Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 45–48

УДК 517.432

Самосопряженная дилатация операторного узла диссипативного оператора

Ю. Л. Кудряшов

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: m_katya_10_89@mail.ru*

Аннотация. В статье на основе понятия операторного узла для ограниченных операторов вводится понятие операторного узла для произвольных диссипативных операторов с непустым множеством регулярных точек. С помощью операторов такого узла строится спектральное представление самосопряженной дилатации для неограниченного диссипативного плотно заданного оператора. Полученные результаты могут быть использованы для построения дилатаций конкретных операторов, их функциональных моделей и обобщенных собственных функций.

Ключевые слова: дилатация, диссипативный неограниченный оператор, операторный узел.

1. Введение

В случае сжатий в [1] и [6] было введено понятие операторного узла следующим образом. Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 обозначим $L(H_1,\ H_2)$, если $H_1 =\ H_2$, то $L(H_1)$.

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_-$, $\mathcal{G}_+$ и операторов $T \in L(\mathcal{G})$, $\|T\| \le 1$, $\alpha \in L(\mathcal{G},\ \mathcal{G}_-)$, $\beta \in L(\mathcal{G}_+,\ \mathcal{G}_-)$, $\gamma \in L(\mathcal{G}_+,\ \mathcal{G})$ называется операторным узлом $\Delta = (T,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \mathcal{G},\ \mathcal{G}_+,\ \mathcal{G}_-)$, если выполняются следующие условия:

$$\begin{array}{ll} \alpha\,\alpha^* + \beta\,\beta^* = I_{\mathcal{G}_-}, & T\,T^* + \gamma\,\gamma^* = I_{\mathcal{G}}, \\ T\,\alpha^* + \gamma\,\beta^* = 0, & \alpha^*\,\alpha + T^*\,T = I_{\mathcal{G}}, \\ \beta^*\,\beta + \gamma^*\,\gamma = I_{\mathcal{G}_+}, & \beta^*\,\alpha + \gamma^*\,T = 0. \end{array}$$

Оператор T называется основным оператором узла Δ, α и γ называются каналовыми, а β — деформирующим оператором узла Δ.

С помощью узла Δ в [1] и [6] строится унитарная дилатация оператора сжатия. В данной работе вводится понятие операторного узла для диссипативного оператора, вообще говоря, неограниченного. Понятие узла дает больше возможностей для построения дилатаций конкретных операторов [3] за счет выбора операторов узла.

Заметим, что понятие операторного узла для построения симметрической дилатации диссипативного оператора было введено в [6].

2. Предварительные сведения

Пусть A — диссипативный, необязательно ограниченный оператор с плотной областью определения, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим вспомогательные операторы

$$B = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R^*_{-i}\,R_{-i},$$

$$\widetilde{B} = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R_{-i}\,R^*_{-i},\ \text{где}\ R_{-i} = (A + i\,I)^{-1},$$
$$T = I - 2\,i\,R_{-i}.$$

Определение 2. Совокупность гильбертовых пространств $\mathcal{G}$, E_-, E_+ и операторов $A:\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\varphi \in L(\mathcal{G},\ E_+)$, $\psi \in L(E_-,\ \mathcal{G})$, $\phi \in L(E_-,\ E_+)$ называется операторным узлом

$$\Theta = (A,\ \varphi,\ \phi,\ \psi,\ \mathcal{G},\ E_+,\ E_-),$$

если выполняются следующие условия:

$$B = \varphi^*\,\varphi, \tag{1}$$

$$\widetilde{B} = \psi\,\psi^*, \tag{2}$$

$$T\,\varphi^* = \psi\,\phi^*, \tag{3}$$

$$\phi^*\,\varphi = \psi^*\,T, \tag{4}$$

$$\varphi\,\varphi^* + \phi\,\phi^* = I_{E_+}, \tag{5}$$

$$\phi^*\,\phi + \psi^*\,\psi = I_{E_-}. \tag{6}$$

Оператор A называется основным оператором узла Θ, φ и ψ — каналовыми, а ϕ — деформирующим оператором узла Θ.

Всякий диссипативный оператор с $-i \in \rho(A)$ может быть включен в операторный узел Θ, если положить

$$\varphi = \sqrt{B},\ \psi = \sqrt{\widetilde{B}},\ \phi = T^*,\ E_- = E_+ = \mathcal{G}\ \left(\text{или}\ E_- = \overline{\psi\mathcal{G}},\ E_+ = \overline{\varphi\mathcal{G}}\right). \tag{7}$$

Возможны и другие способы включения оператора A в узел [1].

Определение 3. Оператор $\widetilde{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется дилатацией оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G} \subset \widetilde{H}$ и $P_H(\widetilde{A} - \lambda\,I)^{-1}\big|_H = (A - \lambda\,I)^{-1}$ при любых λ, принадлежащих некоторой области $\operatorname{Im}\lambda < -a,\ (a > 0)$ [1].

Определение 4. Оператор $\widetilde{A}$ называется дилатацией узла Θ, если $\widetilde{A}$ является дилатацией основного оператора узла при любых φ, ψ, и ϕ из узла Θ.

3. Построение самосопряженной дилатации

Рассмотрим линейное многообразие вектор — функций $h(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E и $t \in [a,\ b]$. Обозначим $L_2(a,\ b;\ E)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного линейного многообразия вектор — функций по норме

$$\|h\|^2_{L_2(a,\ b;\ E)} = \int_a^b \|h(t)\|^2_E\,dt < \infty.$$

Рассмотрим пространства $H_- = L_2((-\infty, 0); E_-)$, $H_+ = L_2((0, \infty); E_+)$, где E_- и E_+ — из узла Θ. Введем пространство $H = H_- \oplus \mathcal{G} \oplus H_+$ со скалярным произведением

$$\left(h,\ \widetilde{h}\right)_H = \left(h_-,\ \widetilde{h}_-\right)_{H_-} + \left(h_0,\ \widetilde{h}_0\right)_{\mathcal{G}} + \left(h_+,\ \widetilde{h}_+\right)_{H_+},$$

где $h = (h_-,\ h_0,\ h_+)$, $\widetilde{h} = \left(\widetilde{h}_-,\ \widetilde{h}_0,\ \widetilde{h}_+\right)$.

Построим в пространстве H оператор S следующим образом.

Вектор $h = (h_-,\ h_0,\ h_+) \in \mathrm{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_-,\ \dfrac{dh_-(t)}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ E_-)$, $\left\{h_+,\ \dfrac{dh_+(t)}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E_+)$;

2) $\widehat{h} = h_0 + \psi\, h_-(0) \in \mathrm{D}(A)$;

3) $h_+(0) = -\phi\, h_-(0) + i\,\varphi\,(A + i\,I)\,\widehat{h}$.

Оператор S определяется так:

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,\dfrac{dh_-(t)}{dt} \\ -i\,h_0 + (A + i\,I)\,\widehat{h} \\ i\,\dfrac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Опрератор S является самосопряженной дилатацией узла Θ.*

Доказательство. Выполняется равенство:

$$\|\varphi\,(A + i\,I)\,h_0\|^2_{E_+} = 2\,\mathrm{Im}\,(Ah_0,\ h_0)_{\mathcal{G}} \tag{8}$$

для любого $h_0 \in \mathrm{D}(A)$.

Покажем, что S — эрмитов оператор.

$$(Sh,\ h)_H - (h,\ Sh)_H =$$

$$= -i\,\|h_-(0)\|^2_{E_-} - i\,\|h_+(0)\|^2_{E_+} + 2\,i\,\mathrm{Im}\,(A\widehat{h},\ h_0)_{\mathcal{G}} + 2\,i\,\mathrm{Im}\,i\,(\psi\,h_-(0),\ h_0)_{\mathcal{G}} = 0.$$

Используются равенства (1) — (7), (8) и условие 3) на $\mathrm{D}(S)$. Легко видеть, что $\overline{\mathrm{D}(S)} = H$ и S — замкнутый оператор.

Докажем, что $S = S^*$. Для этого достаточно показать, что $\{i,\ -i\} \subset \rho(S)$ или $\overline{\Delta(S + i\,I)} = \overline{\Delta(S - i\,I)} = H$. Введем обозначение:

$$\Gamma_- h_- = i\,\frac{dh_-(t)}{dt},\ \Gamma_+ h_+ = i\,\frac{dh_+(t)}{dt},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_+|_M,\ M = \{h_T \in \mathrm{D}(\Gamma_+):\ h_+(0) = 0\}.$$

1) Докажем, что $\overline{\Delta(S + i\,I)} = H$. Допустим противное, то есть что существует $h^{'} \neq 0$, $h^{'} \in H$ и $h^{'} = (h^{'}_-,\ h^{'}_0,\ h^{'}_+) \perp \Delta(S + i\,I)$.

а) Положим $h_+(0) = h_0 = 0$ и $h_-(t) = 0$. Тогда, так как $-i \in \rho(\Gamma_0)$, то $h^{'}_+(t) = 0$.

б) Положим $h_-(t) = 0$. Тогда условие 3) на $\mathrm{D}(S)$ примет вид

$$h_+(0) = i\,\varphi\,(A + i\,I)\,h_0$$

и ясно, что h_0 может принимать любые значения из $\mathrm{D}(A)$, так как $-i \in \rho(A)$, то $h_0^{'} = 0$.

в) Пусть $h_-(0)$ — произвольно. Так как $-i \in (\Gamma_{-0})$, $\Gamma_{-0} = \Gamma_-|_{M'}$, где

$$M^{'} = \{h_- \in \mathrm{D}(\Gamma_-) : \ h_-(0) = 0\}$$

и $(\Gamma_{-0})^* = \Gamma_-$, то $-i \in \rho(\Gamma_-)$ и, следовательно, $\overline{\Delta(\Gamma_- + i\,I)} = H_-$. Тогда $h_-^{'}(t) = 0$.

2) Теперь докажем, что $\overline{\Delta(S - i\,I)} = H$. Допустим противное, как и в первом случае.

а) Положим $h_0 = h_-(0) = 0$ и $h_+(t) = 0$. Тогда, так как $i \in \rho(\Gamma_{-0})$, то $h_-^{'} = 0$.

б) Преобразуем условие 3) на $\mathrm{D}(S)$

$$h_+(0) = -\phi h_-(0) + i\,\varphi(A + i\,I)\widehat{h},\ \widehat{h} \in \mathrm{D}(A).$$

Действуя на это равенство оператором φ^* и используя (1) — (6), можно получить:

$$(A + i\,I)\widehat{h} - (A^* - i\,I)\overline{h} = 2\,i\,h_0,$$

где $\widehat{h} = h_0 + \psi\,h_-(0) \in \mathrm{D}(A)$, $\overline{h} = h_0 + \varphi^*\,h_+(0) \in \mathrm{D}(A^*)$.

Положим $h_+(t) = 0$, тогда $(A + i\,I)\widehat{h} - 2\,i\,h_0 = (A^* - i\,I)\,h_0$.

Таким образом $h_0^{'} = 0$, т. к. $i \in \rho(A^*)$.

в) Пусть $h_+(0)$ — произвольно. Тогда, так как $\overline{\Delta(\Gamma_+ - i\,I)} = H_+$, то $h_+^{'} = 0$. Следовательно, $h^{'} = 0$.

Теперь докажем, что S — дилатация оператора A. Действительно,

$$(S - \lambda\,I)^{-1}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda\,I)^{-1}h_- \\ R_\lambda\,h_0 - (I + \mu\,R_\lambda)\,\psi\,V_-(0) \\ (\Gamma_0 - \lambda\,I)^{-1}h_+ + e^{-i\,\lambda\,t}V_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_- \\ V_0 \\ V_+ \end{pmatrix},$$

где $V_-(0) = [(\Gamma_- - \lambda\,I)^{-1}h_-(t)]_{t=0}$, $\mu = \lambda + i$, $V_+(0) = -\phi\,V_-(0) + i\,\varphi\,(I + \mu\,R_\lambda)(h_0 - \mu\,\psi\,V_-(0))$. □

В заключении заметим, что дилатация, определяемая узлом (8) была построена в [2] и [5].

Список цитируемых источников

1. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. // Харьков: ХНУ, — 2003. — 342 с.
2. *Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. // Сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения — 1982. — Вып. 37 — С. 51–54.
3. *Кудряшов Ю. Л.* Спектральное представление самосопряженной дилатации одного класса операторов. // Динам. системы — 2007. —Вып. 23 — С. 95–98.
4. *Кудряшов Ю. Л.* σ — симметрическая дилатация операторного узла неограниченного оператора // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Физ. - мат. науки» — Симферополь: Т. 23(62) №2, 2010. — С. 92–96.
5. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // ДАН СССР. Т. 253 №4, 1980. — С. 812–815.
6. *Temme D.* The point spectrum of unitary dilations in krein spaces. // Mathematische Nachriehten — 1995.— С. 1–20.

Получена 30.03.2013