

УДК 534

Дослідження поведінки нелінійних дисипативних систем з двома степенями свободи в околі внутрішнього резонансу

К. Ю. Плаксій, Ю. В. Міхлін

Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»,
Харків. E-mail: muv@kpi.kharkov.ua

Анотація. Для двох нелінійних пружних систем показано, що застосування методики зведення до редукованої системи відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків, а також використання концепції нелінійних нормальних форм коливань, дозволяє детально дослідити динаміку таких систем в околі внутрішнього резонансу.

Ключові слова: внутрішній резонанс, нелінійні нормальні форми коливань, локалізація енергії.

Вступ

Дослідження динаміки коливальних систем поблизу внутрішнього резонансу є важливим етапом розв'язання багатьох сучасних теоретичних та прикладних задач, зокрема, задач віброгасіння коливань, адже саме поблизу резонансу може відбуватися перекачка енергії [4,9] з основної системи, коливання якої треба загасити, у віброгасник [3]. Разом з можливістю виникнення енергообміну в системі постає також питання про можливість локалізації основної частини енергії в одній з підсистем [9,6,10]. Подібна локалізація може виявитись як корисною (наприклад, для віброгасіння коливань), так і шкідливою, тобто такою, що може призвести до руйнування конструкції. Наявність внутрішнього резонансу може призводити до втрати стійкості періодичного режиму [2] і виникнення (біфуркації) нових режимів коливань системи. Окрім цього, у реальних системах з дисипацією енергії власні частоти коливань змінюються у часі, що може підвести систему до режиму внутрішнього резонансу, а також вивести її з резонансного режиму. У зв'язку з цим дослідження перехідних процесів в подібних задачах нелінійної динаміки має велике значення.

У даній роботі представлено дослідження поведінки двох нелінійних пружних систем в околі внутрішнього резонансу з використанням методики зведення до редукованої системи відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз, а також з використанням концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга [1,8,10]. Відомо, що такі нелінійні нормальні форми визначено для консервативних систем, але у випадку дисипації енергії можна розглядати подібні рухи з урахуванням експоненційного згасання амплітуд. Такі рухи вже не будуть нелінійними нормальними формами відповідно до концепції

Каудерера-Розенберга, але вони виступають важливими та зручними частинними розв'язками для дослідження динаміки систем. Також у роботі наводяться результати чисельних та чисельно-аналітичних експериментів на ПЕОМ, реалізованих мовою C++, для розв'язків систем та їх стійкості в околі внутрішнього резонансу.

1. Динаміка нелінійної пружинно-масової системи

Для пружинно-масової системи, що зображена на рис. 1, представимо рівняння руху у вигляді:

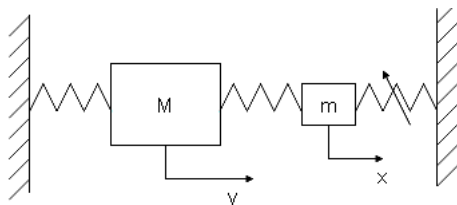


Рис. 1. Пружинно-масова система

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x} + \varepsilon k_x x + \varepsilon^2 q x^3 + \varepsilon 2\eta_x \dot{x} &= \varepsilon \gamma_1 y, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y + \varepsilon k_y y + \varepsilon 2\eta_y \dot{y} &= \varepsilon k_y x, \end{aligned} \quad (1)$$

де позначено $k_x = \frac{\alpha + \gamma}{m}$, $q = \frac{\beta}{m}$, $\gamma_1 = \frac{\gamma}{m}$, $2\eta_x = \frac{l_1}{m}$, $\omega_y = \frac{k}{\sqrt{M}}$, $k_y = \frac{\gamma}{M}$, $2\eta_y = \frac{l_2}{M}$, а малий параметр ε введено у припущенні малості деяких параметрів системи.

У даній системі за умов відсутності дисипації можна виділити дві нелінійні нормальні форми: нелокалізовану форму зв'язаних коливань, коли значні коливання більшої маси збурюють коливання меншої, та нелінійну нормальну форму значних коливань меншої маси, коли коливання великої маси є слабкими, яка є локалізованою формою коливань [1,7].

Застосуємо до системи (1) метод багатьох масштабів [3] із введенням розладу $\omega_x^2 - \omega_y^2 = \varepsilon \Delta$ та розкладенням координат та часу в асимптотичні ряди у вигляді: $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$, $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$, $T = T_0 + T_1 + \dots = t + \varepsilon t + \dots$. Підставляючи дані розкладення у систему (1), отримуємо системи диференціальних рівнянь у частинних похідних для першого та другого наближень відповідно:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + \omega_y^2 y_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + 2\eta_x \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + (\eta_x^2 + \omega_y^2) x_0 = \gamma_1 y_0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + \omega_y^2 y_1 = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_1 \partial T_0} - 2\eta_y \frac{\partial y_0}{\partial T_0} + k_y (x_0 - y_0), \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2\eta_x \frac{\partial x_1}{\partial T_0} + (\eta_x^2 + \omega_y^2) x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\eta_x \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - q x_0^3 + \gamma_1 y_1 - \Delta x_0. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язок системи (2), що є першим наближенням розв'язків системи (1), запишеться у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0(T_1) e^{i\omega_y T_0} + \bar{A}_0(T_1) e^{-i\omega_y T_0}, \\ x_0 &= e^{-\eta_x T_0} (B_0(T_1) e^{i\omega_y T_0} + \bar{B}_0(T_1) e^{-i\omega_y T_0}) + C_1(T_1) e^{i\omega_y T_0} + \bar{C}_1(T_1) e^{-i\omega_y T_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$C_1(T_1) = \frac{\gamma_1 A_0(T_1)(\eta_x^2 + \varepsilon\Delta - 2i\eta_x\omega_y)}{(\eta_x^2 + \varepsilon\Delta)^2 + 4\eta_x^2\omega_y^2}.$$

Використання системи рівнянь для системи наступного наближення (3) приводить до системи нелінійних диференціальних рівнянь для виключення появи вікових членів у розв'язках:

$$\begin{cases} -iR\frac{\partial A_0}{\partial T_1} - iLA_0 + TA_0 = 0, \\ -iF\frac{\partial B_0}{\partial T_1} - QA_0\bar{A}_0B_0 + PB_0 + iDB_0 - I\bar{B}_0A_0^2 + iE\bar{B}_0A_0^2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де позначено $R = 2\omega_y N$, $L = 2(\eta_y\omega_y N + k_y\gamma_1\eta_x\omega_y)$, $S = k_y(\gamma_1(\eta_x^2 + \varepsilon\Delta) - N)$, $N = (\eta_x^2 + \varepsilon\Delta)^2 + 4\eta_x^2\omega_y^2$, $F = 2\omega_x N^2 W$, $Q = 6q\gamma_1^2 N W$, $P = N^2(k_y\gamma_1\eta_x^2 - \Delta W)$, $D = 2\omega_y\eta_x\gamma_1 k_y N^2$, $I = 3q\gamma_1^2 W((\eta_x^2 + \varepsilon\Delta)^2 - 4\eta_x^2\omega_y^2)$, $E = 12q\gamma_1^2 W\eta_x\omega_y(\eta_x^2 + \varepsilon\Delta)$, $W = \eta_x^4 + 4\omega_y^2\eta_x^2$.

Введення стандартної заміни $A_0 = a_y e^{ib_y}$, $B_0 = a_x e^{ib_x}$ в системі (5) приводить її до наступної системи модуляційних рівнянь відносно амплітуд та фаз:

$$\begin{cases} a'_y(T_1) = -\frac{L}{R}a_y, \\ b'_y(T_1) = -\frac{S}{R}, \\ a'_x(T_1) = \frac{D}{F}a_x - a_x a_y^2 \left(\frac{I}{F} \sin(2\varphi) - \frac{E}{F} \cos(2\varphi) \right), \\ b'_x(T_1) = -\frac{P}{F} + a_y^2 \left(\frac{Q}{F} + \frac{I}{F} \cos(2\varphi) + \frac{E}{F} \sin(2\varphi) \right), \end{cases} \quad (6)$$

де $\varphi = b_y - b_x$. Перше наближення (4) розв'язку системи (1) запишеться у нових змінних у вигляді:

$$\begin{aligned} y_0 &= 2a_y \cos(b_y + \omega_y t), \\ x_0 &= 2a_x e^{-\eta_x t} \cos(b_x + \omega_y t) + 2\frac{\gamma_1}{N} a_y [(\eta_x^2 + \varepsilon\Delta) \cos(b_y + \omega_y t) + 2\eta_x\omega_y \sin(b_y + \omega_y t)]. \end{aligned}$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь відносно амплітуд та фаз (6), щоб дослідити рух системи (1) в околі внутрішнього резонансу. Введемо заміну змінних у системі (6) $a_x = K \sin \psi$, $a_y = K \cos \psi$, яка приведе її до наступної редукованої системи:

$$\begin{cases} K' = \left(-\frac{L}{R} \cos^2 \psi + \frac{D}{F} \sin^2 \psi \right) K - K^3 \cos^2 \psi \sin^2 \psi \left[\frac{I}{F} \sin(2\varphi) - \frac{E}{F} \cos(2\varphi) \right], \\ \psi' = \left(\frac{L}{R} + \frac{D}{F} \right) \cos \psi \sin \psi - K^2 \sin \psi \cos^3 \psi \left[\frac{I}{F} \sin(2\varphi) - \frac{E}{F} \cos(2\varphi) \right], \\ \varphi' = -\frac{S}{R} + \frac{P}{F} - K^2 \cos^2 \psi \left[\frac{Q}{F} + \frac{I}{F} \cos(2\varphi) + \frac{E}{F} \sin(2\varphi) \right], \end{cases} \quad (7)$$

де K — повна енергія редукованої системи.

Проаналізуємо друге та третє рівняння отриманої системи (7) на їхні рівноважні розв'язки як функції параметрів системи, розладу Δ та енергії K . Саме такі рівноважні розв'язки редукованої системи (7), коли постійними є арктангенс відношення амплітуд ψ та різниця фаз φ розв'язків початкової коливальної системи, що розглядається, відповідають нелінійним нормальним формам системи (так званим «коливанням в унісон», коли координати та їх швидкості одночасно досягають своїх максимумів) [1,8,10].

Положення рівноваги для другого рівняння системи (7) вимагає $\sin \psi = 0$, або $\cos \psi = 0$. Зазначимо, що $\sin \psi = 0$ відповідає руху системи, еквівалентному нелокалізованій нелінійній нормальній формі коливань $x = x(t)$, $y = y(t)$ за умови відсутності дисипації, а $\cos \psi = 0$ — відповідає руху системи, що еквівалентний до локалізованої нелінійної нормальної форми коливань $x = x(t)$, $y \equiv 0$ за умови відсутності дисипації.

Розглянемо положення рівноваги, що відповідає формі зв'язаних коливань $\sin \psi = 0$. За таких умов положення рівноваги для третього рівняння системи (7)

вимагає $\sin(2\varphi + \alpha) = \frac{-\frac{S}{R} + \frac{P}{F} - K^2 \frac{Q}{F}}{K^2 \sqrt{I^2 + E^2}}$, де $\alpha = \arctg \frac{I}{E}$. Це положення рівноваги

існує в області параметрів $-\frac{S}{R} + \frac{P}{F} = 0$ та $-1 \leq \frac{-Q}{\sqrt{I^2 + E^2}}$, оскільки $Q > 0$, і зна-

ходиться на прямій $\psi = 0$. Йому відповідає рівняння відносно енергії $K' = -\frac{L}{R}K$, тобто енергія цієї стаціонарної точки зменшується, а це означає, що дане положення є нестійким фокусом.

Розглянемо тепер положення, що відповідає локалізованій формі $\cos \psi = 0$. За цих умов положення рівноваги для третього рівняння системи (7) вимагає $-\frac{S}{R} + \frac{P}{F} = 0$.

У цій області параметрів існує безкінечна множина точок рівноваги, яким відповідає пряма $\psi = \frac{\pi}{2}$. Даному положенню відповідає рівняння відносно енергії

$K' = \frac{D}{F}K$, тобто енергія цієї стаціонарної точки збільшується, а це означає, що ця точка притягує до себе траєкторії і дане положення рівноваги є стійким фокусом.

Слід зауважити, що рухів, еквівалентних до нових нелінійних нормальних форм, в околі внутрішнього резонансу не виявлено, адже для другого та третього рівнянь системи (7) не існує жодних інших положень рівноваги, які відповідали б іншим нелінійним нормальним формам. Тобто, в даній системі за умови резонансу біфуркацій не виникає.

Для моделювання отриманих результатів проінтегруємо чисельно редуковану систему (7) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком $h = 0,01c$, змінюючи початкові умови в області $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$, при $m = 0,3$, $M = 5$, $\alpha = \frac{l_1^2}{4m} + \frac{k^2 m}{M} + \varepsilon m \Delta - \gamma$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $k = 2$, $l_1 = 0,5$, $l_2 = 0,5$, $\alpha = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$ та $\Delta = 0,01$.

Побудована залежність $\varphi(\psi)$ представлена на рис. 2.

На рис. 2 пряма $\psi = 0$ відповідає формі зв'язаних коливань, а пряма $\psi = \frac{\pi}{2}$ — формі коливань, коли енергія локалізується на координаті x . Траєкторії на рис. 2 віддаляються від прямої $\psi = 0$ і навпаки наближуються до прямої $\psi = \frac{\pi}{2}$. Тобто, як враховуючи попередні аналітичні результати, так і за характером траєкторій, можна зробити висновок, що в околі внутрішнього резонансу форма зв'язаних коливань втрачає стійкість, а локалізована форма залишається стійкою. Отже, в режимі внутрішнього резонансу відбувається перехід від зв'язаних коливань до локалізованих по координаті x .

Можна зробити висновок, що стійкість форм в околі резонансу не залежить від вибору параметрів системи та початкових умов.

Для ілюстрації отриманих результатів проінтегруємо також систему (4) чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $t \in [0, 50]$ з кроком $h = 0,01$ с при початкових умовах $a_x(0) = 0,1$, $a_y(0) = 0,01$, $b_x(0) = 0$, $b_y(0) = 0$ та при $m = 0,3$, $M = 5$, $\alpha = \frac{l_1^2}{4m} + \frac{k^2 m}{M} + \varepsilon m \Delta - \gamma$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $k = 2$, $l_1 = 0,05$, $l_2 = 0,05$, $\varepsilon = 0,001$ та $\Delta = 0,01$. Зазначимо, що цей вибір параметрів, як і у попередньому числовому розрахунку, відповідає умовам наявності внутрішнього резонансу в системі.

Побудуємо залежність координат у конфігураційному просторі, яку представлено на рис. 3. За характером залежності $y(x)$ на рис. 3 можна зробити висновок, що виокремлений рух системи, який відповідає нелінійній нормальній формі коливань $x = x(t)$, $y \equiv 0$, коли енергія системи локалізується на координаті x , є стійким, оскільки амплітуди коливань по координаті y залишаються набагато меншими ніж амплітуди по координаті x .

Розглянемо більш детально перехідний процес. Для системи (1) за допомогою

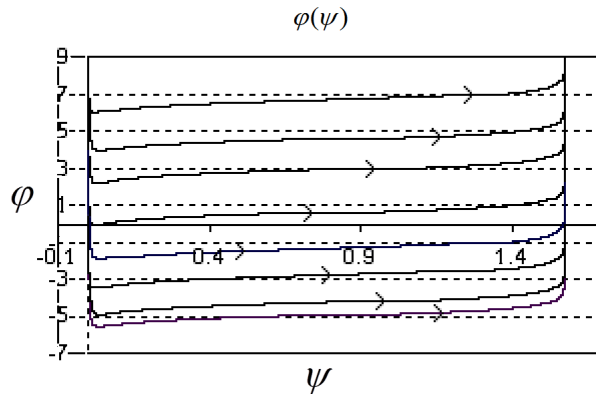


Рис. 2. Залежність $\varphi(\psi)$

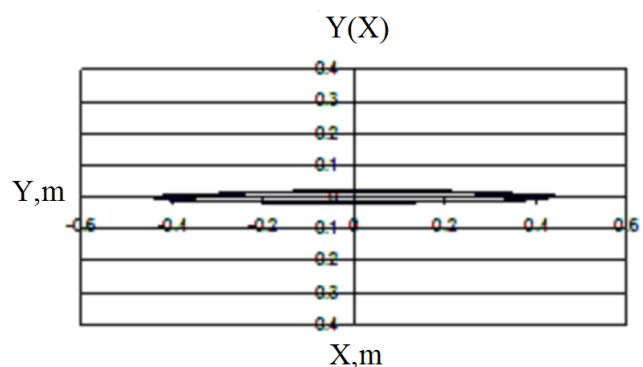


Рис. 3. Залежність $y(x)$

методу багатьох масштабів при розкладенні координат та часу в асимптотичні ряди виду $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$, $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$, $T = T_0 + T_1 + \dots = t + \varepsilon t + \dots$ були отримані перші наближення розв'язків з використанням вікових рівнянь для других наближень:

$$\begin{cases} y_0 = 2C_{ay}e^{-\varepsilon\frac{L}{R}t} \cos(\omega_y t - \varepsilon\frac{S}{R}t + C_{by}) \\ x_0 = 2C_{ax}e^{(-\eta_x + \varepsilon\frac{D}{F})t} \cos(\omega_x t - \frac{QR}{2FL}e^{-2\varepsilon\frac{L}{R}t} - \varepsilon\frac{P}{F}t + C_{bx}) + 2\frac{\gamma_1}{N}C_a e^{-\varepsilon\frac{L}{R}t} \times \\ \times [(k_x - \omega_y^2) \cos(\omega_y t - \varepsilon\frac{S}{R}t + C_{by}) + 2\eta_x \omega_y \sin(\omega_y t - \varepsilon\frac{S}{R}t + C_{by})], \end{cases} \quad (8)$$

де позначено $\omega_x = \sqrt{k_x - \eta_x^2}$, $R = 2\omega_y N$, $L = 2(\eta_y \omega_y N + k_y \gamma_1 \eta_x \omega_y)$, $S = k_y(\gamma_1(k_x - \omega_y^2) - N)$, $N = (k_x - \omega_y^2)^2 + 4\eta_x^2 \omega_y^2$, $F = 2\omega_x N W$, $Q = 6q\gamma_1^2 C_{ay}^2 W$, $P = k_y \gamma_1 N(\eta_x^2 - \omega_x^2 + \omega_y^2)$, $D = 2\omega_x \eta_x \gamma_1 k_y N$, $W = (\eta_x^2 - \omega_x^2 + \omega_y^2)^2 + 4\omega_x^2 \eta_x^2$, а C_{ay} , C_{by} , C_{ax} , C_{bx} — константи, що можуть бути виражені із початкових умов.

Для аналізу отриманих аналітичних розв'язків (8) були виокремлені власні частоти коливань системи. Таким чином, власна частота розв'язку для $y_0(t)$ як функція параметрів системи буде такою: $\Omega_y = \omega_y - \varepsilon\frac{S}{R}$.

Для розв'язку $x_0(t)$ залежність для власної частоти виділимо з другого виразу (8), для чого розкладемо $e^{-2\varepsilon\frac{L}{R}t}$ у степеневий ряд у припущенні, що $2\varepsilon\frac{L}{R}t < 1$. У розкладенні будемо враховувати члени порядку $O(\varepsilon^2)$.

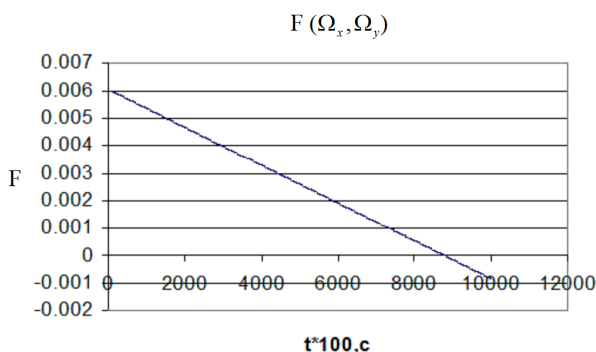


Рис. 4. Залежність $F(\Omega_x, \Omega_y)$ від часу

За таких умов отримуємо: $\Omega_x = \omega_x - \frac{\varepsilon Q}{F}(-1 + \varepsilon\frac{L}{R}t) - \varepsilon\frac{P}{F}$, тобто власна частота для розв'язку $x_0(t)$ залежить не тільки від параметрів системи (1), а й від часу t . Очевидно, з плином часу частота Ω_x зменшується. Таким чином, якщо у початковий момент часу частота Ω_y буде меншою за частоту Ω_x , то при деякому значенні часу $t_r > t_0$ частоти можуть стати достатньо близькими, тобто в деякому околі t_r можна вважати, що система знаходиться в околі внутрішнього резонансу пружинно-масової системи.

Для ілюстрації поведінки частот

введемо функцію різниці:

$$F(\Omega_x, \Omega_y) = \omega_x - \frac{\varepsilon Q}{F}(-1 + \varepsilon\frac{L}{R}t) - \varepsilon\frac{P}{F} - \omega_y + \varepsilon\frac{S}{R}. \quad (9)$$

На рис. 4 представлена залежність функції різниці (9) від часу, побудована при значенні параметрів системи $m = 1, 83$, $M = 5$, $\alpha = 3, 5$, $\beta = 7$, $\gamma = 4$, $k = 4, 5$, $l_1 = 0, 99$, $l_2 = 0, 8$, $\varepsilon = 0, 01$ та $C_{ay} = 0, 25$ на інтервалі $t \in [0, 100]$ с, що вдовольняє

умові збігу розкладення для $e^{-2\varepsilon\frac{L}{R}t}$. Бачимо, що при значенні $t_r = 89$ с, частоти стають рівними, тобто поблизу цього значення часу система перебуває в режимі внутрішнього резонансу.

Проілюструємо дану ситуацію на прикладі зв'язаних коливань системи. На рис. 5 представлена аналітична залежність отриманих розв'язків (8) у конфігураційному просторі, побудована при $m = 1,83$, $M = 5$, $\alpha = 3,5$, $\beta = 7$, $\gamma = 4$, $k = 4,5$, $l_1 = 0,99$, $l_2 = 0,8$, $\varepsilon = 0,01$ та $C_{ax} = 0,1$, $C_{bx} = 0$, $C_{ay} = 0,25$, $C_{by} = 0$.

З характеру залежності $y(x)$ на рис. 5 можна зробити висновки, що виокремлений рух системи, який відповідає нелінійній нормальній формі зв'язаних нелокалізованих коливань ($x = x(t)$, $y = y(t)$) при малих відхиленнях по координаті x є нестійким.

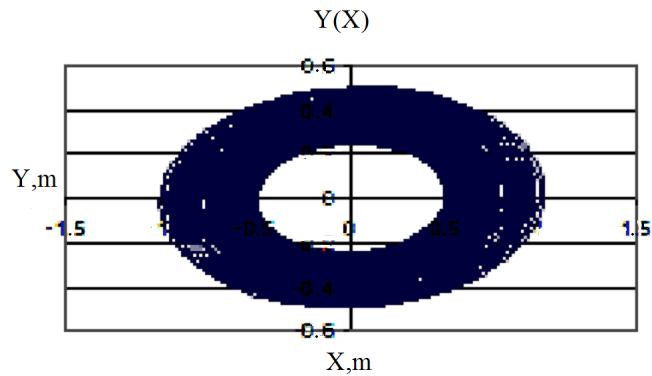


Рис. 5. Траєкторія $y(x)$ для форми зв'язаних коливань

Таким чином, для стійких рухів очікуваною є траєкторія у конфігураційному просторі, що є близькою до прямої. Зауважимо, що значну роль у викривленні траєкторії у конфігураційному просторі на рис. 5 відіграє не стільки кубічна нелінійність у рівняннях (1), скільки наявність тертя у системі, що порушує синфазність коливань у зв'язаній формі.

Розглядаючи сукупно рис. 3 та рис. 5 можна помітити наступне: якщо для траєкторії зв'язаних коливань на рис. 5 задати малий окіл скінченного радіуса з центром на початку координат, то з плином часу, очевидно, амплітуди по координаті y потрапляють у заданий окіл і ними можна буде знехтувати у той час, як амплітуди по координаті x ще не потрапляють у заданий окіл. Ця ситуація цілком відповідає рис. 3, де амплітуди по y суттєво менші за амплітуди по x , тобто поступово відбувається перехід від зв'язаних коливань до локалізованих, який саме дає дослідження за редукованою системою.

Отже, достовірність результатів аналітичного дослідження динаміки системи за допомогою методики зведення до редукованої системи (7) цілком підтверджується результатами чисельно-аналітичних експериментів, що приведені на рис. 5 для рухів, відповідних формі зв'язаних коливань, та на рис. 3 для рухів, що відповідають локалізованій формі коливань. Це дозволяє достовірно описати процеси, що відбуваються в околі внутрішнього резонансу, зокрема стійкість виділених рухів.

2. Динаміка пружинно-маятникової системи

Розглянемо тепер пружинно-маятникову систему, зображену на рис. 6, рівняння руху якої є такими:

$$\begin{cases} \ddot{x} + p^2x + 2\varepsilon\eta_x\dot{x} - \alpha(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\varepsilon\eta_\theta\dot{\theta} + \sin\theta - \ddot{x}\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

де позначено $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $p = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, $\alpha = m/(m+M)$, $\tau = \omega_2 t$.

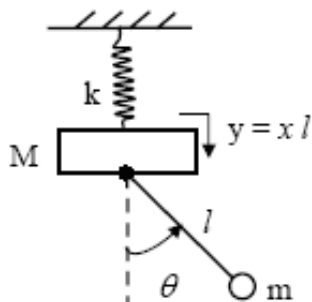


Рис. 6. Пружинно-маятникова система

У системі (10) існують дві нелінійні нормальні форми коливань: суто вертикальні коливання — так звана пружинна мода, або x -форма ($x = x(t)$, $\theta = 0$), що є локалізованою [3,6], та маятникова форма, або θ -форма, коли змінюються і вертикальна, і кутова координати ($x = x(t)$, $\theta = \theta(t)$), її яка є нелокалізованою.

Щоб дослідити поведінку системи в околі головного параметричного резонансу, застосуємо методику зведення до редукованої системи, для чого покладемо $p^2 - 4 + 4\varepsilon^2\eta_\theta^2 - \varepsilon^2\eta_x^2 = \varepsilon\Delta$ у першому рівнянні системи (10). Після введення масштабування координат $x \rightarrow \varepsilon x$, $\theta \rightarrow \varepsilon\theta$ будемо шукати розв'язки у формі асимптотичних розкладень з точністю до членів порядку $O(\varepsilon^2)$: $\varepsilon x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1$, $\varepsilon\theta = \varepsilon\theta_0 + \varepsilon^2\theta_1$ та при масштабах часу $T = T_0 + T_1 + T_2 = \tau + \varepsilon\tau + \varepsilon^2\tau$. Підставимо ці розкладення у рівняння коливань (10), враховуючи, що для малих коливань можна замінити $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ з точністю до $o(\theta^2)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + 4x_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 4x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 + \alpha \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 - 2\eta_x \frac{\partial x_0}{\partial T_0} - x_0 \Delta, \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 = -2\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 - 2\eta_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0}. \end{cases} \quad (12)$$

Розв'язок системи (11), який є першим наближенням розв'язків системи (10), запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_x(T_1)e^{2iT_0} + \bar{A}_x(T_1)e^{-2iT_0}, \\ \theta_0 &= A_\theta(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}_\theta(T_1)e^{-iT_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підстановка залежностей (13) у систему рівнянь для відшукування других наближень (12) приводить до системи нелінійних рівнянь для виключення вікових членів у правих частинах:

$$\begin{cases} 4i \frac{\partial A_x}{\partial T_1} + 2\alpha A_\theta^2 + A_x \Delta + 4i\eta_x A_x = 0, \\ 2i \frac{\partial A_\theta}{\partial T_1} + 4A_x \bar{A}_\theta + 2i\eta_\theta A_\theta = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Покладаючи в (14) $A_x = a_x e^{i\beta_x}$, $A_\theta = a_\theta e^{i\beta_\theta}$, отримаємо систему модуляційних рівнянь відносно амплітуд та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} a'_x = \frac{\alpha}{2} a_\theta^2 \sin \varphi - \eta_x a_x, \\ a'_\theta = -2a_x a_\theta \sin \varphi - \eta_\theta a_\theta, \\ \beta'_x = \frac{\alpha}{2} \frac{a_\theta^2}{a_x} \cos \varphi + \frac{\Delta}{4}, \\ \beta'_\theta = 2a_x \cos \varphi, \end{cases} \quad (15)$$

де $\varphi = \beta_x - 2\beta_\theta$.

У системі (15) введемо заміну змінних $a_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} R \cos \psi$, $a_\theta = R \sin \psi$ та отримуємо редуковану систему відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз:

$$\begin{cases} R' = -R(\eta_x \cos^2 \psi + \eta_\theta \sin^2 \psi), \\ \psi' = R \sin \psi (-\sqrt{\alpha} \sin \varphi + (\eta_x - \eta_\theta) \cos \psi), \\ \varphi' = (\sqrt{\alpha} R \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - 2\sqrt{\alpha} R \cos \psi) \cos \varphi + \frac{\Delta}{4}. \end{cases} \quad (16)$$

Проаналізуємо друге та третє рівняння отриманої системи (16) на їх рівноважні розв'язки як функції параметрів Δ , α та повної енергії редукованої системи R . Положення рівноваги для другого рівняння (16) вимагає, що або $\sin \psi = 0$, або $\sin \varphi = \frac{\eta_x - \eta_\theta}{\sqrt{\alpha}} \cos \psi$. Зазначимо, що $\sin \psi = 0$ відповідає вертикальній формі коливань.

З третього рівняння системи (16) отримуємо $\cos \psi = \frac{\frac{\Delta}{4} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{16} + 3\alpha R^2 \cos^2 \varphi}}{3R \cos \varphi \sqrt{\alpha}}$.

Очевидно, що за таких умов $\psi = \psi(R)$, тобто цей параметр не буде постійною величиною, і задовольнити умові $\psi' = 0$ не вдається. З огляду на це рухи системи, що відповідають даним положенням рівноваги, що рухаються, не можна визначити як нелінійні нормальні форми у повній мірі, але вони є еквівалентні до відповідних нелінійних нормальних форм зв'язаних коливань за відсутності демпфування у системі (10).

При $\eta_x \equiv \eta_\theta$ маємо $\sin \varphi = 0$. Перше положення рівноваги, яке назвемо P , визначається умовами $\sin \varphi = 0$ та $\cos \psi = \frac{\frac{\Delta}{4} + \sqrt{\frac{\Delta^2}{16} + 3\alpha R^2}}{3R\sqrt{\alpha}}$ з третього рівняння (16). Воно існує лише в області параметрів $\frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R} \leq 1$, тому $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Інше положення рівноваги, яке назвемо Q , визначається умовами $\sin \varphi = 0$ та $\cos \psi = \frac{\frac{\Delta}{4} - \sqrt{\frac{\Delta^2}{16} + 3\alpha R^2}}{3R\sqrt{\alpha}}$ з третього рівняння (16). Воно існує лише в області параметрів $-1 \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R}$. Зазначимо, що при $\frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R} < 1$ існує тільки положення рівноваги P ; при $-1 < \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R}$ існує тільки положення рівноваги Q , а при $-1 \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R} \leq 1$ існують обидва положення.

Змоделюємо вказані положення рівноваги, для чого проінтегруємо чисельно систему (16) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком $h = 0,01$ с, змінюючи початкові умови в області $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi(0) \leq \pi$, при $R(0) = 0,9$, $\Delta = 0,12$, $\alpha = 0,1$, $\eta_x = \eta_\theta = 0,01$. Результати експерименту представлені на рис. 7.

Положення P і Q зміщуються з плином часу уздовж прямих $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$. Саме ці прямі відповідають зв'язаним коливанням системи (10) в околі резонансу. Окрім того, при $\eta_x \equiv \eta_\theta$ очевидно, що енергія системи R зменшується з часом, що суттєво впливає на умови існування положень, що розглядаються. При фіксованому значенні розладу Δ маємо наступне: при замалих початкових значеннях енергії ми можемо потрапити в область існування лише одного положення рівноваги, тобто біфуркація не відбувається, або ж, потрапляючи в область, де існують обидва положення (обидві форми зв'язаних коливань), з часом ми перейдемо до області, де існує тільки одне положення рівноваги, тобто при значеннях енергії, коли $\left| \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}R} \right| > 1$, біфуркація зникає. На рис. 7 перехід траєкторії від нижнього положення до верхнього відповідає саме моменту, коли нижнє положення вже перестає існувати, тоді як верхнє все ж продовжує існувати.

З характеру траєкторій на рис. 7 можна зробити наступний висновок: траєкторії з плином часу залишаються поблизу положень P і Q , здійснюючи спірально-подібні рухи навколо прямих $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$, і не залишаються поблизу прямої

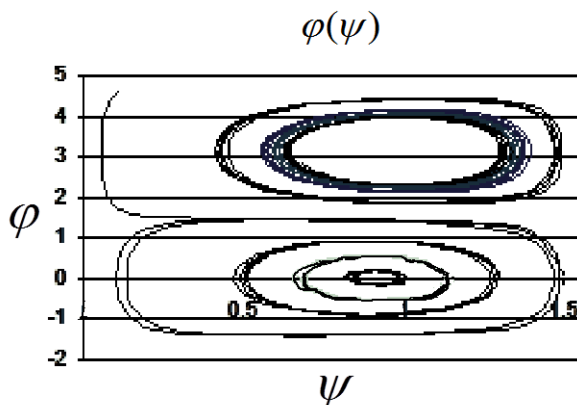


Рис. 7. Положення рівноваги P і Q

$\psi = 0$, яка відповідає вертикальним коливанням системи. Тобто зв'язані коливання системи можна вважати стійкими в околі резонансу в області, де відбувається біфуркація, тоді як вертикальні втрачають стійкість.

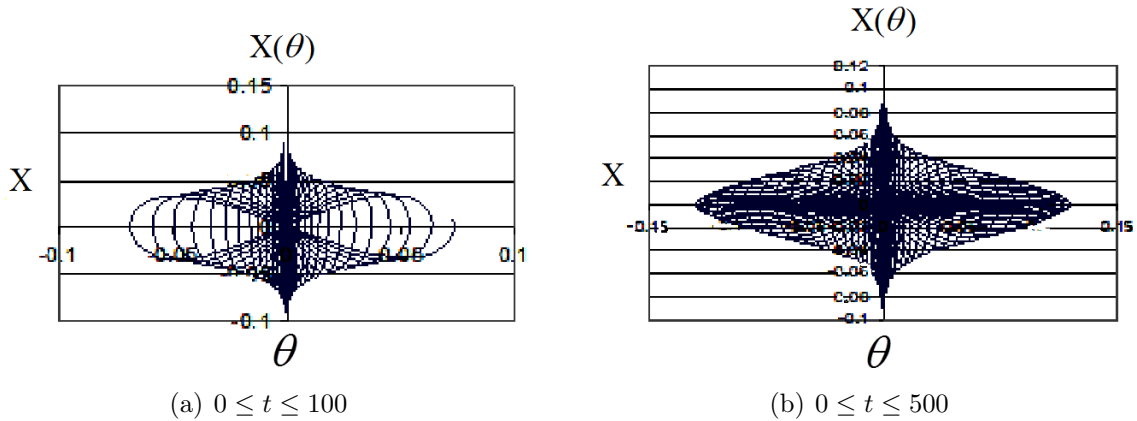


Рис. 8. Залежність $x(\theta)$

Поведінку системи в області, де є біфуркація, ілюструє залежність у конфігураційному просторі на рис. 8, отримана чисельно при інтегруванні системи (10) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $t \in [0, 100]c$ та $t \in [0, 500]c$ з кроком $h = 0,01c$ при початкових умовах $\theta(0) = 0,001$, $x(0) = 0,09$, $\dot{x}(0) = 0,03$, $\dot{\theta}(0) = 0,0002$ та при $\alpha = 0,1$, $p = 2, \eta_x = \eta_\theta = 0,01$. На рис. 8 бачимо втрату стійкості вертикальної форми коливань та перехід до обох форм зв'язаних коливань.

Змоделюємо тепер ситуацію, коли існує лише одне з положень рівноваги, для чого проінтегруємо чисельно систему (16) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком $h = 0,01c$, змінюючи початкові умови в області $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi(0) \leq \pi$, при $R(0) = 0,37$, $\Delta = 0,5$, $\alpha = 0,1$, $\eta_x = \eta_\theta = 0,01$. Результати моделювання представлені на рис. 9.

З характеру траєкторій на рис. 9 можна зробити наступний висновок: траєкторії з плином часу наближаються до вертикалі $\psi = 0$, яка відповідає суто вертикальним коливанням системи (10) та віддаляються від положення прямої $\varphi = \pi$, тобто від положення P по спіралеподібним траєкторіям. Тобто в області, де не відбувається біфуркації, зв'язані коливання системи можна вважати нестійкими, тоді як вертикальні залишаються стійкими.

Продемонструємо це за допомогою чисельно-аналітичного експерименту, для чого проінтегруємо систему (15) відносно амплітуд та фаз чисельно методом

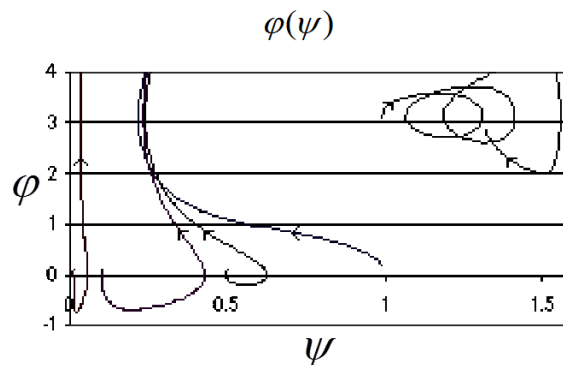


Рис. 9. Положення рівноваги P

Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $t \in [0, 150]с$ з кроком $h = 0,01с$ при початкових умовах $a_x(0) = 0,02$, $a_\theta(0) = 0,002$, $\beta_x(0) = 0,01$, $\beta_\theta(0) = 0,01$ та при $\alpha = 0,1$, $\eta_x = \eta_\theta = 0,01$, $\Delta = 0,05$. Розв'язок (13) є першим наближенням шуканих розв'язків системи (10) і запишеться через нові змінні як $x = 2a_x \cos(\beta_x + 2\tau)$, $\theta = 2a_\theta \cos(\beta_\theta + \tau)$. Побудована залежність у конфігураційному просторі представлена на рис. 10.

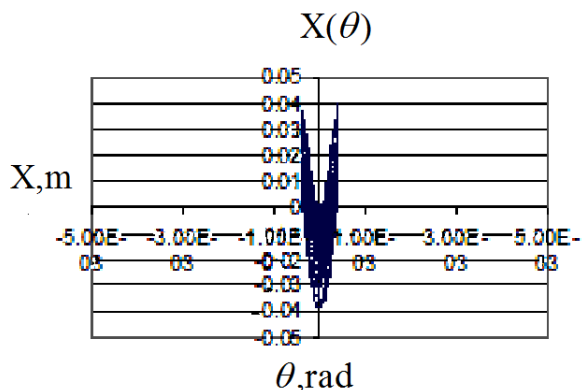


Рис. 10. Залежність $x(\theta)$

ми, як у випадку пружинно-масової системи (1), оскільки перше рівняння системи (16), що описує еволюцію енергії системи, містить лише члени, зумовлені наявністю дисипації. Для суттєво нелінійних систем, до яких відноситься пружинно-маятникова система (10), обов'язковим є зважати саме на характер траєкторій у просторі $\phi(\psi)$. Для повноти результату може виникати необхідність додаткового дослідження на стійкість. Тому дослідимо тепер більш детально стійкість вертикальних коливань системи (10). Будемо розглядати лінеаризовані рівняння у варіаціях, поклавши $x = \tilde{x} + u$, $\theta = \tilde{\theta} + v$:

$$\begin{cases} \ddot{u} + p^2 u + 2\varepsilon\eta_x \dot{u} - \alpha(\ddot{\tilde{\theta}}v + 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{v} + \ddot{v}\tilde{\theta}) = 0 \\ \ddot{v} + v + 2\varepsilon\eta_\theta \dot{v} - \tilde{x} \cdot v - \ddot{u}\tilde{\theta} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Для вертикальних коливань при $\tilde{\theta} \equiv 0$ рівняння (17) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u} + p^2 u + 2\varepsilon\eta_x \dot{u} = 0 \\ \ddot{v} + v(1 - \tilde{x}) + 2\varepsilon\eta_\theta \dot{v} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Оскільки на стійкість вертикальних коливань впливають лише відхилення по куту, будемо розглядати лише друге рівняння системи (18). В умовах $\theta(\tau) \equiv 0$ розв'язок системи (10) приймає вигляд $x(\tau) = Ae^{-\varepsilon\eta_x \tau} \cos \omega_x \tau$, де $\omega_x = \sqrt{p^2 - \varepsilon^2 \eta_x^2}$. Підставляючи цей розв'язок у друге рівняння (18), маємо таке:

$$\ddot{v} + v + 2\varepsilon\eta_\theta \dot{v} - v(-\omega_x^2 Ae^{-\varepsilon\eta_x \tau} \cos \omega_x \tau + 2\varepsilon\eta_x \omega_x Ae^{-\varepsilon\eta_x \tau} \sin \omega_x \tau +$$

З рис. 10 видно, що амплітуди по координаті θ на два порядки менші, ніж по координаті x , тому вертикальні коливання можна вважати стійкими. Таким чином, можна зробити висновок, що результати дослідження динаміки системи (10) за допомогою зведення до редукованої системи узгоджуються з чисельно-аналітичними експериментами, приведеними на рис. 8 та 10.

Зауважимо, що все ж таки у даному випадку не можна достовірно оцінити стійкість рухів системи лише за функцією повної енергії редукованої системи

$$+\varepsilon^2 \eta_x^2 A e^{-\varepsilon \eta_x \tau} \cos \omega_x \tau = 0. \quad (19)$$

Рівняння (19) включає два масштаби часу $T_0 = \tau$ та $T_1 = \varepsilon \tau$, які будемо розглядати окремо, для чого покладемо $v = v_0 + \varepsilon v_1$. При цьому рівняння (19) розпадається на систему рівнянь у частинних похідних:

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0^2} + v_0 + v_0 \omega_x^2 A e^{-\eta_x T_1} \cos \omega_x T_0 = 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon^1 : \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + v_1 + v_1 \omega_x^2 A e^{-\eta_x T_1} \cos \omega_x T_0 = -2\eta_\theta \frac{\partial v_0}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2v_0 \eta_x \omega_x A e^{-\eta_x T_1} \sin \omega_x T_0. \quad (21)$$

У рівнянні (20) введемо заміну змінних $r = \frac{\omega_x T_0}{2}$ та позначимо $a = \frac{4}{\omega_x^2}$, $\mu = 4Ae^{-\eta_x T_1}$, в результаті отримуємо рівняння Мат'є:

$$v_0'' + v_0(a + \mu \cos 2r) = 0, \quad (22)$$

де $v'' = \frac{d^2 v}{dr^2}$. Вважаючи μ малим параметром, покладемо у рівнянні (22) $v_0 = v_{00} + \mu v_{01} + \mu^2 v_{02} + \dots$ та $a = a_0 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots$. Як відомо, для рівняння Мат'є існує пара лінійно незалежних розв'язків, які утворюють фундаментальну систему, один з яких є парною функцією, а інший – непарною [5]. Таким чином, підставляючи по черзі перші наближення розв'язків у вигляді $v_0^{(1)} = C \cos r$ та $v_0^{(2)} = C \sin r$, отримуємо розв'язки для рівняння (22):

$$v_0^{(1)} = C(\cos r + \frac{1}{16}\mu \cos 3r - \frac{1}{256}\mu^2 \cos 3r - \frac{1}{768}\mu^2 \cos 5r), \quad (23)$$

$$v_0^{(2)} = C(\sin r + \frac{1}{16}\mu \sin 3r + \frac{1}{256}\mu^2 \cos 3r + \frac{1}{768}\mu^2 \cos 5r), \quad (24)$$

де C – константа для масштабу часу T_0 , але функція масштабу часу T_1 . З умов виключення вікових членів у правих частинах (22) отримуємо границі стійкості/нестійкості для головного параметричного резонансу, які з точністю до $O(\mu^5)$ мають вигляд [9]:

$$a = 1 - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{32}\mu^2 + \frac{1}{512}\mu^3 - \frac{1}{24576}\mu^4 + \dots \quad (25)$$

$$a = 1 + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{32}\mu^2 - \frac{1}{512}\mu^3 - \frac{1}{24576}\mu^4 + \dots \quad (26)$$

У рівнянні (21) також введемо заміну змінних $r = \frac{\omega_x T_0}{2}$ та позначимо $a = \frac{4}{\omega_x^2}$, $\mu = 4Ae^{-\eta_x T_1}$:

$$v_1'' + v_1(a + \mu \cos 2r) = -\frac{4\eta_\theta}{\omega_x} v_0' - \frac{4}{\omega_x} \frac{\partial v_0'}{\partial T_1} + \frac{\eta_x}{2\omega_x} \mu v_0 \sin 2r, \quad (27)$$

де $v' = \frac{dv}{d\tau}$. Для рівняння (27) теж застосуємо розкладення за малим параметром, $v_1 = v_{10} + \mu v_{11} + \mu^2 v_{12} + \dots$ та $a = a_0 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots$. Отримаємо умову виключення вікових членів у вигляді: $\frac{\partial C}{\partial T_1} + \eta_\theta C = 0$, звідки $C = c_0 e^{-\eta_\theta T_1}$. Підставляючи знайдені розв'язки (23) та (24) по черзі у рівняння (27) з урахуванням парності/непарності шуканих розв'язків, легко впевнитись, що рівняння (27) дозволяє уточнити розв'язок для малих відхилень v по куту θ , але не впливає на отримані залежності для границь стійкості/нестійкості (25), (26).

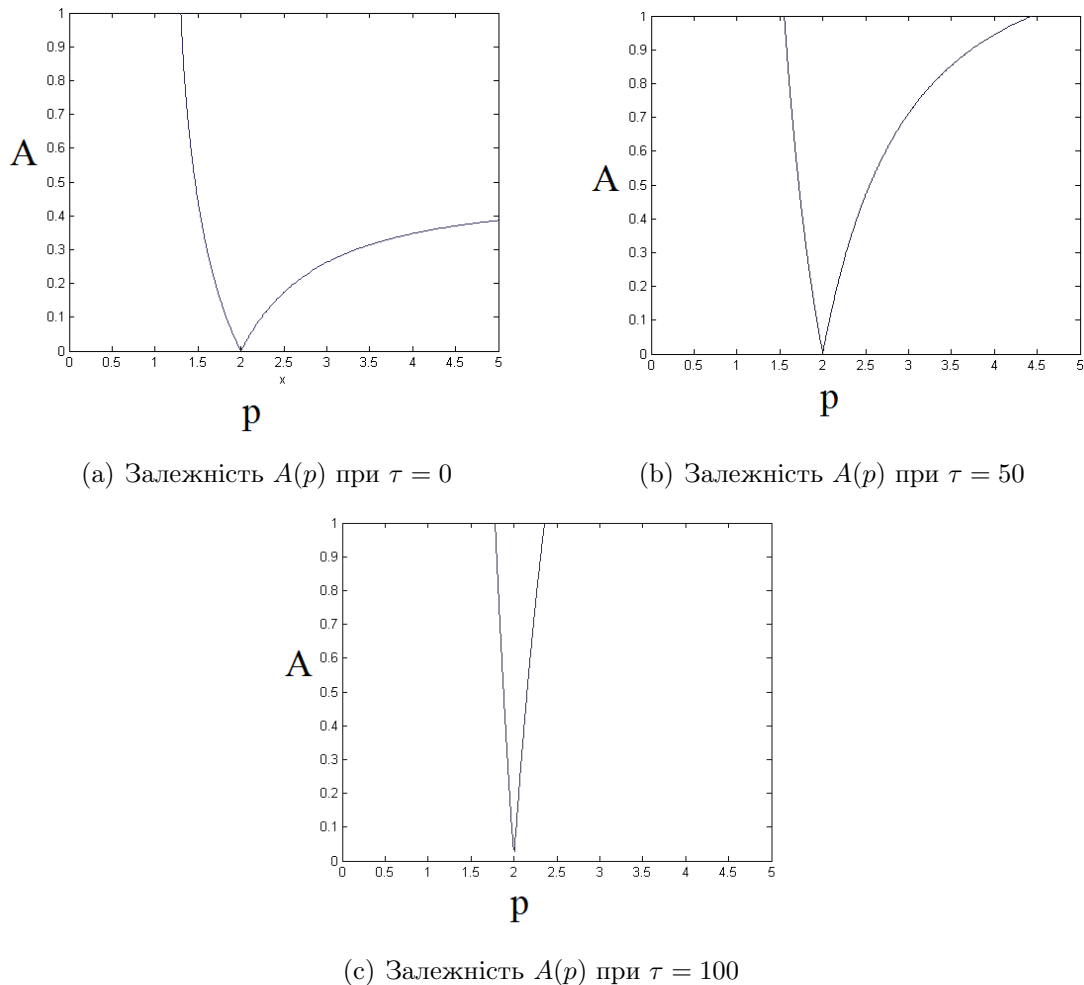


Рис. 11. Зміна границь головного параметричного резонансу з плином часу

Очевидно, що границі (25), (26) залежать від часу, адже $\mu = 4Ae^{-\eta_x \varepsilon \tau}$. Дослідимо їхню динаміку, для чого побудуємо залежності (25), (26) за допомогою засобів пакету Matlab при $\varepsilon = 0, 1$ і $\eta_x = 0, 2$ та для моментів часу $\tau = 0, \tau = 50$ та $\tau = 100$. Отримані границі стійкості/нестійкості у вигляді залежності $A(p)$ представлені на рис. 11а–11с. При цьому нестійкість спостерігається всередині фігур, утворених двома граничними лініями.

З рис. 11 випливає, що області нестійкості звужуються з плином часу, тобто вертикальні коливання, що були нестійкими на початку процесу, з часом стають стійкими. Цей результат цілком підтверджує результати дослідження системи (10) за методикою зведення до редукованої системи: з часом енергія системи спадає, біфуркація перестає відбуватися, а вертикальні коливання поступово набувають стійкості.

3. Висновки

Для пружинно-масової системи (1) проведено дослідження динаміки системи в околі внутрішнього резонансу за допомогою методики зведення до редукованої системи відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків. Отримано результати щодо стійкості рухів системи незалежно від вибору параметрів системи та початкових умов, а саме: рух системи, що відповідає локалізованій формі коливань, залишається стійким в околі внутрішнього резонансу у той час, як рух, що відповідає зв'язаним коливанням, втрачає стійкість, і відбувається перехід до локалізованих коливань. При цьому наявність резонансу не призводить до біфуркації. Також для системи (1) отримані перші наближення загальних розв'язків методом багатьох масштабів, які були використані для виділення власних частот та дослідження перехідного процесу у системі: отримані умови, коли система може підійти до внутрішнього резонансу та з часом відстроїтися від резонансного режиму.

Для пружинно-маяткової системи (10) проведено детальне дослідження динаміки системи в околі внутрішнього резонансу за допомогою методики зведення до редукованої системи відносно тих же змінних, як і для системи (1). Це дозволяє зробити наступний висновок: залежно від вибору розладу для частот та початкової енергії система може потрапити в область, де вертикальні коливання втрачають стійкість та відбувається перехід до рухів, які відповідають двом формам зв'язаних коливань, тобто у даній області з'являється біфуркація. З часом, коли енергія системи спадає, відбувається вихід з цієї області, вертикальна форма стає стійкою, а біфуркація перестає відбуватися. Також проведено додаткове дослідження стійкості вертикальних коливань системи (10) на основі рівнянь у варіаціях, яке підтверджує, що їх стійкість залежить від часу: з його збільшенням область нестійкості вертикальних коливань на площині параметрів системи звужується.

Достовірність отриманих аналітичних результатів дослідження обох систем підтверджується чисельними та чисельно-аналітичними експериментами.

Перелік цитованих джерел

1. *Аврамов К. В.* Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин — Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. — 704 с.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов — Харьков: Издание Харьковского матем. общества, 1892. (Ляпунов А. М. Общая задача об устой-

- чивости движения. — М.: ОНТИ, Гл. редакция общетехнической литературы, 1935. — 386 с.)
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений/ А. Х. Найфэ — М.: Мир, 1973. — 454 с.
 4. Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний/ В. М. Старжинский — М: Наука, 1977. — 256 с.
 5. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах/ Т.Хаяси — М.: Мир, 1968. — 432 с.
 6. Avramov K. V. Snap-through truss as a vibration absorber / K.V.Avramov, Yu.V.Mikhlin // Journal of Vibration and Control. — 2004. — V. 10. — P.291-308.
 7. Mikhlin Yu. V. Dynamical interaction of an elastic system and essentially nonlinear absorber/ Yu. V. Mikhlin, S. N. Reshetnikova// Journal of Sound and Vibration. — 2005. — V. 283. — P. 91-120.
 8. Rosenberg R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // Advances of Applied Mechanics. — 1966. — Vol.9. — P. 156- 243.
 9. Vakakis A. F. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems / A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, Y. S. Lee - Springer Science, 2008. — 376 p.
 10. Vakakis A. F. Normal modes and localization in nonlinear systems / A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Yu V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk, A. A. Zevin - New York: Wiley Interscience, 1996. — 552 p.

Получена 30.08.2012