

УДК 534.1

Нестационарные колебания осциллятора при экспоненциальном изменении его массы

В. П. Ольшанский*, С. В. Ольшанский**

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков 61002.

**Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
Харьков 61000. E-mail: stasolsh77@gmail.com

Аннотация. В функциях Куммера получено решение уравнения свободных колебаний осциллятора, масса которого меняется по показательному закону. Учтено влияние реактивной силы с помощью коэффициента реактивности и действие силы линейного сопротивления. Показано, что в зависимости от величины реактивной силы колебания могут быть как с убывающими, так и с возрастающими амплитудами

Ключевые слова: осциллятор переменной массы, нестационарные колебания, функции Куммера.

1. Введение

Многообразие современных машин даёт множество примеров, когда масса их узлов изменяется в процессе работы. Сюда относятся землеройные машины в горнорудной и угольной промышленности, вибрационные и виброударные машины типа конвейеров, сепараторов, классификаторов, вращающиеся грохоты, оборудование для скрининга, сельскохозяйственные машины, центрифуги, намоточные машины и пр.

Одним из первых, кто изучал колебательное движение тела переменной массы был И. В. Мещерский [4]. Он в аналитическом виде получил решение уравнения малых свободных колебаний математического маятника, допуская, что масса маятника, является линейной функцией времени. Движение маятника описано с помощью функций Бесселя. Рассмотрены случаи асимптотического поведения движения во времени. Аналогичные задачи колебаний маятника с постоянной массой, но линейно-переменной длины, решены в [7]. Свободные колебания осциллятора линейно переменной массы также рассматривали в [9], [5]. Решения уравнений движения получены в функциях Бесселя.

При моделировании изменения массы задают различные законы. Одним из распространённых является показательный закон. Его в своих работах, при исследовании динамики тел переменной массы, использовали К.Э. Циолковский [8], В.П. Марченко [3] и др. Показательный закон также задавали в [6], при моделировании нестационарных колебаний осциллятора без учёта вязкого сопротивления среды. Свободные колебания осциллятора, у которого жёсткость пружины менялась по экспоненциальному закону, кратко рассмотрены в [2]. Показано, что решение уравнения движения выражается в цилиндрических функциях.

Целью данной работы является изучение особенностей колебательного движения осциллятора, обусловленных экспоненциальным изменением массы и действием вязкого сопротивления. Ставится задача обобщения результатов, полученных в [6].

2. Осциллятор возрастающей массы

Рассмотрим задачу возрастания массы осциллятора по закону

$$M = m_0 \exp(\lambda t),$$

где m_0 – начальная масса осциллятора; λ – коэффициент, характеризующий скорость изменения M , $\lambda > 0$. Тогда свободные колебания будут описываться уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\epsilon\lambda + \frac{\mu}{m_0} e^{-\lambda t} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m_0} e^{-\lambda t} x = 0, \quad (1)$$

в котором μ – коэффициент вязкого трения; c – коэффициент жёсткости пружины; x – перемещение осциллятора относительно положения статического равновесия; t – время; $0 \leq \epsilon \leq 1$ – коэффициент-поправка на то, что при всестороннем увеличении массы тела только часть присоединяющейся массы идёт на создание реактивной силы. Дополняем уравнение начальными условиями:

$$x(0) = 0; \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \dot{x}_0, \quad (2)$$

считая, что колебания вызваны начальной скоростью \dot{x}_0 , переданной осциллятору.

С помощью замены переменных

$$\xi = \exp(-\lambda t)$$

представляем задачу (1)-(2) в виде

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} - \left(\frac{\epsilon - 1}{\xi} + \frac{\mu}{m_0\lambda} \right) \frac{dx}{d\xi} + \frac{c}{\lambda^2 m_0} \frac{1}{\xi} x = 0. \quad (3)$$

$$x \Big|_{\xi=1} = 0, \quad \left. \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=1} = -\frac{\dot{x}_0}{\lambda}. \quad (4)$$

Представим перемещение осциллятора x произведением

$$x = \xi^\epsilon y. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получаем

$$\xi \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(\epsilon + 1 - \frac{\mu}{m_0\lambda} \xi \right) \frac{dy}{d\xi} + \left(\frac{c}{\lambda^2 m_0} - \frac{\mu\epsilon}{\lambda m_0} \right) y = 0. \quad (6)$$

Введением новой переменной $\eta = \frac{\mu}{m_0\lambda} \xi$ последнее уравнение приводится к уравнению Куммера ([1], с.321)

$$\eta \frac{d^2y}{d\eta^2} + (\epsilon + 1 - \eta) \frac{dy}{d\eta} - \left(\epsilon - \frac{c}{\lambda\mu} \right) y = 0. \quad (7)$$

Это – вырожденное гипергеометрическое уравнение. При $a = \epsilon - \frac{c}{\lambda\mu} \neq -n$, где n – натуральное число, общее решение уравнения (7) представляется в виде (см. [1], с.322)

$$y = c_1 M(a, \epsilon + 1, \eta) + c_2 U(a, \epsilon + 1, \eta), \quad (8)$$

где M, U – вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, соответственно; c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Если $a = -n$, то общее решение (7) выражается через многочлены Лагерра. Этот частный случай здесь опускаем из рассмотрения. В силу (5) и (8):

$$x(t) = \xi^\epsilon (c_1 M(a, \epsilon + 1, \eta) + c_2 U(a, \epsilon + 1, \eta)). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), получаем систему:

$$\begin{aligned} c_1 M(a, \epsilon + 1, \eta_0) + c_2 U(a, \epsilon + 1, \eta_0) &= 0, \\ c_1 \frac{dM(a, \epsilon + 1, \eta)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} + c_2 \frac{dU(a, \epsilon + 1, \eta)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} &= -\frac{\dot{x}_0}{\lambda}, \end{aligned} \quad (10)$$

в которой $\eta_0 = \frac{\mu}{\lambda m_0}$.

Определитель системы (10) выражается через гамма-функцию и элементарные функции (см. [1], с.322):

$$\Delta = -\frac{\Gamma(\epsilon + 1)e^{\eta_0}}{\Gamma(a)\eta_0^\epsilon}.$$

Другие определители выражаются в виде:

$$\Delta_1 = \frac{\dot{x}_0 U(a, \epsilon + 1, \eta_0)}{\lambda} = \frac{\dot{x}_0}{\lambda} \left(\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(a)\eta_0^\epsilon} M(a - \epsilon, 1 - \epsilon, \eta_0) + \frac{\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(a - \epsilon)} M(a, \epsilon + 1, \eta_0) \right);$$

$$\Delta_2 = -\frac{\dot{x}_0 M(a, \epsilon + 1, \eta_0)}{\lambda} = -\frac{\dot{x}_0}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(\epsilon + 1)\eta_0^n}{\Gamma(a)\Gamma(\epsilon + 1 + n)n!}.$$

Тогда решение (9) удовлетворяет начальным условиям (4) при

$$c_1 = -\frac{\dot{x}_0 \eta_0^\epsilon \Gamma(a) U(a, \epsilon + 1, \eta_0)}{\lambda e^{\eta_0} \Gamma(\epsilon + 1)}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 \eta_0^\epsilon \Gamma(a) M(a, \epsilon + 1, \eta_0)}{\lambda e^{\eta_0} \Gamma(\epsilon + 1)}. \quad (11)$$

3. Осциллятор убывающей массы

Рассмотрим задачу убывания массы по закону

$$M = m_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda > 0.$$

В этом случае свободные колебания осциллятора будут описываться уравнением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{\mu}{m_0} e^{\lambda t} - \lambda \epsilon \right) \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m_0} e^{\lambda t} x = 0. \quad (12)$$

Это уравнение дополняем начальными условиями (2).

Для нахождения решения уравнения (12) вводим новую безразмерную переменную

$$\tau = \tau_0 \exp(\lambda t); \quad \tau_0 = \frac{\mu}{m_0 \lambda},$$

согласно которой

$$\frac{d}{dt} = \lambda\tau \frac{d}{d\tau}; \quad \frac{d^2}{dt^2} = \lambda^2\tau^2 \frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda^2\tau \frac{d}{d\tau}.$$

Преобразовав уравнение (12) и начальные условия (2) к новой переменной, получаем

$$\tau \frac{d^2x}{d\tau^2} + (\tau - \epsilon + 1) \frac{dx}{d\tau} + \frac{c}{\lambda\mu} x = 0; \quad (13)$$

$$x(\tau_0) = 0; \quad \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} = \frac{\dot{x}_0}{\lambda\tau_0}. \quad (14)$$

Функцию $x(\tau)$ представляем произведением

$$x = \tau^\epsilon \cdot \exp(-\tau) \cdot y. \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), приходим к вырожденному гипергеометрическому уравнению – уравнению Куммера, как и в предыдущем разделе:

$$\tau \frac{d^2y}{d\tau^2} + (1 + \epsilon - \tau) \frac{dy}{d\tau} - ay = 0. \quad (16)$$

При $a \neq -n$, где n натуральное число, общим решением (16) является

$$y = c_3 M(a, \epsilon + 1, \tau) + c_4 U(a, \epsilon + 1, \tau), \quad (17)$$

где c_3, c_4 – произвольные постоянные.

Учитывая (15) и (17), находим перемещения осциллятора

$$x(t) = \tau^\epsilon (c_1 M(a, \epsilon + 1, \tau) + c_2 U(a, \epsilon + 1, \tau)) \exp(-\tau), \quad (18)$$

с точностью до произвольных постоянных.

Если $a = -n$, то общее решение (16) выражается через многочлены Лагерра. Этот частный случай, как и ранее, опускаем из рассмотрения.

Подставляя (18) в (14), получаем систему:

$$\begin{aligned} c_1 M(a, 2, \tau_0) + c_2 U(a, 2, \tau_0) &= 0, \\ c_1 \left. \frac{dM(a, 2, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} + c_2 \left. \frac{dU(a, 2, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} &= \frac{\dot{x}_0 e^{\tau_0}}{\lambda\tau_0^{\epsilon+1}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Определитель системы (19) выражается через гамма-функцию и элементарные функции:

$$\Delta = -\frac{\Gamma(\epsilon + 1)e^{\tau_0}}{\Gamma(b)\tau_0^{\epsilon+1}}.$$

Другие определители выражаются в виде:

$$\Delta_1 = -\frac{\dot{x}_0 e^{\tau_0} U(a, \epsilon + 1, \tau_0)}{\lambda\tau_0^{\epsilon+1}}; \quad \Delta_2 = \frac{\dot{x}_0 e^{\tau_0} M(a, \epsilon + 1, \tau_0)}{\lambda\tau_0^{\epsilon+1}}.$$

Тогда решение (18) удовлетворяет начальным условиям (14), при

$$c_1 = \frac{\dot{x}_0 \Gamma(a) U(a, \epsilon + 1, \tau_0)}{\lambda \Gamma(\epsilon + 1)}, \quad c_2 = -\frac{\dot{x}_0 \Gamma(a) M(a, \epsilon + 1, \tau_0)}{\lambda \Gamma(\epsilon + 1)}. \quad (20)$$

4. Численные результаты и их анализ

Рассмотрим колебания осциллятора при следующих исходных данных: $m_0 = 100\text{кг}$; $\lambda = 0,05\text{с}^{-1}$; $c = 85\text{кг/с}^2$; $\mu = 6\text{кг/с}$; $\dot{x}_0 = 0,1\text{м/с}$ и разных значениях коэффициента реактивности ϵ . На рис. 1 представлено зависимости перемещений от времени, для осциллятора возрастающей массы, цифры 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\epsilon = 0,25$; $0,50$; $0,75$; $1\ 1/\text{с}$. Результаты получены путём численного интегрирования уравнения (1).

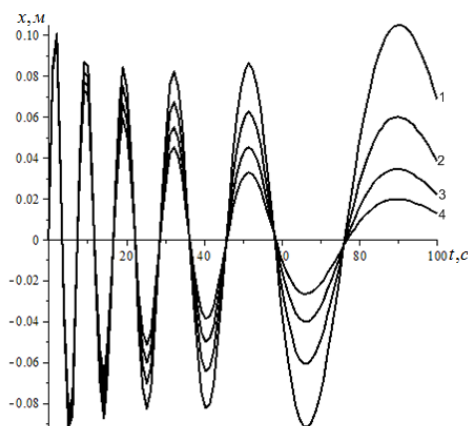


Рис. 1. Зависимости перемещений x от времени t для разных ϵ при возрастании массы

Из рис.1 видно, что при возрастании коэффициента реактивности ϵ усиливается затухание колебаний. Для малых значений коэффициента реактивности амплитуды колебаний начинают возрастать, система ведёт себя принципиально иначе.

Рассмотрим влияние коэффициента реактивности на колебания при убывании массы осциллятора. Для этого примем прежние исходные данные. На рис. 2 представлено зависимости перемещений от времени, цифры 1,2,3,4 соответствуют значениям $\epsilon = 0,25$; $0,50$; $0,75$; $1\ 1/\text{с}$.

Как видно из рис. 2, при убывании массы величина коэффициента реактивности меньше влияет на процесс движения, чем при возрастании массы.

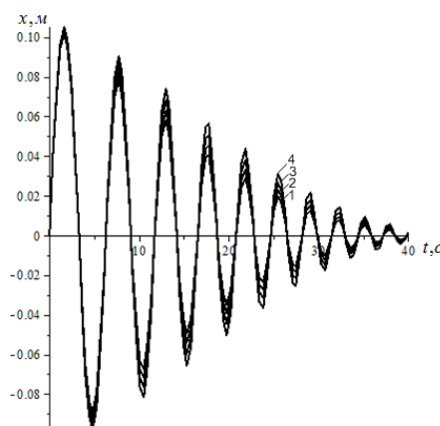


Рис. 2. Зависимости перемещений x от времени t для разных ϵ при возрастании массы

5. Выводы

С помощью функций Куммера описаны нестационарные свободные колебания осциллятора при экспоненциальном изменении массы и действии силы вязкого линейного сопротивления. Показано, что в зависимости от величины реактивной силы колебания могут быть как с убывающими, так и с возрастающими амплитудами.

Список цитируемых источников

1. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. — К.: Наукова думка, 1977. — 340 с.
3. *Марченко В. П.* Про рух точки змінної маси з тертям і опором // Доповіді АН УРСР. — 1964. — №11. — С. 1143–1447.
4. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. — М.: ГИТТЛ, 1952. — 276 с.
5. *Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.* Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении // Вісник НТУ "ХП": Математичне моделювання в техніці та технологіях. — 2013. — №37(1010). — С. 125–130.
6. *Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.* Вільні коливання осцилятора змінної маси // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. — 2013. — №2(70). — С. 57–59.
7. *Светлицкий В. А.* Задачи и примеры по теории колебаний. — М.: Изд-во МГТУ, 1994. — 308 с.
8. *Циолковский К. Э.* Собрание сочинений. — М.: АН СССР, — Т. 2. 1954. — 220 с.
9. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. — Taylor and Francis Ltd, 1998. — 300 p.

Получена 02.10.2013 Переработана 08.12.2014