SA_n.$$

Из теоремы Фуглида следует, что $S^*A_n = A_nS^*$. Согласно предложению 3 имеем, что $A_n \longrightarrow T$ в топологии $t(\mathcal{M})$, что влечет равенство $S^*T = TS^*$. $\square$

Выводы

В работе доказан вариант теоремы Фуглида-Путнама в алгебре $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I или III. Для алгебр $\mathcal{M}$ типа II получен вариант теоремы Фуглида для нормальных операторов из $LS(\mathcal{M})$.

Список цитируемых источников

1. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Труды Ин-та математики НАН Украины. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2007. — Т. 69. — 390 с.

2. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Центральные расширения $*$-алгебр измеримых операторов //Докл. НАН Украины. — 2009. — №7. — С. 24–28.
3. *Чилин В. И., Закиров Б. С.* Некоммутативное интегрирование для следов со значениями в пространствах Канторовича–Пинскера // Изв. вузов. Матем. — 2010. — №10. — С. 18–30.
4. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Continuity of derivations of algebras of locally measurable operators // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2013. — Vol. 75. — P. 527–557.
5. *Berberian S. K.* Note on a theorem of Fuglede and Putman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 10. — P. 175–182.
6. *Chilin V. I., Zakirov B. S.* Non-commutative L^p-spaces associated wich a Maharam trace // J. Operator Theory. — 2012. — Vol. 68, No. 1. — P. 67–83.
7. *Fuglede B.* A commutativity theorem for normal operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1950. — Vol. 36. — P. 35–40.
8. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the Theory of Operator Algebras II. — Orlando: Academic Press, 1986.
9. *Putnam C. R.* On normal operators in Hilbert space // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 357–362.
10. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. — 1953. — Vol. 57. — P. 401–457.
11. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I, II. — New York: Springer-Verlag, 1979.
12. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1973. — Vol. 74. — P. 257–268.

Получена 29.05.2014