

УДК 517.956.4

# Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа<sup>1</sup>

Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150000. E-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющейся (преобразованной) пространственной переменной. Данное уравнение известно под названием «нелокальное уравнение эрозии» и служит одной из математических моделей формирования рельефа на поверхности пластины под воздействием потока ионов. В работе рассматривается периодическая краевая задача. Предложен механизм формирования волнового нанорельефа как результат потери устойчивости плоского рельефа. Волновой рельеф находится в результате решения бифуркационных задач, для исследования которых использован аппарат теории нормальных форм, метод инвариантных многообразий. Для решений, описывающих волновой нанорельеф, приведены асимптотические формулы.

**Ключевые слова:** бифуркации и устойчивость, волновой нанорельеф, пространственно – неоднородные решения.

## Введение

В работе рассматривается нелинейное уравнение с частными производными с отклоняющимся аргументом, которое моделирует формирование нанорельефа при бомбардировке ионами плоской поверхности мишени. Этот технологический процесс имеет широкое применение в микроэлектронике (наноэлектронике) при обработке полупроводниковых материалов. Математические модели базируются на основополагающих идеях П.Зигмунда (см., например, [14-15]). В настоящее время широкую известность получила математическая модель, предложенная Брэдли-Харпером [16,1-2]. В данной работе математическому анализу будет подвергнута иная модель, которая также получена на развитии идей П.Зигмунда, но учитывает нелокальные эффекты, возникающие при ионной бомбардировке (см.[3-4]). В работах [3-4] можно найти вывод этого уравнения, а также постановку задач, возникающих при исследовании этой математической модели процесса формирования неоднородных наноструктур.

Приведем уравнение нелокальной эрозии уже в перенормированном виде

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u - w)w_x + b_2(w_x)^2 + b_3(u - w)(w_x)^2, \quad (0.1)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

где  $u = u(t, x)$  — нормированное отклонение от плоского фронта мишени,  $w = w(t, x) = u(t, x - h)$ ,  $h \in R$ . Коэффициенты  $a$ ,  $c$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени. Все они зависят от угла  $\Theta$  между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности (см. рис. 1).

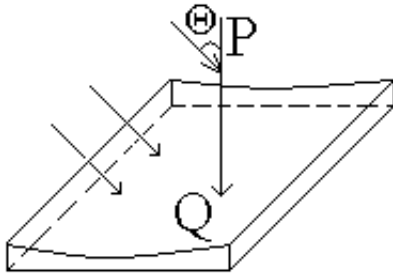


Рис. 1

Здесь  $PQ$  — нормаль. Стрелками указано направление пучка ионов. Наконец,  $a, c > 0$ . Положительный коэффициент  $a$  обратно пропорционален интенсивности потока ионов, то есть  $a = a(J, \Theta)$  и при фиксированном  $\Theta$  данная функция убывает при возрастании  $J$ , где  $J$  интенсивность потока.

Как и в работах [16,1-3], уравнение (0.1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями. С учетом нормировок можно считать, что при всех  $x, t \geq 0$  выполнено равенство

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (0.2)$$

В данной работе рассмотрим два случая:  $h = \pi$  и  $h = 2\pi/3$ . При этом, в первую очередь, остановимся на разборе более сложного с математической точки зрения случая с  $h = 2\pi/3$ .

Далее рассмотрим вопрос, связанный с описанием структуры окрестности нулевого решения. Краевую задачу (0.1),(0.2) следует дополнить начальными условиями

$$u(0, x) = f(x). \quad (0.3)$$

В этом случае считаем, что  $f(x) \in H_1$ , где через  $H_1$  обозначено пространство, состоящее из  $2\pi$ -периодических функций  $f(x) \in W_2^1[0; 2\pi]$ , где через  $W_2^1[0; 2\pi]$  обозначено пространство Соболева [5]. При таком выборе  $f(x)$  из результатов работы [6] вытекает локальная разрешимость смешанной задачи (0.1)-(0.3).

Уравнение (0.1) входит в класс абстрактных параболических уравнений с преобразованным пространственным аргументом. Исследования похожих краевых задач можно найти в работах [7-9]. Как правило, рассматриваемые там уравнения имеют приложения в нелинейной оптике.

Отметим в заключение этого раздела, что краевая задача (0.1)-(0.3) наряду с решением  $u(t, x)$  допускает решение  $u(t, x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Далее будем рассматривать окрестность нулевого решения в смысле нормы фазового пространства. Окрестность иных состояний равновесия  $u(t, x) = C$  в силу выше сказанного может быть заменена на окрестность нулевого решения. С физической точки зрения замена  $u \rightarrow u + C$  означает смену системы координат.

## 1. Линейный анализ

Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (0.1)-(0.2) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = A(a)u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (1.1)$$

где линейный дифференциальный оператор  $A(a)$  имеет в качестве области определения достаточно гладкие  $2\pi$  периодические функции  $v(x)$ . При этом

$$A(a)v(x) = av'' - cv'_h + v - v_h, \quad v_h = v(x - h).$$

В силу полноты семейства функций  $\{\exp(ikx)\}$  в пространстве  $L_2(0; 2\pi)$  собственные значения линейного дифференциального оператора  $A(a)$  определяются равенством

$$\lambda_n = -an^2 - icn \exp(-inh) + 1 - \exp(-inh), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

Элементарно проверяется, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\lambda_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_n)}{\operatorname{Re}(\lambda_n)} = 0$  при любом выборе  $h$ . Из этих соотношений, в частности, вытекает, что линейный дифференциальный оператор  $A(a)$  является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов [10], а краевую задачу (1.1) можно проинтерпретировать как абстрактное параболическое уравнение в  $L_2(0; 2\pi)$ . Добавим, что вне зависимости от выбора  $h$  справедливо равенство  $\lambda_0 = 0$ . Расположение остальных точек спектра на комплексной плоскости изучим детально при специальном выборе отклонения  $h$ .

Пусть сначала  $h = 2\pi/3$ . Тогда из равенства (1.2) вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda_n &= -an^2 - cn \sin \frac{2\pi n}{3} + 1 - \cos \frac{2\pi n}{3}, \\ \operatorname{Im}\lambda_n &= -cn \cos \frac{2\pi n}{3} + \sin \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сразу отметим, что при достаточно большом  $a$  при всех  $n \neq 0$  справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda_n \leq -\gamma_0 < 0, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0. \quad (1.4)$$

Последнее означает, что нулевое решение краевой задачи (1.1) устойчиво в норме фазового пространства, но не может быть асимптотически устойчивым в силу наличия простого собственного значения  $\lambda_0 = 0$  у линейного оператора  $A(a)$ .

Критический случай в задаче об устойчивости выделяется неравенством

$$\operatorname{Re}\lambda_n \leq 0, \quad n \neq 0,$$

а также наличием таких  $n = n_1 \neq 0$ , при которых  $\operatorname{Re}\lambda_{n_1} = 0$ . Переход к критическому случаю в задаче об устойчивости можно обеспечить уменьшением  $a$

(увеличением интенсивности потока ионов). При этом следует ограничиться наибольшим  $a$ . Критическое значение  $a = a_* = \max_{a \in \Omega} a$ , где  $\Omega$  множество тех  $a$ , при которых у линейного оператора  $A(a)$  есть собственные значения  $\lambda(a)$ , у которых  $\operatorname{Re} \lambda(a) = 0$ , если  $n \neq 0$ .

Перейдем к выбору  $a_*$ . Отметим, что если  $n = -k, k \in N$ , то  $\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k$ . Поэтому ограничимся рассмотрением  $n \in N$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Рассмотрим три варианта выбора  $n$ :  $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2, k \in N$ .

Пусть  $n = 3k$ . Тогда при любом  $k \neq 0$  справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda_{3k} = -a(3k)^2 < 0.$$

В остальных двух случаях имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_{3k+1} &= -a(3k+1)^2 - c \frac{\sqrt{3}}{2}(3k+1) + \frac{3}{2}, \\ \operatorname{Re} \lambda_{3k+2} &= -a(3k+2)^2 + c \frac{\sqrt{3}}{2}(3k+2) + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство  $\operatorname{Re} \lambda_{3k+1} \leq 0$ . Наибольшее  $a$ , при котором может реализоваться знак равенства обозначим  $a_{1*}$ . Если же рассмотреть второй случай и неравенство  $\operatorname{Re} \lambda_{3k+2} \leq 0$ , то наибольшее  $a$ , при котором возможна реализация равенства, обозначим через  $a_{2*}$ . Ясно, что  $a_* = \max\{a_{1*}, a_{2*}\}$ . Осталось определить  $a_{1*}, a_{2*}$ .

Если изучить более детально неравенство  $\operatorname{Re} \lambda_{3k+1} \leq 0$ , то при  $(3 - \sqrt{3}c)/2 \leq 0$  справедлив уже строгий его вариант. Поэтому при  $c \in [\sqrt{3}; \infty)$  величина  $a_{1*}$  не определяется. Пусть теперь  $c \in (0; \sqrt{3}/2)$ . В этом случае будет выполнено неравенство  $\operatorname{Re} \lambda_{3k+1} < \operatorname{Re} \lambda_1$ . Поэтому  $a_{1*}$  определяется из анализа неравенства

$$-a - c \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \leq 0.$$

Равенство реализуется при  $a = a_{1*} = (3 - \sqrt{3}c)/2$ . Рассмотрение второго варианта ( $n = 3k + 2$ ) приводит к анализу последовательности неравенств

$$a \geq \frac{3}{2(3k+2)^2} + c \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(3k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, при всех  $c \geq 0$  выполнено равенство  $a_{2*} = (3 + 2\sqrt{3}c)/8$ .

Напомним, что при  $c \in [\sqrt{3}; \infty)$   $a_{1*}$  не определяется. Поэтому здесь критическое значение  $a_* = a_{2*}$ . Если  $c \in (\sqrt{3}/2; \sqrt{3})$ , то выполнено неравенство  $a_{2*} > a_{1*}$  и опять  $a_* = a_{2*}$ . При  $c \in (0; \sqrt{3}/2)$  получаем, что  $a_* = a_{1*}$ .

Пусть  $c \in (\sqrt{3}/2; \infty)$  линейный дифференциальный оператор  $A_* = A(a_*)$  имеет собственные значения  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = i\sigma_2, \lambda_{-1} = -i\sigma_2$ , где  $\sigma_2 = c - \sqrt{3}/2$ , а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости,

выделяемой неравенством (1.4). Собственному значению  $\lambda_0 = 0$  соответствует собственная функция  $e_0(x) = 1$ , а чисто мнимым собственным значениям  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_2$  соответствуют собственные функции  $e_2 = \exp(2ix)$ ,  $\bar{e}_2 = \exp(-2ix)$ .

При  $c \in (0; \sqrt{3}/2)$  получаем, что  $a_* = a_{1*} = (3 - \sqrt{3}c)/2$ ,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_1$ , где  $\sigma_1 = (c + \sqrt{3})/2$ , которым соответствуют собственные функции

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = \exp(ix), \quad e_{-1}(x) = \exp(-ix).$$

Для остальных собственных значений выполнено неравенство (1.4).

Особый случай реализуется, если  $c = \sqrt{3}/2$ . При таком выборе  $c$  имеет место равенство  $a_* = a_{1*} = a_{2*}$ . Поэтому линейный оператор  $A_* = A_*(a_*)$  имеет трехкратное собственное число  $\lambda = 0$ , которому отвечают собственные функции

$$e_0(x) = 1, \quad e_2(x) = \exp(2ix), \quad e_{-2}(x) = \exp(-2ix),$$

а также  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_1$ , где  $\sigma_1 = (3\sqrt{3})/4$ . Последним двум собственным значениям  $\lambda_{\pm 1}$  соответствуют собственные функции

$$e_1(x) = \exp(ix), \quad e_{-1}(x) = \exp(-ix).$$

Пусть  $h = \pi$ . Такой вариант выбора пространственного отклонения приводит к аналогичной ситуации. В данном случае линейный дифференциальный оператор  $A(a)$  имеет собственные числа

$$\lambda_n = -an^2 - icn \exp(i\pi n) + 1 - \exp(i\pi n).$$

Если  $n = 2k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то

$$\lambda_{2k} = -4k^2a + i2kc.$$

Следовательно,  $\lambda_0 = 0$  и  $\operatorname{Re}\lambda_{2k} < 0$  при остальных  $k$ .

Пусть теперь  $n = 2k + 1$ , то

$$\lambda_{2k+1} = -(2k + 1)^2a + 2 + ic(2k + 1).$$

Откуда получаем, что  $\operatorname{Re}\lambda_{2k+1} = 2 - (2k+1)^2a$ . Критический случай возникает, если  $k = 0$ ,  $a = a_* = 2$ . При таком выборе  $a$  линейный дифференциальный оператор  $A_* = A(a_*)$  ( $h = \pi$ ) имеет собственные числа  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_3$ , где  $\sigma_3 = c$ . Им соответствуют собственные функции

$$h_0(x) = 1, \quad h_1(x) = \exp(ix), \quad h_{-1}(x) = \exp(-ix).$$

Вариант с  $h = \pi$  похож на тот случай, когда  $h = 2\pi/3$ , а  $c \in (0; \sqrt{3}/2)$ .

## 2. Нормальные формы нелинейных краевых задач

Как и в разделе 1 сначала рассмотрим вариант, когда  $h = 2\pi/3$ . Более того, пусть  $c \in (0; (\sqrt{3}/2) - \mu)$ ,  $\mu > 0$ . Тогда в краевой задаче (0.1), (0.2) положим

$a = a_* - \gamma_1 \varepsilon$ ,  $a_* = (3 - c\sqrt{3})/2$ . Подчеркнем, что линейный дифференциальный оператор

$$A(\varepsilon)v = A_*v - \varepsilon\gamma_1 v''$$

имеет собственные числа

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{\pm 1}(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon \pm i\sigma_1, \lambda_{\pm 1}(0) = \pm i\sigma_1, \sigma_1 = \frac{c + \sqrt{3}}{2}.$$

Здесь малый параметр  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ , а  $\gamma_1 = \pm 1$ . Следовательно, поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений трехмерной системы дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии (см., например, [11-12]). Эту систему, если она записана в специальном и удобном виде, принято называть нормальной формой, а иногда и квазинормальной формой [13].

Для построения нормальной формы на трехмерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова – Боголюбова – Митропольского – Самойленко (см. [13, 2]). Решение нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) (при  $h = 2\pi/3$ ,  $a = a_* - \gamma_1 \varepsilon$ ,  $c \in (0; (\sqrt{3}/2) - \mu)$ ) будем искать в виде суммы

$$u(t, x; s, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (2.1)$$

где  $s = \varepsilon t$ ,  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ,  $\psi(s) = \psi(s, \varepsilon)$ ,  $u_j(t, x, s)$  – достаточно гладкие функции, которые по переменной  $x$  имеют период  $2\pi$  (удовлетворяют краевым условиям (0.2)), а по  $t$  – период  $2\pi/\sigma_1$ . Уместно для дальнейших построений отметить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j(t, x, \varepsilon t)) = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial s} \varepsilon.$$

Наконец,  $w_j(t, x, s) = u_j(t, x - h, s)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $h = 2\pi/3$ .

Подстановка суммы (2.1) в краевую задачу (0.1), (0.2) с последующим приравнованием выражений при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит к линейным краевым задачам для определения  $u_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). При их формировании и изучении будем интерпретировать  $s$  как параметр. Итак получаем

$$u_{1t} = A_* u_1, \quad (2.2)$$

$$u_1(t, x + 2\pi, s) = u_1(t, x, s), \quad (2.3)$$

$$\psi' + u_{2t} = A_* u_2 + b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2(w_{1x})^2, \quad (2.4)$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} u_{3t} = & A_* u_3 + b_1(u_1 - w_1)w_{2x} + b_1(u_2 - w_2)w_{1x} + \\ & + 2b_2 w_{1x} w_{2x} + b_3(u_1 - w_1)(w_{1x})^2 - \gamma_1 \varepsilon u_{1xx} - \\ & - z'(s) \exp(ix + i\sigma_1 t) - \overline{z'(s)} \exp(-ix - i\sigma_1 t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_3(t, x, s). \quad (2.7)$$

Для всех трех краевых задач рассмотрим вопрос о существовании  $2\pi/\sigma_1$  периодических решений по переменной  $t$ .

В качестве решения краевой задачи (2.2), (2.3) выберем функцию

$$u_1(t, x, s) = z(s) \exp(ix + i\sigma_1 t) + \bar{z}(s) \exp(-ix - i\sigma_1 t), \quad (2.8)$$

где функции  $z(s) = z(s, \varepsilon)$ ,  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s, \varepsilon)$  будут определены ниже.

*Замечание 1.* Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$v_t = A_* v + g(t, x), \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x),$$

где  $g(t, x)$  достаточно гладкая функция, которая имеет по переменной  $x$  период  $2\pi$ , а по  $t$  – период  $2\pi/\sigma_1$ . Тогда данная неоднородная краевая задача имеет  $2\pi/\sigma_1$  периодическое решение по переменной  $t$ , если выполнены условия разрешимости

$$\frac{\sigma_1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_1} \int_0^{2\pi} g(t, x) dx dt = \frac{\sigma_1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_1} \int_0^{2\pi} g(t, x) \exp(\pm ix \pm i\sigma_1 t) dx dt = 0.$$

Равенства

$$\frac{\sigma_1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_1} \int_0^{2\pi} v(t, x) dx dt = \frac{\sigma_1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_1} \int_0^{2\pi} v(t, x) \exp(\pm ix \pm i\sigma_1 t) dx dt = 0$$

выделяют одно подходящее решение.

Обратимся сначала к неоднородной краевой задаче (2.4), (2.5). Из условий ее разрешимости и способа выбора решения краевой задачи (2.2), (2.3) (см. (2.8)) получаем, что справедливо равенство

$$\psi' = (\sqrt{3}b_1 + 2b_2)|z|^2. \quad (2.9)$$

При таком выборе  $\psi(s)$  функция

$$u_2(t, x, s) = \eta z^2(s) \exp(2ix + 2i\sigma_1 t) + \bar{\eta} \bar{z}^2(s) \exp(-2ix - 2i\sigma_1 t)$$

будет решением краевой задачи (2.4), (2.5). Здесь

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + i\eta_2, \quad \eta_1 = \frac{1}{\Delta} [(3\sqrt{3} - 6c)b_1 - \sqrt{3}b_2c], \\ \eta_2 &= -\frac{1}{\Delta} [3b_1 + (2\sqrt{3} - 3c)b_2], \quad \Delta = 18(c^2 + 1 - c\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Условия разрешимости для неоднородной краевой задачи (2.6), (2.7) приводят к уравнению для  $z$  :

$$z' = \gamma_1 z + (d_1 + ig_1)z|z|^2, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}d_1 &= -\sqrt{3}b_1\eta_1 + 2b_2(\sqrt{3}\eta_2 - \eta_1) + 3b_3, \\g_1 &= -\sqrt{3}b_1\eta_2 - 2b_2(\eta_2 + \sqrt{3}\eta_1).\end{aligned}$$

Для  $\bar{z}'$  получаем естественно комплексно сопряженное уравнение к уравнению (2.10). Уравнения (2.9), (2.10) формируют систему дифференциальных уравнений, которую принято называть нормальной формой. Часто ее называют укороченной нормальной формой или квазинормальной формой. Система дифференциальных уравнений (2.9), (2.10) выписана с точностью до слагаемых, имеющих третий порядок малости в исходной системе.

В данной системе (2.9), (2.10) положим

$$z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s)). \quad (2.11)$$

Замена (2.11) приводит изучаемую нормальную форму к системе из трех уже действительных уравнений

$$\begin{aligned}\psi' &= q_1\rho^2, \quad \varphi' = g_1\rho^2, \\ \rho' &= \gamma_1\rho + d_1\rho^3.\end{aligned} \quad (2.12)$$

Напомним, что  $\gamma_1$  может принимать два значения 1 или -1.

Если  $\gamma_1 = 1$ , то нулевое решение краевой задачи при  $a = a_* - \gamma_1\varepsilon$  неустойчиво. Равно как неустойчиво состояние равновесия  $\rho = 0$  третьего уравнения (2.12). Если при этом  $d_1 < 0$ , то третье уравнение системы (2.12) имеет ненулевое состояние равновесия

$$\rho(s) = \rho_1 = \sqrt{-\gamma_1/d_1},$$

которое асимптотически устойчиво как решение дифференциального уравнения для  $\rho(s)$ . Откуда заключаем, что справедливо утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $d_1 < 0, \gamma_1 = 1$ , тогда система дифференциальных уравнений (2.12) имеет устойчивое решение

$$\begin{aligned}\psi(s) &= q_1\rho_1^2s + \psi_0, \quad \varphi(s) = g_1\rho_1^2s + \varphi_0, \quad q_1 = (b_1\sqrt{3} + 2b_2), \\ \rho(s) &= \rho_1 = \sqrt{-\gamma_1/d_1}.\end{aligned}$$

При  $d_1 > 0$  и  $\gamma_1 = -1$  данное решение также существует, но в этом случае оно неустойчиво.

Из результатов, изложенных в монографии [13], вытекает, что справедливо утверждение, которое относится к краевой задаче (0.1), (0.2), если  $a = a_* - \gamma_1\varepsilon$ , а  $c \in (0; (\sqrt{3}/2) - \mu)$ ,  $\mu > 0$ .

**Теорема 1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$  ( $\varepsilon = |a_* - a|$ ) краевая задача (0.1), (0.2) имеет решение

$$\begin{aligned}u(t, x, \varepsilon) &= \omega_1(\varepsilon)t + \varepsilon^{1/2}(-\gamma_1/d_1)^{1/2}[\exp[i(x + (\sigma_1 - \varepsilon g_1\gamma_1/d_1)t)] + \kappa.c.] + \\ &+ \varepsilon(-\gamma_1/d_1)[\eta \exp[2i(x + (\sigma_1 - \varepsilon g_1\gamma_1/d_1)t)] + \kappa.c.] + o(\varepsilon),\end{aligned}$$



где знак «к.с.» заменяет комплексно сопряженную функцию к слагаемому непосредственно ему предшествующему,  $\omega_1(\varepsilon) = [(-q_1\gamma_1/d_1)\varepsilon + o(\varepsilon)]$ ,  $\gamma_1 = \text{sign}(a_* - a)$ .

Это решение существует, если  $\gamma_1 d_1 < 0$ . При  $d_1 < 0$  оно устойчиво и оно неустойчиво, если  $d_1 > 0$ .

Сделаем некоторые пояснения к формулировке теоремы. Отметим, что указанное решение в теореме 1 часто называют периодическим решением второго рода относительно  $t$  (по переменной  $x$  оно имеет период  $2\pi$  то есть периодическая функция в обычном смысле): разность  $u(t, x, \varepsilon) - \omega_1(\varepsilon)t$  – периодическая функция по  $t$  с периодом близким к  $2\pi/\sigma_1$ .

Уместно подчеркнуть, что если указанное решение  $u(t, x, \varepsilon)$  существует, то наряду с ним существует периодическое решение второго рода  $u(t, x, \varepsilon) + C$ , где  $C \in R$ , то есть имеем двухпараметрическое семейство решений

$$u(t + \alpha, x, \varepsilon) + \beta, \quad \alpha, \beta \in R.$$

Это двухпараметрическое семейство решений формирует двумерное интегральное многообразие, которое асимптотически устойчиво, если  $d_1 < 0$ . Все решения из малой окрестности этого многообразия стремятся к нему в норме фазового пространства решений краевой задачи (0.1), (0.2).

Напомним, что

$$d_1 = \frac{1}{18\Delta} [(6\sqrt{3} - 9)b_1^2 + (15c - 12\sqrt{3})b_1b_2 + 4(2\sqrt{3}c - 3)b_2^2] + 3b_3,$$

$$g_1 = -b_1\sqrt{3}\eta_2 - 2b_2(\eta_2 + \sqrt{3}\eta_1).$$

Так, например, если  $b_1$  и  $b_2$  близки к 0, то знак  $d_1$  определяется знаком коэффициента  $b_3$ . Отметим, что в приложениях, обычно,  $b_3 < 0$ .

Второй достаточно типичный случай состоит в том, что  $b_2 = 0, b_3 = 0$ . Тогда

$$d_1 = \frac{(2\sqrt{3}c - 3)b_1^2}{6(c^2 - \sqrt{3}c + 1)}.$$

В этом случае всегда  $d_1 < 0$  в силу выбора  $c$ .

Перейдем теперь к случаю, когда  $c \in ((\sqrt{3}/2) + \mu; \infty), \mu > 0$ . Напомним, что в таком случае  $a_* = (3 + 2\sqrt{3}c)/8$ , а линейный дифференциальный оператор  $A_*$  в такой ситуации имеет собственные числа  $\lambda_0 = 0, \lambda_{\pm 2} = \pm i\sigma_2, \sigma_2 = c - \sqrt{3}/2$ , которым отвечают собственные функции

$$e_0(x) = 1, \quad e_2(x) = \exp(2ix), \quad \bar{e}_2(x) = \exp(-2ix).$$

Положим  $a = a_* - \gamma_2\varepsilon, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$  и в этой ситуации выпишем нормальную форму исследуемой нелинейной краевой задачи. Построения этого фрагмента в значительной мере повторяют построения предыдущего. Поэтому ограничимся сокращенным вариантом изложения. Как и в предыдущем случае решения на трехмерном инвариантном многообразии будем искать в специальном виде

$$u(t, x, s, \varepsilon) = \Theta(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (2.13)$$

где  $s = \varepsilon t$ ,  $\Theta(s) = \Theta(s, \varepsilon)$   $u_j = u_j(t, x, s)$  – достаточно гладкие функции. При этом  $u_j$  периодически зависят от  $t$  и  $x$ . По  $t$  они имеют период  $2\pi/\sigma_2$ , а по  $x$  они имеют период  $2\pi$ . Наконец, в данном случае положим

$$u_1(t, x, s) = z(s) \exp(2ix + i\sigma_2 t) + \bar{z}(s) \exp(-2ix - i\sigma_2 t),$$

где функции  $z(s) = z(s, \varepsilon)$ ,  $\bar{z}(s) = \bar{z}(s, \varepsilon)$  подлежат определению как решения системы дифференциальных уравнений – нормальной формы.

Подставляя сумму (2.13) в краевую задачу (0.1), (0.2) при

$$a = a_* - \gamma_2 \varepsilon, \quad c \in ((\sqrt{3}/2) + \mu; \infty), \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \mu > 0,$$

а затем приравнивая члены полученного равенства при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получим две неоднородные краевые задачи для  $u_2, u_3$ . Итак, в данном случае они имеют вид

$$\Theta' + u_{2t} = A_* u_2 + b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2(w_{1x})^2, \quad (2.14)$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \quad (2.15)$$

$$u_1' + u_{3t} = A_* u_3 - \gamma_2 u_{1xx} + b_1[u_1 - w_1]w_{2x} + b_1[u_2 - w_2]w_{1x} + 2b_2 w_{1x} w_{2x} + b_3[u_1 - w_1](w_{1x})^2, \quad (2.16)$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_3(t, x, s). \quad (2.17)$$

Здесь штрихом обозначена частная производная по  $s$ . Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (2.14), (2.15) в классе периодических по  $t$  функций с периодом  $2\pi/\sigma_2$  находим, что  $\Theta(s)$  подчиняется уравнению

$$\Theta' = q_2 |z|^2, \quad (2.18)$$

где  $q_2 = 8b_2 - 2\sqrt{3}b_1$ . Тогда решение этой задачи следует выбрать в виде суммы

$$u_2(t, x, s) = \xi z^2(s) \exp(4ix + i2\sigma_2 t) + \bar{\xi} \bar{z}^2(s) \exp(-4ix - i2\sigma_2 t),$$

где

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \xi_1 = \frac{4\sqrt{3}cb_2 - 3(4c + \sqrt{3})b_1}{9(1 + 2\sqrt{3}c + 4c^2)},$$

$$\xi_2 = \frac{4(\sqrt{3} + 3c)b_2 - 3b_1}{9(1 + 2\sqrt{3}c + 4c^2)}.$$

В свою очередь, из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (2.16), (2.17) выводим справедливость равенств

$$z' = \gamma_2 z + (d_2 + ig_2)z|z|^2, \quad (2.19)$$

где

$$d_2 = 12b_3 - 8b_2(\xi_1 + \sqrt{3}\xi_2) + 2\sqrt{3}\xi_1 b_1, \quad g_2 = 2\sqrt{3}b_1 \xi_2 - 8b_2(\xi_2 - \sqrt{3}\xi_1).$$

Если теперь в системе уравнений (2.18),(2.19) сделать замену (2.11), то нормальная форма (2.18),(2.19), как и в предыдущем случае запишется в действительной форме

$$\begin{aligned} \Theta' &= q_2\rho^2, \quad \varphi' = g_2\rho^2, \\ \rho' &= \gamma_2\rho + d_2\rho^3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Лемма 2.** При  $d_2 < 0, \gamma_2 = 1$  система дифференциальных уравнений (2.20) имеет устойчивое решение

$$\Theta(s) = q_2\rho_2^2 s + \Theta_0, \quad \varphi(s) = g_2\rho_2^2 s + \varphi_0, \quad \rho(s) = \rho_2 = \sqrt{-\gamma_2/d_2}.$$

При  $d_2 > 0, \gamma_2 = -1$  данное решение также существует, но оно неустойчиво.

Как и для первого случая сформулируем утверждение для краевой задачи (0.1), (0.2).

**Теорема 2.** Пусть  $a = a_* - \gamma_2\varepsilon$ , то есть  $\varepsilon = |a_* - a|, \gamma_2 = \text{sign}(a_* - a)$ ,  $c \in ((\sqrt{3}/2) + \mu; 0), \mu > 0$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$  краевая задача (0.1), (0.2) имеет решение, для которого справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) &= \omega_2(\varepsilon)t + \varepsilon^{1/2}(-\gamma_2/d_2)^{1/2}[\exp[i(2x + (\sigma_2 - \varepsilon g_2\gamma_2/d_2)t)] + \text{к.с.}] + \\ &+ \varepsilon(-\gamma_2/d_2)[\xi \exp[2i(2x + (\sigma_2 - \varepsilon g_2\gamma_2/d_2)t)] + \text{к.с.}] + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где знак «к.с.» обозначает слагаемое, которое комплексно сопряжено предшествующему и выписанному явно, а  $\omega_2(\varepsilon) = [(-q_2\gamma_2/d_2)\varepsilon + o(\varepsilon)]$ .

Это решение существует, если  $\gamma_2 d_2 < 0$ . При  $d_2 < 0$  оно устойчиво и неустойчиво при  $d_2 > 0$ .

Здесь речь идет о семействе решений  $u(t + \alpha, x, \varepsilon) + \beta, \alpha, \beta \in R$ , как и в случае теоремы 1. Поэтому справедливы аналогичные замечания, что были сделаны в конце теоремы 1.

Отметим, что в более детальной записи

$$\begin{aligned} d_2 &= 12b_3 + \frac{1}{\Delta}[6\sqrt{3}(4c + \sqrt{3})b_1^2 - 24(5c + 2\sqrt{3})b_1b_2 + 32\sqrt{3}(4c + \sqrt{3})b_2^2], \\ \Delta &= 9(4c^2 + 2\sqrt{3}c + 1). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае величина  $d_2$  может принимать значение любых знаков при соответствующем выборе коэффициентов  $b_1, b_2, b_3$ .

Как отмечалось ранее, аналогичная задача возникает, если  $h = \pi$ . При таком выборе  $h$  в предыдущем разделе был выявлен критический случай в задаче об устойчивости тривиального состояния равновесия и  $a_* = 2$ . Как и при  $h = 2\pi/3$  воспользуемся версией метода Крылова–Боголюбова–Митропольского–Самойленко и решения краевой задачи (0.1), (0.2) при  $a = a_* - \gamma_3\varepsilon, (\gamma_3 = \pm 1, 0 < \varepsilon \ll 1)$ . Для этого решение этой версии краевой задачи будем искать в виде

$$u(t, x, s, \varepsilon) = \chi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (2.21)$$

где  $s = \varepsilon t$ ,  $\chi(s) = \chi(s, \varepsilon)$ , а

$$u_1(t, x, s) = z \exp(ix + i\sigma_3 t) + \bar{z} \exp(-ix - i\sigma_3 t), \quad z = z(s, \varepsilon), \quad \bar{z} = \bar{z}(s, \varepsilon),$$

а  $\sigma_3 = c$ . Для  $u_2, u_3$  получаем, как и ранее, неоднородные краевые задачи. Условия их разрешимости позволяют сформировать нормальную форму для такого варианта краевой задачи

$$\chi' = q_3 |z|^2, \quad z' = \gamma_3 z + (d_3 + i g_3) z |z|^2. \quad (2.22)$$

Здесь

$$q_3 = 2b_2, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad d_3 = 2b_3 - 4(b_2 \zeta_1 + b_1 \zeta_2), \quad g_3 = 4b_1 \zeta_1 - 4b_2 \zeta_2, \\ \zeta = \zeta_1 + i \zeta_2, \quad \zeta_1 = -\frac{b_2 + b_1 c}{2(4 + c^2)}, \quad \zeta_2 = \frac{b_2 c - 4b_1}{2(4 + c^2)}.$$

Подставляя замену (2.11) в нормальную форму (2.22), как и в предыдущих случаях, получаем следующую систему

$$\chi' = q_3 \rho^2, \quad \rho' = g_3 \rho^2, \\ \rho' = \gamma_3 \rho + d_3 \rho^3. \quad (2.23)$$

**Лемма 3.** При  $\gamma_3 = 1, d_3 < 0$  система дифференциальных уравнений (2.23) имеет устойчивое решение

$$\chi(s) = q_3 \rho_3^2 s + \chi_0, \quad \varphi(s) = g_3 \rho_3^2 s + \varphi_0, \quad \rho(s) = \rho_3 = \sqrt{-\gamma_3/d_3}.$$

При  $\gamma_3 = -1, d_3 > 0$  данное решение также существует, но оно неустойчиво.

Если  $h = \pi, a = a_* - \gamma_3 \varepsilon$ , то справедливо утверждение.

**Теорема 3.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$  краевая задача (0.1), (0.2) имеет решение

$$u(t, x, \varepsilon) = \omega_3(\varepsilon)t + \varepsilon^{1/2}(-\gamma_3/d_3)^{1/2}[\exp[i(x + (c - \varepsilon\gamma_3 g_3/d_3)t)] + \text{к.с.}] + \\ + \varepsilon(-\gamma_3/d_3)[\zeta \exp[2i(x + (c - \varepsilon\gamma_3 g_3/d_3)t)] + \text{к.с.}] + o(\varepsilon),$$

Соответствующее решение существует, если  $\gamma_3 d_3 < 0$ . При  $d_3 < 0$  оно устойчиво и неустойчиво, если  $d_3 > 0$ . Здесь

$$\varepsilon = |a_* - a|, \quad \gamma_3 = \text{sign}(a_* - a), \quad \omega_3(\varepsilon) = [(-q_3 \gamma_3/d_3)\varepsilon + o(\varepsilon)].$$

В заключение изучения случая  $h = \pi$  выпишем значение величины  $d_3$  в явном виде

$$d_3 = 2b_3 + \frac{8b_1^2 + 2cb_1 b_2 + 2b_2^2}{4 + c^2}.$$

Отметим, что величина  $d_3$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Так, например, если  $c$  достаточно велико, то знак  $d_3$  совпадает

со знаком  $b_3$ . В стандартных вариантах  $b_3 < 0$ . Другой крайний случай реализуется, если  $b_3 \approx 0$ , то знак  $d_3$  совпадает со знаком числителя второго слагаемого, то есть со знаком числа  $b_2^2 + cb_1b_2 + 4b_1^2$ . Данная сумма положительна, если постоянная  $c$  мала. Пусть

$$c > 4, b_1 > 0, -\left(\frac{\sqrt{c^2 - 16} + c}{2}\right)b_1 < b_2 < \left(\frac{\sqrt{c^2 - 16} - c}{2}\right)b_1.$$

Тогда справедливо неравенство  $b_2^2 + cb_1b_2 + 4b_1^2 < 0$  и, следовательно,  $d_3 < 0$ .

Подчеркнем, что наряду с указанными решениями (2.1), (2.13), (2.21) нелинейная краевая задача имеет решения вида

$$u_j(t, x, \varepsilon) = u_j(t, x + h_j, \varepsilon) + c_j, \quad h_j, c_j \in R,$$

где  $j = 1, 2, 3$  и указывает на номер теоремы, в рамках которой рассматривается данное решение. Все эти решения описывают волновой рельеф, который зависит от  $x$  периодическим образом.

### 3. Заключение

При бомбардировке плоской мишени потоком ионов могут при определенных условиях формироваться неоднородные рельефы четырех типов: волновой нанорельеф, террасы, риплы и ямки травления [3,15]. Наибольший интерес в области нанотехнологий представляет волновой нанорельеф, так как его используют как «наномаску» [4]. В качестве математической модели формирования неоднородных структур было выбрано нелокальное уравнение эрозии. Это уравнение заменяет [3,4] для нанометрового диапазона известное уравнение Брэдли-Харпера [1,2,16].

В работе показано, что при рассмотрении нелокального уравнения эрозии, как и при анализе уравнения Брэдли-Харпера, механизм формирования неоднородного рельефа остается прежним. Неоднородные волновые структуры формируются в результате бифуркаций пространственно неоднородных решений от однородного состояния равновесия при потере последним устойчивости. В рамках математической модели, которая носит название «нелокальное уравнение эрозии», этот механизм отмечен впервые. Для уравнения Брэдли-Харпера аналогичный результат был получен в работе [2].

Напомним, что потеря устойчивости состояния равновесия происходит обычно при увеличении интенсивности потока ионов [1,2,4,16] и, следовательно, относительно легко реализуется с физической и технологической точек зрения.

#### Список цитируемых источников

1. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. — 2010. — Т. 1. — №2. — С. 151–158.
2. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52. — №5. — С. 930–945.

3. *Рудый А.С., Бачурин В.И.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Серия физическая. — 2008. — Т. 72. — №5. — С. 624–629.
4. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. — 2011. — Т. 40. — №2. — С. 109–118.
5. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: ЛГУ им. А. А. Жданова, 2000. — 255 с.
6. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского математического общ-ва. — 1961. — Т. 10. — С. 297–350.
7. *Белан Е.П.* Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. — 2000. — В. 16 — С. 160–167.
8. *Белан Е.П., Лыкова О.Б.* Вращающиеся структуры в параболическом функционально–дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40. — №. 10. — С. 1348–1357.
9. *Белан Е.П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журнал математической физики, анализа и геометрии. — 2005. — Т. 1. — №. 1. — С. 3–34.
10. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Изд-во Наука, 1967. — 464 с.
11. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1950. — 367 с.
12. *Куликов А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве. // Исследования по устойчивости и теории колебаний. / Под ред. Ю.С. Колесова. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
13. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
14. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // J. Mat. Sci. — 1973. — V. 8. — С. 1545.
15. *Sigmund P.* Theory of sputtering. I. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets // Phys. Rev. — 1969. — V.184. — №2. — С. 383–416.
16. *Bradley R.M., Harper J.M.E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Technol. — 1988. — A6(4). — P. 2390–2395.

Получена 30.09.2012    Переработана 10.12.2012