Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 3–24

УДК 517.36

Теория нормальных форм А. Пуанкаре и ее приложения к теории устойчивости положений равновесия импульсных систем в особенных случаях

А. И. Двирный*, **В. И. Слынько**

*Hedmark University College,
2418 Elverum, NORWAY, *E-mail: dvirny@mail.ru*;
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев, *E-mail: vitstab@ukr.net*

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости положений равновесия одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсных систем) в особенных случаях. На основе идей теории нормальных форм задача сводится к проблеме существования функции Ляпунова для некоторой модельной системы, содержащей лишь критические переменные. При этом используется последовательность нелинейных преобразований с ограниченными переменными коэффициентами. В качестве приложения полученных результатов рассмотрены два особенных случая устойчивости импульсных систем, аналогичных классическим случаям А. М. Ляпунова.

Ключевые слова: системы с импульсным воздействием, устойчивость по Ляпунову, нормальная форма, критические случаи теории устойчивости.

1. Введение

Вопросам устойчивости систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием посвящено значительное число публикаций, среди которых отметим [6, 7, 13, 14, 18, 19, 20]. В монографии А.М. Самойленко и Н.А. Перестюка [14] установлены достаточные условия устойчивости положений равновесия по линейному приближению. Несмотря на значительные достижения в теории устойчивости импульсных систем, задача об устойчивости положения равновесия в особенном случае является недостаточно исследованной [13]. Среди публикаций, посвященных этой проблеме, отметим прежде всего работу [17], где методом интегральных многообразий Н. Н. Боголюбова [12] обоснован принцип сведения для одного весьма частного случая нелинейных импульсных систем. Некоторые результаты, касающиеся устойчивости положений равновесия в особенных случаях, получены в работах [1, 2, 3, 5, 6, 7].

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости положения равновесия в особенном случае для одного класса нелинейных импульсных систем, матрицы линейного приближения которых перестановочны. Используя классические методы теории нормальных форм [4, 15] и прямой метод Ляпунова [8, 9, 10, 11] в сочетании с идеями работы [5], мы указываем способ приведения исходной системы к модельной системе (по аналогии с [15]), содержащей только критические переменные. Сформулирован принцип сведения, согласно которому вопрос об устойчивости положений равновесия исходной системы сводится к проблеме существования функции Ляпунова для модельной системы. Полученные общие результаты применяются к исследованию некоторых частных особенных случаев. В этих случаях получены новые достаточные условия устойчивости импульсных систем по Ляпунову.

2. Постановка задачи

Введем некоторые обозначения и определения, необходимые для дальнейшего изложения. Как обычно, $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) обозначает действительное (комплексное) n-мерное векторное пространство, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в этом пространстве, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\tau_k \in [a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ — возрастающая последовательность чисел, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности и удовлетворяющая неравенству $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1}-\tau_k\} < +\infty$, $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\tau_k\}$, $\Lambda = [a,+\infty)\setminus\mathcal{T}$.

Будем считать, что $f \in PC(\Lambda;\mathbb{C}^n)$ (или $f \in PC(\Lambda;\mathbb{R}^n)$), если и только если функция $f(t)$ непрерывна слева, а ее сужение на каждый из интервалов (τ_k,τ_{k+1}) является непрерывной функцией и $\sup\limits_{t\in[a,+\infty)}\|f(t)\| < +\infty$.

Аналогично, для последовательности $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$ будем считать, что $g_k \in P(\mathcal{T};\mathbb{C}^n)$, если и только если $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\|g_k\| < +\infty$.

Пусть ω — связная окрестность точки $x=0$ и $f : [a,+\infty)\times\omega \to \mathbb{R}^n$, $g : \omega \to \mathbb{R}^n$ (или $f : \mathbb{N}\times\omega \to \mathbb{R}^n$, $g : \omega \to \mathbb{R}^n$), тогда будем обозначать $f = O(g)$ равномерно по $t \in [a,\infty)$ (равномерно по $k \in \mathbb{N}$), если существует положительная постоянная $c_0 > 0$ и окрестность $U \subset \omega$ точки $x=0$ такие, что при всех $(t,x) \in [a,+\infty)\times\overline{U}$ (соответственно $(k,x) \in \mathbb{N}\times\overline{U}$) выполняется неравенство

$$\|f(t,x)\| \le c_0\|g(x)\|, \quad (\|f_k(x)\| \le c_0\|g(x)\|).$$

Напомним, что функция $f : [a,\infty)\times\omega \to \mathbb{R}^n$ называется локально-липшицевой в области ω по переменной x равномерно по переменной $t \in [a,+\infty)$, если для любого компакта $K \subset \omega$ существует положительная постоянная L такая, что при всех x_2, $x_1 \in K$ и $t \in [a,+\infty)$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \le L\|x_2 - x_1\|.$$

Пусть $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, тогда будем считать, что $x^\nu = x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}$, $|\nu| = |\nu_1| + \dots + |\nu_n|$, $(x,\nu) = \sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k x_k$.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= A\zeta + \sum_{|\nu|=2}^{m} f_\nu(t)\zeta^\nu + \mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta), \quad t \ne \tau_k, \\ \zeta(t+0) &= B\zeta(t) + \sum_{|\nu|=2}^{m} g_\nu^k\zeta^\nu(t) + \mathfrak{g}_{m+1,k}(\zeta), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\zeta \in \mathbb{R}^n$, A, B — постоянные $n\times n$-матрицы, $f_\nu \in PC(\Lambda;\mathbb{R}^n)$, $g_\nu^k \in P(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{f}_{m+1} \in C([a,+\infty)\times\omega;\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{g}_{m+1,k} \in C(\omega;\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, ω — связная окрестность точки $\zeta = 0$, $\mathfrak{f}_{m+1}(t,0) = 0$, $\mathfrak{g}_{m+1,k}(0) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $\mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta) = O(\|\zeta\|^{m+1})$ и $\mathfrak{g}_{m+1,k}(\zeta) = O(\|\zeta\|^{m+1})$ равномерно по переменной $t \in [a,+\infty)$ и по $k \in \mathbb{N}$, соответственно. Также будем считать, что функция $\mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta)$ является локально-липшицевой по переменной x в области ω равномерно по переменной $t \in [a,+\infty)$. Решение $\zeta(t;t_0,\zeta_0)$ $(t_0 < \tau_1)$ задачи Коши для системы (2.1) с начальным условием $\zeta(t_0;t_0,\zeta_0) = \zeta_0$ предполагается непрерывным слева, т.е. $\zeta(t-0;t_0,\zeta_0) = \zeta(t;t_0,\zeta_0)$. Отметим, что решение задачи Коши $\zeta(t;t_0,\zeta_0)$ существует и единственно (см. [14]).

Предположим, что матрицы A и B линейного приближения системы (2.1) перестановочны, $AB = BA$, и имеют простую структуру. Последнее предположение позволяет упростить дальнейшие выкладки и не является принципиальным. Общий случай исследуется аналогично. В рассматриваемом случае существует линейное невырожденное преобразование T с комплексными коэффициентами, одновременно приводящее матрицы A и B к диагональному виду. Пусть соответствующие диагональные матрицы A_1 и B_1 имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_1}, i\omega_1,\ldots,i\omega_{n_2}, \varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n_3}, 0,\ldots,0\},\\ B_1 &= \mathrm{diag}\{\varrho_1,\ldots,\varrho_{n_1}, e^{i\beta_1},\ldots,e^{i\beta_{n_2}}, \rho_1,\ldots,\rho_{n_3}, \sigma_1,\ldots,\sigma_{n_4}\}, \end{aligned}$$

где λ_s, $\varrho_s \in \mathbb{C}$, $s = \overline{1,n_1}$, ω_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n_2}$, $\varkappa_p$, $\rho_p \in \mathbb{R}$, $p = \overline{1,n_3}$, $\sigma_q \in \{-1,+1\}$, $q = \overline{1,n_4}$. Здесь n_1, n_2, n_3, n_4 — неотрицательные целые числа.

Предположим выполнение следующих неравенств

$$\max_s \sup_k e^{\Re\lambda_s(\tau_{k+1}-\tau_k)}|\varrho_s| < 1, \quad \max_p \sup_k e^{\varkappa_p(\tau_{k+1}-\tau_k)}|\rho_p| < 1. \tag{2.2}$$

(Здесь и далее $\Re\lambda$ есть вещественная часть комплексного числа λ.)

Применяя линейное преобразование T к исходной нелинейной системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) (по аналогии с подходом [15]), систему преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_s}{dt} &= \lambda_s z_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\ \frac{dw_j}{dt} &= i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\ \frac{dx_p}{dt} &= \varkappa_p x_p + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\ \frac{dy_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\ z_s(t+0) &= \varrho_s z_s(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k,\\ w_j(t+0) &= e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$x_p(t+0) = \rho_p x_p(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k,$$
$$y_q(t+0) = \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k,$$

где $z_s \in \mathbb{C}$, звездочка * обозначает комплексное сопряжение, $f^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, $s=\overline{1,n_1}$ $w_j \in \mathbb{C}$, $g^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, $j=\overline{1,n_2}$, $x_p \in \mathbb{R}$, $r^{(p)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, $p=\overline{1,n_3}$, $y_q \in \mathbb{R}$, $s^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in \mathbb{C}$, $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, $q=\overline{1,n_4}$, $O_{m+1} = O((\|z\|^2+\|w\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}})$ равномерно по $t \in [a,\infty)$ или $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, выполняются соотношения

$$r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) = (r^{(p)}_{\mu\nu\tau}(t))^*, \quad R^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) = (R^{(p)}_{\mu\nu\tau}(t))^*, \quad s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = (s^{(q)}_{\mu\nu\tau}(t))^*, \quad S^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = (S^{(q)}_{\mu\nu\tau}(t))^*,$$

обеспечивающие вещественность переменных x и y.

Переменные $(z,x) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_3}$ называются *некритическими*. Неравенства (2.2) обосновывают целесообразность использования этого термина. Переменные $(w,y) \in \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_4}$ называются *критическими*.

3. Приведение к нормальной форме

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.3). Покажем, что исследование устойчивости критического состояния равновесия $z=0$, $w=0$, $x=0$, $y=0$ этой системы сводится к вопросу о существовании функции Ляпунова для следующей модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (т.е. системы, содержащей только критические переменные):

$$\begin{aligned}
\frac{dw_j}{dt} &= i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, && t \neq \tau_k,\\
\frac{dy_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, && t \neq \tau_k,\\
w_j(t+0) &= e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, && t=\tau_k,\\
y_q(t+0) &= \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, && t=\tau_k,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\overline{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $\overline{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, $\overline{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $\overline{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$, N — натуральное число, $2 \le N \le m$, и $\overline{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau} = \left(\overline{s}^{(q)}_{\mu\nu\tau}\right)^*$, $\overline{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = \left(\overline{S}^{(qk)}_{\mu\nu\tau}\right)^*$, при всех $\nu \in \mathbb{Z}^{n_2}_+$, $\mu \in \mathbb{Z}^{n_2}_+$, $\tau \in \mathbb{Z}^{n_4}_+$.

Рассмотрим нелинейное преобразование переменных $(z, w, x, y) \to (\widetilde{z}, \widetilde{w}, \widetilde{x}, \widetilde{y})$ вида

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_s &= z_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2},\\
\widetilde{w}_j &= w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2},\\
\widetilde{x}_p &= x_p + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2},\\
\widetilde{y}_q &= y_q + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}$, $W^{(j)}_{\nu\mu\tau}$, $X^{(p)}_{\nu\mu\tau}$, $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $2 \le N \le m$. Коэффициенты $X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t)$, $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)$ преобразования (3.2) удовлетворяют условиям

$$\left(X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t)\right)^* = X^{(p)}_{\mu\nu\tau}(t), \quad \left(Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)\right)^* = Y^{(q)}_{\mu\nu\tau}(t).$$

Отметим, что преобразование (3.2) обратимо в достаточно малой окрестности точки $z = 0,\ w = 0,\ x = 0,\ y = 0$ и обратное преобразование имеет вид [15]

$$\begin{aligned}
z_s &= \widetilde{z}_s - \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{2N-1},\\
w_j &= \widetilde{w}_j - \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{2N-1},\\
x_p &= \widetilde{x}_p - \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{2N-1},\\
y_q &= \widetilde{y}_q - \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{2N-1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В новых переменных $(\widetilde{z}, \widetilde{w}, \widetilde{x}, \widetilde{y})$ система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{z}_s}{dt} &= \lambda_s \widetilde{z}_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \ne \tau_k,\\
\frac{d\widetilde{w}_j}{dt} &= i\omega_j \widetilde{w}_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \ne \tau_k,\\
\frac{d\widetilde{x}_p}{dt} &= \varkappa_p \widetilde{x}_p + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \ne \tau_k,\\
\frac{d\widetilde{y}_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \ne \tau_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_s(t+0) &= \varrho_s \widetilde{z}_s(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \widetilde{z}^{\nu_1} (\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2} (\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k, \\
\widetilde{w}_j(t+0) &= e^{i\beta_j} \widetilde{w}_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} \widetilde{z}^{\nu_1} (\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2} (\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k, \\
\widetilde{x}_p(t+0) &= \rho_p \widetilde{x}_p(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau} \widetilde{z}^{\nu_1} (\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2} (\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k, \\
\widetilde{y}_q(t+0) &= \sigma_q \widetilde{y}_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} \widetilde{z}^{\nu_1} (\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2} (\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t=\tau_k,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in P(\Lambda,\mathbb{C})$, $\widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T},\mathbb{C})$, $\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $\widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T},\mathbb{C})$, $\widetilde{r}^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $\widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T},\mathbb{C})$, $\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $\widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T},\mathbb{C})$.

Отметим, что коэффициенты исходной системы (2.3) при мономах порядка меньше N не изменяются при преобразовании этой системы к новым переменным, т.е. при $|\nu| + |\mu| + |\tau| < N$, $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) = f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad \widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau} = F^{(sk)}_{\nu\mu\tau}, \quad \widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad \widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} = G^{(jk)}_{\nu\mu\tau}, \\
&\widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) = r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad \widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau} = R^{(pk)}_{\nu\mu\tau}, \quad \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad \widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = S^{(qk)}_{\nu\mu\tau}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подробно вопрос о формулах преобразования коэффициентов порядка N $(|\nu| + |\mu| + |\tau| = N)$ при переходе от исходной системы (2.3) к системе (3.4). С учетом формул (2.3), (3.2) и (3.3) при $t \neq \tau_k$ получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{z}_s}{dt} = \frac{dz_s}{dt} &+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \frac{dZ^{(s)}_{\nu\mu\tau}}{dt} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + \\
&+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} \Bigg[\frac{dz^{\nu_1}}{dt}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + z^{\nu_1}\frac{d(z^*)^{\mu_1}}{dt} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + \\
&\qquad + z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1}\frac{dw^{\nu_2}}{dt}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}\frac{d(w^*)^{\mu_2}}{dt} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + \\
&\qquad\qquad + z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}\frac{dx^{\tau_1}}{dt} y^{\tau_2} + z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1}\frac{dy^{\tau_2}}{dt} \Bigg] + \dots .
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\frac{dz^{\nu_1}}{dt} = (\nu_1,\lambda) z^{\nu_1} + \dots, \quad \frac{d(z^*)^{\mu_1}}{dt} = (\mu_1,\lambda^*)(z^*)^{\mu_1} + \dots, \quad \frac{dw^{\nu_2}}{dt} = i(\nu_2,\omega) w^{\nu_2} + \dots, \\
&\frac{d(w^*)^{\mu_2}}{dt} = -i(\mu_2,\omega)(w^*)^{\mu_2} + \dots, \quad \frac{dx^{\tau_1}}{dt} = (\varkappa,\tau_1) x^{\tau_1} + \dots, \quad \frac{dy^{\tau_2}}{dt} = 0 + \dots,
\end{aligned}$$

где введены обозначения $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_{n_1})^T$, $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_{n_2})^T$, $\varkappa = (\varkappa_1,\dots,\varkappa_{n_3})^T$.

Поэтому

$$\frac{d\widetilde{z}_s}{dt} = \frac{dz_s}{dt} + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \left[\frac{dZ^{(s)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \Big((\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) \Big) Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} \right] \times$$
$$\times\, z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + \ldots = \lambda_s z_s +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \left[\frac{dZ^{(s)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \Big((\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) \Big) Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} \right] \times$$
$$\times\, \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + \ldots = \lambda_s \widetilde{z}_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \left[\frac{dZ^{(s)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \right.$$
$$\left. + \Big((\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) - \lambda_s \Big) Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} + f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) \right] \times$$
$$\times\, \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + \ldots =$$
$$= \lambda_s \widetilde{z}_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{z}^{\nu_1}(\widetilde{z}^*)^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1} \widetilde{y}^{\tau_2} + \ldots.$$

Здесь и далее многоточие обозначает нелинейные слагаемые, порядок которых отличен от N.

Таким образом, коэффициенты нелинейного преобразования (3.2) при $t \neq \tau_k$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dZ^{(s)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \left((\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) - \lambda_s \right) Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} + f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) = \widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad (3.5)$$

$|\nu| + |\mu| + |\tau| = N$. Рассмотрим связь коэффициентов исходной системы (2.3) и преобразованной системы (3.4) при $t = \tau_k$

$$\widetilde{z}_s(t+0) = z_s(t+0) +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t+0) z^{\nu_1}(t+0)(z^*(t+0))^{\mu_1} w^{\nu_2}(t+0)(w^*(t+0))^{\mu_2} \times$$
$$\times\, x^{\tau_1}(t+0) y^{\tau_2}(t+0) =$$
$$= \varrho_s z_s(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(t)(z^*(t))^{\mu_1} w^{\nu_2}(t)(w^*(t))^{\mu_2} x^{\tau_1}(t) y^{\tau_2}(t) +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t+0) \varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} z^{\nu_1}(t)(z^*(t))^{\mu_1} \times$$
$$\times\, w^{\nu_2}(t)(w^*(t))^{\mu_2} x^{\tau_1}(t) y^{\tau_2}(t) + \ldots =$$
$$= \varrho_s \widetilde{z}_s(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \left[F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} + \varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t+0) - \varrho_s Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) \right] \times$$
$$\times\, \widetilde{z}^{\nu_1}(t)(\widetilde{z}^*(t))^{\mu_1} \widetilde{w}^{\nu_2}(t)(\widetilde{w}^*(t))^{\mu_2} \widetilde{x}^{\tau_1}(t) \widetilde{y}^{\tau_2}(t) + \ldots.$$

Здесь $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_{n_1})^T$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n_2})^T$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n_3})^T$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n_4})^T$.

Следовательно, коэффициенты нелинейного преобразования (3.2) при $t = \tau_k$ удовлетворяют уравнению

$$\varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t+0) - \varrho_s Z^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) + F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} = \widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau}, \tag{3.6}$$

$|\nu| + |\mu| + |\tau| = N$. Отметим, что коэффициенты при мономах порядках M, $(m \geq |\nu| + |\mu| + |\tau| = M > N)$, преобразуются довольно сложным образом по формулам

$$\widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau} = f^{(s)}_{\nu\mu\tau} + \widehat{f}_M[f, g, s, r], \quad F^{(s)}_{\nu\mu\tau} = F^{(s)}_{\nu\mu\tau} + \widehat{F}_M[F, G, S, R], \tag{3.7}$$

где $\widehat{f}_M$ представляет собой полиномиальную функцию от коэффициентов $f_{\nu'\mu'\tau'}$, $g_{\nu'\mu'\tau'}$, $s_{\nu'\mu'\tau'}$, $r_{\nu'\mu'\tau'}$, $|\nu'|+|\mu'|+|\tau'| < M$ исходной системы (2.3), $\widehat{F}_M$ представляет собой полиномиальную функцию от коэффициентов $F_{\nu'\mu'\tau'}$, $G_{\nu'\mu'\tau'}$, $S_{\nu'\mu'\tau'}$, $R_{\nu'\mu'\tau'}$, $|\nu'|+|\mu'|+|\tau'| < M$ исходной системы (2.3). Аналогичным образом, можно получить уравнения для остальных коэффициентов N-го порядка нелинейного преобразования (3.2):

$$\begin{gathered}\frac{dW^{(j)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \Big[(\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) - i\omega_j\Big] W^{(j)}_{\nu\mu\tau} + g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = \widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t), \ t \neq \tau_k, \\ \varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0) - e^{i\beta_j} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k) + G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} = \widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau},\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{dX^{(p)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \Big[(\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1) - \varkappa_p\Big] X^{(p)}_{\nu\mu\tau} + r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) = \widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t), \ t \neq \tau_k, \\ \varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0) - \rho_p X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k) + R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} = \widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau},\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{dY^{(q)}_{\nu\mu\tau}}{dt} + \Big[(\nu_1, \lambda) + (\mu_1, \lambda^*) + i(\nu_2 - \mu_2, \omega) + (\varkappa, \tau_1)\Big] Y^{(q)}_{\nu\mu\tau} + s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t), \ t \neq \tau_k, \\ \varrho^{\nu_1}(\varrho^*)^{\mu_1} e^{i(\beta, \nu_2 - \mu_2)} \rho^{\tau_1} \sigma^{\tau_2} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0) - \sigma_q Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k) + S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = \widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau}.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь $|\nu| + |\mu| + |\tau| = N$.

Коэффициенты порядка выше N ($|\nu| + |\mu| + |\tau| = M$) преобразуется по формулам, аналогичным (3.7)

$$\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) + \widehat{g}_M[f, g, r, s], \quad \widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} = G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} + \widehat{G}_M\left[F, G, R, S\right], \tag{3.11}$$

$$\widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) = r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) + \widehat{r}_M[f, g, r, s], \quad \widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau} = R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} + \widehat{R}_M\left[F, G, R, S\right], \tag{3.12}$$

$$\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) + \widehat{s}_M[f, g, r, s], \quad \widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} + \widehat{S}_M\left[F, G, R, S\right]. \tag{3.13}$$

Здесь $\hat{g}_M$, $\hat{r}_M$, $\hat{s}_M$ — представляют собой полиномиальные функции от коэффициентов $f_{\nu'\mu'\tau'}$, $g_{\nu'\mu'\tau'}$, $s_{\nu'\mu'\tau'}$, $r_{\nu'\mu'\tau'}$, $|\nu'| + |\mu'| + |\tau'| < M$ исходной системы (2.3), $\widehat{G}_M$, $\widehat{R}_M$, $\widehat{S}_M$ представляют собой полиномиальные функции от коэффициентов $F_{\nu'\mu'\tau'}$, $G_{\nu'\mu'\tau'}$, $S_{\nu'\mu'\tau'}$, $R_{\nu'\mu'\tau'}$, $|\nu'| + |\mu'| + |\tau'| < M$ исходной системы (2.3).

Уравнения (3.5), (3.6), (3.9), (3.10) для коэффициентов нелинейного преобразования (3.2) позволяют рассмотреть вопрос о возможности исключения членов N-го порядка из преобразованной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (3.4). С этой целью установим условия существования функций $Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $W^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in$

$PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $X^{(p)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$, удовлетворяющих уравнениям (3.5), (3.6), (3.9), (3.10), в которых $\widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{R}^{(pk)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $\widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = 0$. Поскольку

$$q_k = \left| e^{-[(\nu_1,\lambda)+(\mu_1,\lambda^*)+i(\nu_2-\mu_2,\omega)+(\varkappa,\tau_1)-\lambda_s]\Delta\tau_k} \varrho_s \varrho^{-\nu_1}(\varrho^*)^{-\mu_1} e^{i(\beta,\nu_2-\mu_2)} \rho^{-\tau_1}\sigma^{-\tau_2} \right| =$$
$$= e^{-[(\nu_1+\mu_1,\Re\lambda)+(\varkappa,\tau_1)-\Re\lambda_s](\tau_k-\tau_{k-1})} |\varrho_s||\varrho|^{-\nu_1-\mu_1}|\rho|^{-\tau_1},$$

где $|\rho| = (|\rho_1|,|\rho_2|,\ldots,|\rho_{n_2}|)$, $|\varrho| = (|\varrho_1|,|\varrho_2|,\ldots,|\varrho_{n_2}|)$. Из условия $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| = 0$ следует, что $0 < q_k \le \eta_0 < 1$. Следовательно, из включений $f^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T},\mathbb{C})$ следует, что уравнение с импульсным воздействием (3.5), (3.6) имеет решение $Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda,\mathbb{C})$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$.

Таким образом, преобразование (3.2) в этом случае позволяет в правых частях уравнений для комплексных некритических переменных z_j исключить члены вида $kw^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}y^{\tau_2}$, $k \ne 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$, содержащие только критические переменные.

В случае, если $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| \ne 0$ будем считать, что $Z^{(s)}_{\nu\mu\tau} = 0$ при $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$.

Аналогично, рассматривая величину

$$|q_k| = \left| e^{-[(\nu_1,\lambda)+(\mu_1,\lambda^*)+i(\nu_2-\mu_2,\omega)+(\varkappa,\tau_1)-i\omega_j]\Delta\tau_k} \right| |\varrho|^{-(\nu_1+\mu_1)}|\rho|^{-\tau_1} =$$
$$= e^{-[(\nu_1+\mu_1,\Re\lambda)+(\varkappa,\tau_1)]\Delta\tau_k}|\varrho|^{-(\nu_1+\mu_1)}|\rho|^{-\tau_1},$$

нетрудно видеть, что $|q_k| \ge \eta_0 > 1$ при $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| \ne 0$. . Таким образом, в правых частях уравнений для комплексных критических переменных w_j, $j = \overline{1,n_2}$ преобразование (3.2) позволяет исключить все мономы вида $kz^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1}w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}x^{\tau_1}y^{\tau_2}$, $k \in \mathbb{C}$, $k \ne 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$, $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| \ne 0$. Другими словами, после преобразования (3.2) в правых частях соответствующих уравнений системы (3.4) для критических переменных w_j могут быть ненулевыми лишь члены вида $k\widetilde{w}^{\nu_2}(\widetilde{w}^*)^{\mu_2}(\widetilde{y})^{\tau_2}$, $k \in \mathbb{C}$, $k \ne 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$.

В случае, если $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| = 0$ будем считать, что соответствующий коэффициент $W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$.

Аналогичные рассуждения, позволяют прийти к следующим выводам: функции $X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t)$ можно подобрать так, чтобы в правых частях уравнений для действительных критических переменных x_p исключить все мономы вида $kw^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}y^{\tau_2}$, $k \ne 0$, $|\nu_2|+|\mu_2|+|\tau_2| = N$, содержащие только критические переменные. В случае, если $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| \ne 0$, полагаем $X^{(p)}_{\nu\mu\tau} = 0$ при $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$. Также функции $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$ можно подобрать таким образом, чтобы в правых частях уравнений для действительных критических переменных y_q исключить все мономы вида $kz^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1}w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}x^{\tau_1}y^{\tau_2}$, $k \ne 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$, $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| \ne 0$. Если же $|\nu_1|+|\mu_1|+|\tau_1| = 0$, то будем считать $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau} = 0$, $|\nu|+|\mu|+|\tau| = N$.

Подводя итоги приведенных выше результатов, приходим к выводу о существовании нелинейного преобразования $\mathcal{Q}_N$, приводящего (в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия) нелинейную систему (2.3) к виду (3.4) и обладающему следующими свойствами:

1°. Преобразование $\mathcal{Q}_N$ не изменяют членов порядка $< N$.

2°. Если $f^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $g^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $r^{(p)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $s^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| \le m$, то выполняются включения $\widetilde{f}^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $\widetilde{r}^{(p)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| \le m$.

3°. Если $F^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $G^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $R^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $S^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$, $2 \le |\nu|+|\mu|+|\tau| \le m$, $k \in \mathbb{N}$, то $\widetilde{F}^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $\widetilde{G}^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $\widetilde{R}^{(sk)}_{\nu\mu\tau}$, $\widetilde{S}^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$, $2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| \le m$, $k \in \mathbb{N}$.

4°. Преобразованная система (3.4) в правых частях уравнений, определяющих эволюцию некритических переменных z_j, x_p, не содержит мономов вида $kw^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau}$, $|\nu| + |\mu| + |\tau| = N$, $k \ne 0$.

5°. Преобразованная система (3.4) в правых частях уравнений, определяющих эволюцию критических переменных w_j, y_q, не содержит мономов вида $kz^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1}w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2}x^{\tau_1}y^{\tau_2}$, $|\nu_1| + |\mu_1| + |\tau_1| \ne 0$, $k \ne 0$, $|\nu| + |\mu| + |\tau| = N$.

6°. Задача об устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (2.3) эквивалентна задаче об устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния равновесия $\widetilde{z} = 0$, $\widetilde{w} = 0$, $\widetilde{x} = 0$, $\widetilde{y} = 0$ системы (3.4).

Свойства 1°-6° позволяют предложить следующий алгоритм упрощения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Этот алгоритм аналогичен классическому алгоритму приведения к нормальной форме А. Пуанкаре [4, 15].

Сначала строится преобразование $\mathcal{Q}_2$ со свойствами 1°-6° и применяется к системе (2.3), потом к полученной системе применяется преобразование $\mathcal{Q}_3$, и т.д. В результате применения к системе (2.3) композиции преобразований $\mathcal{Q}_N \circ \mathcal{Q}_{N-1} \circ \dots \circ \mathcal{Q}_2$ получим систему дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz_s}{dt} = \lambda_s z_s + \mathfrak{f}_s(t, z, w, x, y) + O_{N+1}, \quad t \ne \tau_k, \\
&\frac{dw_j}{dt} = i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau} + O_{N+1}, \quad t \ne \tau_k, \\
&\frac{dx_p}{dt} = \varkappa_p x_p + \mathfrak{r}_p(t, z, w, x, y) + O_{N+1}, \quad t \ne \tau_k, \\
&\frac{dy_q}{dt} = \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau} + O_{N+1}, \quad t \ne \tau_k, \\
&z_s(t+0) = \varrho_s z_s(t) + \mathfrak{F}_{sk}(z(t), w(t), x(t), y(t)) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k, \\
&w_j(t+0) = e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu}y^{\tau}(t) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k, \\
&x_p(t+0) = \rho_p x_p(t) + \mathfrak{R}_{pk}(z(t), w(t), x(t), y(t)) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k, \\
&y_q(t+0) = \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu}y^{\tau}(t) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

При этом функции $\mathfrak{f}_s$, $\mathfrak{r}_p$, $\mathfrak{F}_{sk}$, $\mathfrak{R}_{pk}$ в достаточно малой окрестности состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют равномерно по $t \in [a, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ оценкам

$$|\mathfrak{f}_s(t, z, w, x, y)| = O(\|z\|^2 + \|x\|^2 + \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}),$$
$$|\mathfrak{r}_p(t, z, w, x, y)| = O(\|z\|^2 + \|x\|^2 + \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}),$$
$$|\mathfrak{F}_{sk}(z, w, x, y)| = O(\|z\|^2 + \|x\|^2 + \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}),$$
$$|\mathfrak{R}_{pk}(z, w, x, y)| = O(\|z\|^2 + \|x\|^2 + \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}).$$

Последние неравенства позволяют установить теоремы о сведении.

Рассмотрим модельную импульсную систему (3.1). Введем класс вспомогательных функций, которые далее будут применяться для исследования устойчивости критического положения равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (2.3). Рассмотрим функцию вида

$$v(t, w, w^*, y) = \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{L} p_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau,$$

где $p_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $p_{\nu\mu\tau}(t) = p^*_{\mu\nu\tau}(t)$ при $2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| \le L$. Индуктивно определим функции $v_l(t, w, w^*, y)$, $l = 0, 1, \ldots, \chi + 1$, $t \in \Lambda$. Положим $v_0(t, w, w^*, y) = v(t, w, w^*, y)$ и, по индукции,

$$v_l(t, w, w^*, y) = \frac{dv_{l-1}}{dt}\Big|_{(3.1)} = \frac{\partial v_{l-1}}{\partial t} + \Big(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial w}\Big)^T (i\omega w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} g_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau) +$$
$$+\Big(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial w^*}\Big)^T (i\omega w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} g_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau)^* + \Big(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial y}\Big)^T \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} s_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau.$$

Полная разность функции $v(t, w, w^*, y)$ вдоль решений системы (3.1) при $t = \tau_k$ имеет вид

$$\Delta v\Big|_{(3.1)}(\tau_k, w, w^*, y) = v\Bigg(\tau_k + 0, e^{iB} w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} G^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau,$$
$$\Bigg(e^{iB} w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} G^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau\Bigg)^*, \Xi w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} S^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau\Bigg) - v(\tau_k, w, w^*, y).$$

Здесь $\omega = \operatorname{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_{n_2})$, $B = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_{n_2})$, $\Xi = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n_4})$. Для заданных натуральных чисел k, χ определим выражение

$$\mathcal{V}^{(v)}_{k,\chi}(w, w^*, y) = -\sum_{l=1}^{\chi} (-1)^l \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^l}{l!} v_l(\tau_k, w, w^*, y) + \Delta v\Big|_{(3.1)}(\tau_k, w, w^*, y)$$

Относительно функции $v(t, w, w^*, y)$ и системы (3.1) сделаем следующие предположения.

Предположение 3.1. Существуют связные окрестности $D \subset \mathbb{C}^{n_2}$ точки $w = 0$ и $N \subset \mathbb{R}^{n_4}$ точки $y = 0$ такие, что модельная система дифференциальных уравнений (3.1) удовлетворяет условиям:

1) существуют функции класса Хана $a_1(\cdot)$, $b_1(\cdot)$ такие, что при всех $(t, w, w^*, y) \in \Lambda \times D \times D^* \times N$ выполняются неравенства

$$a_1(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}) \le v(t, w, w^*, y) \le b_1(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2});$$

2) существует функция класса Хана $c(\cdot)$ такая, что при всех $(k, w, w^*, y) \in \mathbb{N} \times D \times D^* \times N$ выполняется неравенство

$$\mathcal{V}_{k,\chi}^{(v)}(w, w^*, y) \le -c(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2});$$

3) существует функция класса Хана $d(\cdot)$, для которой существует верхняя производная Дини $D^+d(\cdot)$ и при всех $(t, w, w^*, y) \in \Lambda \times D \times D^* \times N$ выполняется неравенство

$$|v_{\chi+1}(t, w, w^*, y)| \le d(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2});$$

4) существует положительная постоянная $c_1 > 0$ такая, что при всех $\gamma > 0$ функции $c(\cdot)$ и $d(\cdot)$ удовлетворяют при достаточно малых r соотношениям

$$|D^+d(r)| \le c_1 r, \quad \lim_{r\to 0+0} \frac{r^{N+2}}{\sqrt{c(r)}} = 0, \quad \lim_{r\to 0+0} \frac{d(\gamma r)}{c(r)} = 0.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что для модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (3.1) *существует функция Ляпунова* $v(t, w, w^*, y)$ *удовлетворяющая условиям предположения* 3.1. *Тогда критическое положение равновесия* $\zeta = 0$ *системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

4. Полунормальная форма модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Теорема о сведении (теорема 3.1) позволяет свести исследование устойчивости системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критическом случае к вопросу о существовании вспомогательной функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы 3.1 для модельной системы (т.е. системы, содержащей только критические переменные), которая имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dw_j}{dt} &= i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \overline{g}_{\nu\mu\tau}^{(j)}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, \\
\frac{dy_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \overline{s}_{\nu\mu\tau}^{(q)}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, \qquad t \ne \tau_k, \\
w_j(t+0) &= e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \overline{G}_{\nu\mu\tau}^{(jk)} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, \\
y_q(t+0) &= \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \overline{S}_{\nu\mu\tau}^{(qk)} w^\nu (w^*)^\mu y^\tau, \quad t = \tau_k,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $w \in \mathbb{C}^{n_2}$, $y \in \mathbb{R}^{n_4}$, $\omega_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_q \in \{-1, +1\}$, $f^{(j)}_{\nu\mu}, g^{(q)}_{\nu\mu} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $G^{(jk)}_{\nu\mu}, F^{(qk)}_{\nu\mu} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$, $j = \overline{1, n_2}$, $q = \overline{1, n_4}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящем параграфе укажем некоторый способ упрощения модельной системы с импульсным воздействием. Предварительное применение этого подхода приводит в дальнейшем исследовании к менее громоздким формулам, чем в общем случае. Сущность предложенного упрощения модельной системы (4.1) сводится к преобразованию непрерывной или дискретной компонент системы к нормальной форме.

В качестве примера рассмотрим преобразование, приводящее дискретную компоненту системы к нормальной форме.

Введем нелинейную замену переменных

$$\begin{aligned} \widetilde{w} &= w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} W_{\nu\mu\tau}(t) w^{\nu} (w^*)^{\mu} y^{\tau} \\ \widetilde{y} &= y + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Y_{\nu\mu\tau}(t) w^{\nu} (w^*)^{\mu} y^{\tau}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $2 \le N \le m$, $W_{\nu\mu\tau}(t)$ — кусочно-постоянные функции класса $PC(\Lambda, \mathbb{C})$ с интервалами постоянства $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Отметим некоторые очевидные свойства преобразования переменных (4.2):

1°. Преобразование (4.2) не изменяет членов порядка $< N$.

2°. Преобразование (4.2) не меняет существа задачи об устойчивости критического состояния равновесия $w = 0$, $y = 0$ системы (4.1).

Если $t \neq \tau_k$, то система (4.1) в новых переменных $(\widetilde{w}, \widetilde{y})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{w}_j}{dt} &= i\omega_j \widetilde{w}_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{w}^{\nu} (\widetilde{w}^*)^{\mu} \widetilde{y}^{\tau} + O_{m+1}, \\ \frac{d\widetilde{y}_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) \widetilde{w}^{\nu} (\widetilde{w}^*)^{\mu} \widetilde{y}^{\tau} + O_{m+1}. \end{aligned}$$

Здесь $w_j \in \mathbb{C}$, $\widetilde{f}^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $y_q \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g}^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$. В соответствии со свойством 1°, выполняются равенства

$$\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad 2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| < N,$$

$$\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t), \quad 2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| < N.$$

Остальные коэффициенты $\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t), \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)$ представляют собой полиномиальные функции коэффициентов исходной системы $g^{(j)}_{\nu'\mu'\tau'}(t)$, $s^{(q)}_{\nu'\mu'\tau'}(t)$, $|\nu'| + |\mu'| + |\tau'| < |\nu| + |\mu| + |\tau|$. При этом имеют место включения $\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t), \widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$.

Если $t = \tau_k$, то система (4.1) в новых переменных $(\widetilde{w}, \widetilde{y})$ преобразуется к виду

$$\widetilde{w}(t+0) = w_j(t+0) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t+0) w^{\nu}(t+0)(w^*(t+0))^{\mu} y^{\tau}(t+0) =$$
$$= e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu} y^{\tau}(t) +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t+0) e^{i(\beta,\nu-\mu)} \sigma^{\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu} y^{\tau}(t) + \dots =$$
$$= e^{i\beta_j} \widetilde{w}_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \big(G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} - e^{i\beta_j} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) + e^{i(\beta,\nu-\mu)} \sigma^{\tau} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t+0)\big) \times$$
$$\times \widetilde{w}^{\nu}(t)(\widetilde{w}^*(t))^{\mu} \widetilde{y}^{\tau}(t) + \dots,$$

где точками обозначены не выписанные члены, порядок которых отличен от N.

Аналогично,

$$\widetilde{y}(t+0) = y_q(t+0) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t+0) w^{\nu}(t+0)(w^*(t+0))^{\mu} y^{\tau}(t+0) =$$
$$= \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu} y^{\tau}(t) +$$
$$+ \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t+0) e^{i(\beta,\nu-\mu)} \sigma^{\tau} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu} y^{\tau}(t) + \dots =$$
$$= \sigma_q \widetilde{y}_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=N} \big(S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} - \sigma_q W^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) + e^{i(\beta,\nu-\mu)} \sigma^{\tau} W^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t+0)\big) \times$$
$$\times \widetilde{w}^{\nu}(t)(\widetilde{w}^*(t))^{\mu} \widetilde{y}^{\tau}(t) + \dots$$

Функции $W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t)$, $Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)$ постараемся выбрать так, чтобы

$$Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0) - \sigma_q \sigma^{-\tau} e^{-i(\beta,\nu-\mu)} Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k) = e^{-i(\beta,\nu-\mu)} S^{(qk)}_{\nu\mu\tau}, \tag{4.3}$$
$$W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0) - e^{i[\beta_j-(\beta,\nu-\mu)]} \sigma^{-\tau} W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k) = e^{i(\beta,\nu-\mu)} G^{(jk)}_{\nu\mu\tau}. \tag{4.4}$$

Очевидно, что уравнения (4.3)–(4.4) не всегда разрешимы в классе функций $PC(\Lambda, \mathbb{C})$.

Определение 4.1. Моном $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$ (соответственно $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$) в j-том уравнении (4.1) называется *нерезонансным* мономом порядка $|\nu|+|\mu|+|\tau|$, если уравнение (4.3) (соответственно уравнение (4.4)) имеет решение $\{Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$ (соответственно $\{W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$).

Определение 4.2. Моном $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$ (соответственно, $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$) называется *резонансным* мономом порядка $|\nu|+|\mu|+|\tau|$, если уравнение (4.3) (соответственно, уравнение (4.4)) не имеет решений $\{Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежащих классу $P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$ (соответственно, $\{W^{(j)}_{\nu\mu\tau}(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty} \in P(\mathcal{T}, \mathbb{C})$).

Определение 4.3. Резонансный моном $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$ (соответственно, $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}$) называется *тождественно резонансным* мономом порядка $|\nu|+|\mu|+|\tau|$, если равенство $e^{i(\beta_j-(\beta,\nu-\mu))} = 1$ выполняется независимо от β (соответственно, $\sigma^{-\tau} e^{-i(\beta,\nu-\mu)} = 1$ независимо от β и σ).

Отметим, что если моном $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau}w^\nu(w^*)^\mu y^\tau$ (соответственно, $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau}w^\nu(w^*)^\mu y^\tau$) является нерезонансным, то новые переменные $\widetilde{w},\widetilde{y}$ можно выбрать так, что в новых переменных этот моном отсутствует.

Обозначим через $\mathfrak{G}_N$, $2\le N\le m$, преобразование переменных (2.3). Применяя последовательно к системе (4.1) преобразования $\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_3,\dots,\mathfrak{G}_N$, приводим систему (4.1) в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $\widetilde{w}=0$, $\widetilde{y}=0$ к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{w}_j}{dt} &= i\omega_j\widetilde{w}_j+\sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N}\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t)\widetilde{w}^\nu(\widetilde{w}^*)^\mu\widetilde{y}^\tau+O_{N+1},\\
\frac{d\widetilde{y}_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N}s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)\widetilde{w}^\nu(\widetilde{w}^*)^\mu\widetilde{y}^\tau+O_{N+1}, \qquad t\neq\tau_k\\
\widetilde{w}_j(t+0) &= e^{i\beta_j}\widetilde{w}_j(t)+{\sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N}}'\widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau}\widetilde{w}^\nu(\widetilde{w}^*)^\mu\widetilde{y}^\tau+O_{N+1},\\
\widetilde{y}_q(t+0) &= \sigma_q\widetilde{y}_q(t)+{\sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N}}'\widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau}\widetilde{w}^\nu(\widetilde{w}^*)^\mu\widetilde{y}^\tau+O_{N+1}, \quad t=\tau_k,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где штрих возле знака суммирования означает, что сумма содержит лишь резонансные мономы.

Система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (4.5) называется *полунормальной* формой модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Далее ограничимся рассмотрением модельных систем, которые приведены к полунормальной форме. Такое предположение приводит к некоторому упрощению дальнейших вычислений, но отнюдь не является принципиальным и может быть опущено.

5. Случай одной действительной критической переменной

Рассмотрим простейший критический случай, когда есть лишь одна критическая переменная и она является действительной. Модельное уравнение с импульсным воздействием имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \sum_{\tau=2}^{N}s_\tau(t)y^\tau, \qquad t\neq\tau_k,\\
y(t+0) &= \sigma y(t)+\sum_{\tau=2}^{N}S^{(k)}_\tau y^\tau(t), \quad t=\tau_k,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $y\in\mathbb{R}$, $s_\tau\in PC(\Lambda;\mathbb{R})$, $\sigma\in\{-1,+1\}$, $S^{(k)}_\tau\in P(\mathcal{T};\mathbb{R})$, N — натуральное число.

Ограничимся случаем, когда $N=5$, поскольку общий случай существенно не отличается от рассматриваемого ниже. Сначала рассмотрим случай, когда $\sigma=-1$ и введем вспомогательную функцию

$$v(t,y)=y^2+\sum_{s=3}^{5}p_s(t)y^s.$$

Полная производная вспомогательной функции $v(t,y)$ вдоль решений модельного уравнения (5.1) при $t\neq\tau_k$ имеет вид

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(5.1)}=\left(\frac{dp_3}{dt}+2s_2(t)\right)y^3+\left(\frac{dp_4}{dt}+2s_3(t)+3p_3(t)s_2(t)\right)y^4+\left(\frac{dp_5}{dt}+2s_4(t)+\right.$$
$$\left.+3p_3(t)s_3(t)+4p_4(t)s_2(t)\right)y^5+\left(\frac{dp_6}{dt}+2s_5(t)+3p_3(t)s_4(t)+4p_4(t)s_3(t)+\right.$$
$$\left.+5p_5(t)s_2(t)\right)y^6+O(|y|^7). \quad (5.2)$$

Относительно функций $g_\tau(t)$, $\tau=\overline{2,5}$ сделаем дополнительное предположение

Предположение 5.1. Существуют постоянные ψ_τ, $\tau=\overline{3,N+1}$ такие, что функции

$$p_3(t)=\psi_3t-2\int\limits_a^t s_2(s)\,ds,\quad p_4(t)=\psi_4t-\int\limits_a^t\big(2s_3(s)+3p_3(s)s_2(s)\big)\,ds,$$
$$p_5(t)=\psi_5t-\int\limits_a^t\big(2s_4(s)+3p_3(s)s_3(s)+4p_4(s)s_2(s)\big)\,ds,$$
$$p_6(t)=\psi_6t-\int\limits_a^t\big(2s_5(s)+3p_3(s)s_4(s)+4p_4(s)s_3(s)+5p_5(s)s_2(s)\big)\,ds$$

ограничены на интервале $[a,\infty)$. В этом случае, очевидно, что

$$\psi_3=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{t}\int\limits_a^t s_2(s)\,ds,\quad \psi_4=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_a^t\big(2s_3(s)+3p_3(s)s_2(s)\big)\,ds,$$
$$\psi_5=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_a^t\big(2s_4(s)+3p_3(s)s_3(s)+4p_4(s)s_2(s)\big)\,ds,$$
$$\psi_6=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_a^t\big(2s_5(s)+3p_3(s)s_4(s)+4p_4(s)s_3(s)+5p_5(s)s_2(s)\big)\,ds.$$

Из предположения 5.1 следует, что полная производная вспомогательной функции $v(t,y)$ вдоль решений модельного уравнения (5.1) имеет при $t\neq\tau_k$ вид

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(5.1)}=\psi_3y^3+\psi_4y^4+\psi_5y^5+\psi_6y^6+O\left(|y|^7\right). \quad (5.3)$$

Оценим первую разность вспомогательной функции $v(t,y)$ вдоль решений модельного уравнения (5.1) при $t=\tau_k$:

$$v(\tau_k+0,y(\tau_k+0))-v(\tau_k,y(\tau_k))=\Big(-2S_2^{(k)}-2p_3(\tau_k)\Big)y^3+\Big(-2S_3^{(k)}+(S_2^{(k)})^2+$$
$$+2p_3(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)y^4+\Big(-2S_4^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_3^{(k)}-3p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^2-4p_4(\tau_k)S_2^{(k)}-$$
$$-2p_5(\tau_k)\Big)y^5+\Big(-2S_5^{(k)}+(S_3^{(k)})^2+3p_3(\tau_k)S_4^{(k)}-6S_2^{(k)}S_3^{(k)}+$$
$$+(S_2^{(k)})^3-4p_4(\tau_k)S_3^{(k)}+6p_4(\tau_k)(S_2^{(k)})^2+5p_5(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)y^6+O\left(|y|^7\right). \quad (5.4)$$

Теорема о сведении (теорема 3.1) позволяет установить следующие условия асимптотической устойчивости критического состояния равновесия $\zeta=0$ системы (2.1):

$$S_2^{(k)}+p_3(\tau_k)=0,\ \psi_3=0,\ \sup_k\Big(\psi_4(\tau_k-\tau_{k-1})-2S_3^{(k)}+(S_2^{(k)})^2+2p_3(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)<0.$$

В случае дополнительного вырождения

$$\sup_k\Big(\psi_4(\tau_k-\tau_{k-1})-2S_3^{(k)}+(S_2^{(k)})^2+2p_3(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)=0,$$
$$\psi_4=\psi_5=0,\quad -2S_4^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_3^{(k)}-3p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^2-4p_4(\tau_k)S_2^{(k)}-2p_5(\tau_k)=0$$

условие асимптотической устойчивости критического состояния равновесия $\zeta=0$ системы (2.1) имеет вид

$$\sup_k\Big(\psi_6(\tau_k-\tau_{k-1})-2S_5^{(k)}+\big(S_3^{(k)}\big)^2+3p_3(\tau_k)S_4^{(k)}-6S_2^{(k)}S_3^{(k)}+\big(S_2^{(k)}\big)^3-$$
$$-4p_4(\tau_k)S_3^{(k)}+6p_4(\tau_k)\big(S_2^{(k)}\big)^2+5p_5(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)<0.$$

Рассмотрим случай, когда $\sigma=1$. Очевидно, что достаточно вычислить первую разность вспомогательной функции $v(t,y)$ при $t\neq\tau_k$ вдоль решений модельного уравнения (5.1):

$$v(\tau_k+0,y(\tau_k+0))-v(\tau_k,y(\tau_k))=2S_2^{(k)}y^3+\Big(2S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)y^4+\Big(2S_4^{(k)}+$$
$$+2S_2^{(k)}S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^2+4p_4(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)y^5+\Big(2S_5^{(k)}+2S_2^{(k)}S_4^{(k)}+$$
$$+3p_3(\tau_k)S_4^{(k)}+6S_2^{(k)}S_3^{(k)}p_3(\tau_k)+p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^3+4p_4(\tau_k)S_3^{(k)}+6p_4(\tau_k)(S_2^{(k)})^2\Big)y^6+O(|y|^7).$$

Теорема о сведении позволяет установить следующие условия асимптотической устойчивости критического состояния равновесия $\zeta=0$ системы (2.1)

$$S_2^{(k)}=0,\ \psi_3=0,\ \sup_k\Big(\psi_4(\tau_k-\tau_{k-1})-2S_3^{(k)}+(S_2^{(k)})^2+2p_3(\tau_k)S_2^{(k)}\Big)<0.$$

В случае дополнительного вырождения

$$2S_4^{(k)}+2S_2^{(k)}S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^2+4p_4(\tau_k)S_2^{(k)}=0,$$
$$\psi_3=\psi_4=0,\quad 2S_3^{(k)}+3p_3(\tau_k)S_2^{(k)}=0$$

условия асимптотической устойчивости критического состояния равновесия $\zeta = 0$ системы (2.1) имеют вид

$$\sup_k \Big(\psi_6(\tau_k - \tau_{k-1}) + 2S_5^{(k)} + 2S_2^{(k)}S_4^{(k)} + 3p_3(\tau_k)S_4^{(k)} + 6S_2^{(k)}S_3^{(k)}p_3(\tau_k) + \\ + p_3(\tau_k)(S_2^{(k)})^3 + 4p_4(\tau_k)S_3^{(k)} + 6p_4(\tau_k)(S_2^{(k)})^2\Big) < 0.$$

6. Случай одной комплексной критической переменной

Теорема о сведении позволяет свести исследования этого критического случая к исследованию модельного дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \frac{dw}{dt} = i\omega w + \sum_{\nu+\mu=2}^{3} g_{\nu\mu}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu}, \quad t \neq \tau_k, \\ w(t+0) = e^{i\beta}w(t) + \sum_{\nu+\mu=2}^{3} G_{\nu\mu}^{(k)} w^{\nu}(t)(w^*(t))^{\mu}, \quad t = \tau_k, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $w \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, ν, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $g_{\nu\mu} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $G_{\nu\mu}^{(k)} \in P(\mathcal{T};\mathbb{C})$.

Изучим вопрос о существовании вспомогательной функции Ляпунова для модельного уравнения (6.1), ограничиваясь при этом случаем $N = 3$ без дополнительных вырождений.

Рассмотрим нелинейную замену переменных вида

$$\eta = w + \sum_{\nu+\mu=2}^{3} W_{\nu\mu}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu}, \tag{6.2}$$

где $\eta \in \mathbb{C}$, $W_{\nu\mu}(t)$ — кусочно-постоянная функция, приводящая уравнение (6.2) к полунормальной форме

$$\begin{gathered} \frac{d\eta}{dt} = i\omega\eta + \sum_{\nu+\mu=2}^{3} \widetilde{g}_{\nu\mu}(t)\eta^{\nu}(\eta^*)^{\mu} + O(|\eta|^3), \quad t \neq \tau_k, \\ \eta(t+0) = e^{i\beta}\eta(t) + \widetilde{G}_{21}^{(k)}\eta(t)|\eta(t)|^2 + O(|\eta|^3), \qquad t = \tau_k. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Очевидно, что достаточно построить функцию Ляпунова для уравнения (6.3). Рассмотрим функцию

$$v(t,\eta,\eta^*) = |\eta|^2 + \sum_{\nu+\mu=3}^{4} p_{\nu\mu}(t)\eta^{\nu}(\eta^*)^{\mu}, \tag{6.4}$$

где $p_{\nu\mu} \in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $p_{\nu\mu}^*(t) = p_{\mu\nu}(t)$.

Полная производная функции (6.4) вдоль решений уравнения (6.3) при $t \neq \tau_k$ имеет вид

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(6.3)} = \left(\frac{dp_{30}}{dt} + 3i\omega p_{30} + \widetilde{g}_{02}^*(t)\right)\eta^3 + \left(\frac{dp_{21}}{dt} + i\omega p_{21} + \widetilde{g}_{20}(t) + \widetilde{g}_{11}^*(t)\right)\eta^2\eta^* +$$

$$+\left(\frac{dp_{12}}{dt}-i\omega p_{12}+\widetilde{g}_{11}(t)+\widetilde{g}^*_{20}(t)\right)\eta(\eta^*)^2+\left(\frac{dp_{03}}{dt}-3i\omega p_{03}+\widetilde{g}^*_{02}(t)\right)(\eta^*)^3+$$
$$+\left(\frac{dp_{40}}{dt}+4i\omega p_{40}+\widetilde{g}^*_{03}(t)+p_{21}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{20}(t)\right)\eta^4+\left(\frac{dp_{31}}{dt}+2i\omega p_{31}+\widetilde{g}_{30}(t)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{g}^*_{12}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{20}(t)+p_{21}(t)\widetilde{g}^*_{11}(t)+2p_{12}(t)\widetilde{g}^*_{02}(t)\right)\eta^3\eta^*+$$
$$+\left(\frac{dp_{22}}{dt}+\widetilde{g}_{21}(t)+\widetilde{g}^*_{21}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+p_{21}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)+p_{12}(t)\widetilde{g}_{20}(t)+\right.$$
$$\left.+2p_{12}\widetilde{g}^*_{11}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{02}(t)\right)|\eta|^4+\left(\frac{dp_{13}}{dt}-2i\omega p_{13}+\widetilde{g}_{12}(t)+\widetilde{g}^*_{30}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+\right.$$
$$\left.+p_{12}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+2p_{12}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{11}(t)\right)\eta(\eta^*)^3+\left(\frac{dp_{04}}{dt}-4i\omega p_{04}+\widetilde{g}_{03}(t)+\right.$$
$$\left.+p_{12}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)\right)(\eta^*)^4+O\left(\|\eta\|^5\right).$$

Функции $p_{\nu\mu}(t)$, $\nu+\mu=3,4$ выберем так, чтобы при $t\neq\tau_k$ выполнялись равенства

$$\frac{dp_{30}}{dt}+3i\omega p_{30}+\widetilde{g}^*_{02}(t)=0, \tag{6.5}$$
$$\frac{dp_{21}}{dt}+i\omega p_{21}+\widetilde{g}_{20}(t)+\widetilde{g}^*_{11}(t)=0, \tag{6.6}$$
$$\frac{dp_{12}}{dt}-i\omega p_{12}+\widetilde{g}_{11}(t)+\widetilde{g}^*_{20}(t)=0, \tag{6.7}$$
$$\frac{dp_{03}}{dt}-3i\omega p_{03}+\widetilde{g}_{02}(t)=0, \tag{6.8}$$
$$\frac{dp_{40}}{dt}+4i\omega p_{40}+\widetilde{g}^*_{03}(t)+p_{21}(t)\widetilde{g}^*_{02}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{20}(t)=0, \tag{6.9}$$
$$\frac{dp_{31}}{dt}+2i\omega p_{31}+\widetilde{g}_{30}(t)+\widetilde{g}^*_{12}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{20}(t)+$$
$$+p_{21}(t)\widetilde{g}^*_{11}(t)+2p_{12}(t)\widetilde{g}^*_{02}(t)=0, \tag{6.10}$$
$$\frac{dp_{13}}{dt}-2i\omega p_{13}+\widetilde{g}_{12}(t)+\widetilde{g}^*_{30}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+p_{12}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+$$
$$+2p_{12}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{11}(t)=0, \tag{6.11}$$
$$\frac{dp_{04}}{dt}-4i\omega p_{04}+\widetilde{g}_{03}(t)+p_{12}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)=0. \tag{6.12}$$

Тогда полная производная функции $v(t,\eta,\eta^*)$ вдоль решений системы (6.3) принимает вид

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(6.3)}=\left(\frac{dp_{22}}{dt}+\widetilde{g}_{21}(t)+\widetilde{g}^*_{21}(t)+3p_{30}(t)\widetilde{g}_{02}(t)+2p_{21}(t)\widetilde{g}_{11}(t)+p_{21}(t)\widetilde{g}^*_{20}(t)+\right.$$
$$\left.+p_{12}(t)\widetilde{g}_{20}(t)+2p_{12}\widetilde{g}^*_{11}(t)+3p_{03}(t)\widetilde{g}^*_{02}(t)\right)|\eta|^4+o(|\eta|^4). \tag{6.13}$$

Выражение (6.13) называется *нормальной формой* производной функции $v(t,\eta,\eta^*)$.

Для разности вспомогательной функции $v(t,\eta,\eta^*)$ вдоль решений системы (6.3) при $t=\tau_k$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} v(\tau_k+0,\eta(\tau_k+0),\eta^*(\tau_k+0)) - v(\tau_k,\eta(\tau_k),\eta^*(\tau_k)) = \Big(p_{30}(\tau_k+0)e^{3i\beta}-p_{30}(\tau_k)\Big)\eta^3+ \\ +\Big(p_{21}(\tau_k+0)e^{i\beta}-p_{21}(\tau_k)\Big)\eta^2\eta^*+\Big(p_{12}(\tau_k+0)e^{-i\beta}-p_{12}(\tau_k)\Big)\eta(\eta^*)^2+ \\ +\Big(p_{03}(\tau_k+0)e^{-3i\beta}-p_{03}(\tau_k)\Big)(\eta^*)^3+\Big(p_{40}(\tau_k+0)e^{4i\beta}-p_{40}(\tau_k)\Big)\eta^4+ \\ +\Big(p_{31}(\tau_k+0)e^{2i\beta}-p_{31}(\tau_k)\Big)\eta^3\eta^*+\Big(p_{22}(\tau_k+0)-p_{22}(\tau_k)+2\Re G_{21}^{(k)}\Big)|\eta|^4+ \\ +\Big(p_{13}(\tau_k+0)e^{-2i\beta}-p_{13}(\tau_k)\Big)\eta(\eta^*)^3+\Big(p_{04}(\tau_k+0)e^{-4i\beta}-p_{04}(\tau_k)\Big)(\eta^*)^4+o\left(|\eta|^4\right). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Функции $p_{\nu\mu}(t)$, $(\nu,\mu)\neq(2,2)$ при $t=\tau_k$ подчиним условиям

$$p_{\nu\mu}(\tau_k+0)e^{i(\nu-\mu)\beta}-p_{\nu\mu}(\tau_k)=0. \tag{6.15}$$

Тогда полная разность вспомогательной функции $v(t,\eta,\eta^*)$ принимает вид

$$\begin{aligned} v(\tau_k+0,\eta(\tau_k+0),\eta^*(\tau_k+0)) - v(\tau_k,\eta(\tau_k),\eta^*(\tau_k)) = \Big(p_{22}(\tau_k+0)-p_{22}(\tau_k)+ \\ +2\Re G_{21}^{(k)}\Big)|\eta|^4+O(|\eta|^5). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Рассмотрим вопросы о существовании и вычислении функций $p_{\nu\mu}\in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $\nu+\mu=3,4$, $(\nu,\mu)\neq(2,2)$. Уравнения (6.5)–(6.12) и (6.15) можно представить в виде

$$\frac{dp_{\nu\mu}}{dt}+(\nu-\mu)i\omega p_{\nu\mu}(t)=\varpi_{\nu\mu}(t),\quad t\neq\tau_k, \tag{6.17}$$

$$p_{\nu\mu}(t+0)e^{(\nu-\mu)i\beta}-p_{\nu\mu}(t)=0,\quad t=\tau_k, \tag{6.18}$$

где $\varpi_{\nu\mu}\in PC(\Lambda;\mathbb{C})$. Интегрируя уравнение (6.17) на полуинтервале $(\tau_k,\tau_{k+1}]$, получим

$$p_{\nu\mu}(t)=e^{-i(\nu-\mu)\omega(t-\tau_k)}p_{\nu\mu}(\tau_k+0)+\int\limits_{\tau_k}^{t}e^{-i(\nu-\mu)\omega(t-s)}\varpi_{\nu\mu}(s)\,ds,\quad t\in(\tau_k,\tau_{k+1}]. \tag{6.19}$$

Подставляя (6.19) в уравнение (6.18) при $t=\tau_{k+1}$, получим

$$p_{\nu\mu}(\tau_{k+1}+0)=e^{-i(\nu-\mu)(\beta+\omega(\tau_{k+1}-\tau_k))}p_{\nu\mu}(\tau_k+0)+e^{-i(\nu-\mu)\beta}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}e^{-i(\nu-\mu)\omega(\tau_{k+1}-s)}\varpi_{\nu\mu}(s)\,ds. \tag{6.20}$$

Очевидно, что для существования решения $p_{\nu\mu}\in PC(\Lambda;\mathbb{C})$, $(\nu,\mu)\neq(2,2)$ необходимо и достаточно, чтобы разностное уравнение (6.20) для рекуррентной последовательности $\{p_{\nu\mu}(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty}$, $(\nu,\mu)\neq(2,2)$ имело хотя бы одно ограниченное решение, т.е. решение класса $P(\mathcal{T};\mathbb{C})$.

Определение 6.1. Набор (ν,μ), $(\nu,\mu)\neq(2,2)$ для которого разностное уравнение (6.20) имеет ограниченное решение называется *нерезонансным* набором порядка $\nu+\mu-1$.

Определение 6.2. Набор (ν,μ), $(\nu,\mu)\neq(2,2)$ для которого разностное уравнение (6.20) не имеет ограниченных решение называется *резонансным* набором порядка $\nu+\mu-1$.

Замечание. Набор $(2,2)$ называется *тождественно резонансным.*

В дальнейшем предполагаем отсутствие резонансных наборов.

Предположим, что существует постоянная ψ_0 и ограниченная функция $\psi(t)$, $\psi'\in PC(\Lambda;\mathbb{C})$ такие, что

$$\int\limits_0^t\big[\widetilde{g}_{21}(s)+\widetilde{g}^*_{21}(s)+3p_{30}(s)\widetilde{g}_{02}(s)+2p_{21}(s)\widetilde{g}_{11}(s)+p_{21}(s)\widetilde{g}^*_{20}(s)+p_{12}(s)\widetilde{g}_{20}(s)+$$
$$+2p_{12}(s)\widetilde{g}^*_{11}(s)+3p_{03}(s)\widetilde{g}^*_{02}(s)\big]\,ds=2\psi_0t+\psi(t).$$

При этом $\psi_0=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2t}\int\limits_0^t\big[\widetilde{g}_{21}(s)+\widetilde{g}^*_{21}(s)+3p_{30}(s)\widetilde{g}_{02}(s)+2p_{21}(s)\widetilde{g}_{11}(s)+p_{21}(s)\widetilde{g}^*_{20}(s)+$ $+p_{12}(s)\widetilde{g}_{20}(s)+2p_{12}(s)\widetilde{g}^*_{11}(s)+3p_{03}(s)\widetilde{g}^*_{02}(s)\big]\,ds$. Выберем $p_{22}(t)=-\psi(t)$, $p(\tau_k+0)=p(\tau_k)$. В этом случае находим: $\mathcal{V}^{(v)}_k=\Big(2\psi_0(\tau_k-\tau_{k-1})+2\Re G^{(k)}_{21}\Big)|\eta|^4$.

Теорема о сведении (теорема 3.1) позволяет установить следующие достаточные условия асимптотической устойчивости критического состояния равновесия $\zeta=0$ исходной системы (2.1).

Теорема 6.1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (2.1) *такова, что:*

1) *имеет полунормальную форму, в которой отсутствуют нетождественные резонансные мономы;*

2) *отсутствуют резонансные наборы* (ν,μ), $(\nu,\mu)\neq(2,2)$, $\nu+\mu\neq2,3$*;*

3) *существует действительная постоянная* ψ_0 *такая, что функция*

$$\int\limits_0^t\big[\widetilde{g}_{21}(s)+\widetilde{g}^*_{21}(s)+3p_{30}(s)\widetilde{g}_{02}(s)+2p_{21}(s)\widetilde{g}_{11}(s)+$$
$$+p_{21}(s)\widetilde{g}^*_{20}(s)+p_{12}(s)\widetilde{g}_{20}(s)+2p_{12}(s)\widetilde{g}^*_{11}(s)+3p_{03}(s)\widetilde{g}^*_{02}(s)\big]\,ds-2\psi_0t$$

принадлежит классу $PC(\Lambda;\mathbb{C})$*;*

4) *выполняется неравенство:* $\sup\limits_k\Big\{\psi_0(\tau_k-\tau_{k-1})+\Re G^{(k)}_{21}\Big\}<0.$

Тогда критическое положение равновесия $\zeta=0$ *системы* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

7. Заключение

Основные результаты настоящей работы позволяют исследовать устойчивость равновесия в особенных случаях при условии $AB=BA$. Перспективным для дальнейших исследований является развитие методов построения вспомогательных функций Ляпунова, удовлетворяющим теоремам о сведении, для модельных импульсных систем. Кроме того, представляет интерес освобождение от условия $AB = BA$.

Список цитируемых источников

1. *Анашкин О. В., Довжик Т. В., Митько О. В.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 1–8.
2. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием // Динамические системы. — 2011. — Т. 1(29), №1. — С. 5–14.
3. *Анашкин О. В., Митько О. В.* Неустойчивость в системах с импульсным воздействием // Ученые записки ТНУ, серия физ.-мат. науки — 2011. — Т.24(63), №1. — С. 125–131.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
5. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Аналог критического случая Каменкова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Сиб. журн. индустр. матем. — **15**:1. — 2012. — С. 22–33.
6. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости решений нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в одном критическом случае // Нелінійні коливання. — **14**,4. — 2011. — С. 445–467.
7. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях //Сиб. мат. журнал. — **52**,1 — 2011. — С. 70–80.
8. *Каменков Г. В.* Избранные труды, т. I, II. — М.: Наука, 1971.
9. *Красовский Н. Н.* некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.
10. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.
11. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
12. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
13. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.60, №1. — С. 81–94.
14. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.
15. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино. — Изд-во НЦБИ АН СССР. — 1985. — 216 с.
16. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
17. *Черникова О. С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журнал. — 1982. — **34**, 6. — С. 601–607.
18. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A.* Stability of Solutions of Systems with Impulse Effect // In:Progress in Nonlinear Analisys Research. — Nova Science Publishers, Inc. — 2009. — P. 363–389.
19. *Lakshmikantham V.,Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of Impulsive Differential Equations — Singapore: World Scientific, 1989.
20. *Liu X., Williams D.* Stability analisis and applications to large scale impulsive systems: a new approach // Canadian Applied Mathematics Quarterly. — Vol. 3, no.4 — 1985. — P. 419–444.

Получена 20.06.2012