Динамические системы, том 2(30), No. 3-4, 241–258

УДК 517.538

Бифуркации малых периодических решений в случае близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150000. *E-mail: anat_kulikov@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается широкий класс нелинейных эволюционных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. Этот класс уравнений включает в себя краевые задачи, встречающиеся в теории упругой устойчивости. Например, при изучении такого явления как нелинейный панельный флаттер пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Из результатов данной работы вытекает, в частности, что флаттер может быть обусловлен жестким возбуждением колебаний при близости собственных частот к резонансам 1:2. В работе использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений с бесконечномерным фазовым пространством. Использован аппарат нормальных форм, а также алгоритм их построения, который ведет свое начало от работ А. Н. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко. В работе также приведены некоторые результаты, которые относятся к резонансу 1:3. Введение содержит пример краевой задачи, моделирующей явление панельного флаттера.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, нелинейный панельный флаттер, жесткое возбуждение колебаний.

Введение

Одной из наиболее известных задач теории упругой устойчивости считается задача о колебаниях упругих тел в потоке газа или жидкости, а самой популярной из них задача о нелинейном панельном флаттере в сверхзвуковом потоке газа. Аналогичные задачи возникают и при изучении колебаний трубы, по которой протекает жидкость или газ. В теории упругой устойчивости есть иные примеры математических моделей, которые приводят к бифуркационной задаче, рассматриваемой ниже.

Математическим аспектам исследований колебаний тел в потоке газа или жидкости посвящено большое число исследований. Достаточно обратиться, например, к монографиям и работам [1-4,24-26], а также к списку цитируемой там литературы. Простейшие варианты постановки таких задач в случае цилиндрического изгиба приводят к необходимости исследования краевых задач для уравнения

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_{xx}). \tag{0.1}$$

Уравнение (0.1) приведено в перенормированном виде, коэффициент $c \geq 0$ пропорционален скорости набегающего потока газа, $g_0 > 0$ – коэффициент демпфирования. Наконец, $w = w(t,x)$ – нормированный прогиб серединной поверхности пластины. Скорость потока газа направлена вдоль оси x. Функция $w(t,x)$ не зависит от y. Это означает, что рассматривается вариант цилиндрического изгиба пластинки [1; гл. 4]. В правой части уравнения (0.1) находятся слагаемые, которые учитывают нелинейный характер задачи. Так например, в монографии В.В. Болотина (см.[1;§4.12]) предложен следующий вариант

$$F(w_t, w_x, w_{xx}) = b_0 w_{xx} \int\limits_0^1 (w_x)^2 dx - (k_2(w_t + mMw_x)^2 + k_3(w_t + mMw_x)^3),$$

где $b_0, k_2, k_3, m > 0$, а M – число Маха. Если обратиться к монографии [2;§7.6], то в соответствующей краевой задаче оставлена лишь "геометрическая нелинейность"[1]. В первом варианте учтена и аэродинамическая нелинейность на основе закона плоских сечений ("поршневой"теории) [1]. Уравнение (0.1) необходимо дополнить краевыми условиями, отражающими характер закрепления концов пластины. Например, в случае шарнирного опирания

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \tag{0.2}$$

Краевые условия (0.2) могут быть заменены на иные [1,3,25].

Если коэффициент демпфирования g_0 относительно велик, то математическая часть исследования содержит две части. В линейной постановке определяется критическое значение $c = c_*$ (скорость флаттера), при которой спектру устойчивости линеаризованной задачи принадлежит пара простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma(\sigma > 0)$, а остальные остаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. При превышении критической скорости $c = c_*$ происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия. Анализ поведения решений соответствующей нелинейной краевой задачи базируется на распространении бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на соответствующий класс нелинейных краевых задач (нелинейных эволюционных уравнений в банаховом или гильбертовом пространстве). Этому были посвящены работы [25,5-7].

Иная задача возникает, если коэффициент g_0 мал ($g_0 << 1$). Следует отметить, что такой вариант не является исключительным, так как речь идет о коэффициентах после перенормировок, а тогда коэффициент g_0 пропорционален E^{-1}, где E модуль упругости. Обычно E величина достаточно большая. Так для стали $E = 2 \times 10^{11} H/\text{м}^2$. До перенормировок все физические величины приводятся в одной системе. Как правило, это система Си. Добавим, что после перенормировок во многих работах (см., например, [25], а также §4.6 из [1]) для g_0 приведены типичные численные значения. В большинстве примеров $g_0 < 0.02$, а очень часто справедливо неравенство $g_0 << 0.01$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(c) = v^{IV} + cv$, определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям

$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$. В работах [8-10,27] было показано, что при $c \in [0, c_1) (0 < c_1 < c_*)$ линейный дифференциальный оператор $L(c)$ имеет счетное множество простых собственных значений $0 < \sigma_1^2(c) < \sigma_2^2(c) < \ldots$ При $c = c_1$ собственное значение $\sigma_1^2(c_1)$ становится двукратным. Наконец, можно указать такие положительные постоянные c_2, c_3, что $c_3 < c_2 < c_1$ и $\sigma_2(c_2) = 2\sigma_1(c_2), \sigma_2(c_3) = 3\sigma_1(c_3)$. При указанных значениях параметра c иные младшие резонансы собственных частот отсутствуют.

Итак, при $c \approx c_3, c \approx c_2, c \approx c_1$ для точек спектра устойчивости краевой задачи (0.1), (0.2) реализуются случаи, близкие к резонансам 1:3,1:2,1:1. Напомним, что комплексное или действительное число $\lambda (\lambda \in C(R))$ принадлежит спектру устойчивости, если краевая задача

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = 0,$$
$$w(t, 0) = w(t, 1) = w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = 0$$

допускает нетривиальные решения вида $w(t, x) = \exp(\lambda t) v(x)$.

В работе будет рассмотрен класс абстрактных нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве, который включает в себя многие нелинейные эволюционные краевые задачи из теории упругой устойчивости. Например, краевую задачу (0.1), (0.2). Для абстрактных уравнений из указанного класса будет рассмотрена задача о бифуркациях малых периодических решений в случае, близком к резонансу 1:2. Иные резонансные задачи были рассмотрены несколько ранее (см., например, [8-14]).

С точки зрения приложений такие результаты дают возможность иного объяснения феномена нелинейного флаттера, отличного от традиционного (см., например, [2,5-7]). Если коэффициент демпфирования мал, то флаттер может наступить при скоростях близких к c_3 или c_2 или c_1 меньших чем c_*. Иногда значительно. Так в задаче (0.1), (0.2) оказалось, что $c_2 \approx (1/\sqrt{2}) c_1$, а $c_1 < c_*$ (см.[8-10,27]). Величина c_1 при малом демпфировании дает некоторое приближение для скорости флаттера c_*. Поэтому в механике [1;§4.9] принято называть величину c_1 "нижней"скоростью флаттера.

1. Описание рассматриваемого класса абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

Пусть H действительное сепарабельное гильбертово пространство. В этом пространстве рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + g_0 \dot{u} + (A^2 + cB) u = f(u, \dot{u}, c), \tag{1.1}$$

зависящее от параметра $c \in [0, \infty)$.

Операторы, входящие в правую и левую части уравнения (1.1) удовлетворяют ряду ограничений, которые индуцированы видом уравнений теории упругой устойчивости [1-2,25]. Эти ограничения сведены в серию предположений.

Предположение 1. Будем считать, что A – замкнутый линейный оператор, область определения которого H_A плотна в H, а линейный оператор B подчинен A. Дополнительно, будем предполагать, что линейный оператор A имеет своим обратным вполне непрерывный (компактный) оператор A^{-1} .

Предположение 2. Линейный оператор iA – производящий оператор группы класса (C_0) [15; гл. 1, §2] в комплексном расширении H, которое далее будем обозначать H_k.

Предположение 3. Через H_A обозначим подпространство H, состоящее из тех $u \in H_A$, для которых определена норма $||u||_A = ||Au||$. Аналогичным образом определено и подпространство $H_{A^2} : u \in H_{A^2}$, если определена норма $||u||_{A^2} = ||A^2u||$.

Предположение 4. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ действует из некоторого шара $S(r)$ пространства $H_A \times H_A \times R$ в H и имеет сильно непрерывную производную Фреше $f'_u(u, v, c)$, сильно непрерывную H – расширенную [16] производную Фреше $f'_v(u, v, c)$, которые удовлетворяют условию Липшица в шаре $S(r)$. Считаем, что оператор $f(u, v, c)$ гладко зависит от параметра c в метрике пространства H.

Предположение 5. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ имеет по совокупности переменных u, v в нуле порядок малости выше первого. В частности,

$$f_u(u, v, c)|_{u=0,v=0} = f_u(u, v, c)|_{u=0,v=0} = f_v(u, v, c)|_{u=0,v=0} = f_v(u, v, c)|_{u=0,v=0} = 0.$$

Первые три предположения гарантируют локальную разрешимость задачи Коши, для уравнения (1.1), если (см. [16],[28])

$$u(0) = u_0 \in H_{A^2},\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \in H_A. \tag{1.2}$$

Четвертое предположение дополняет первые три. Пусть $||u_0||_{A^2} \le \sigma$, $||\dot{u}_0||_A \le \sigma$, то задача Коши имеет единственное решение (см. [16])

$$u(t) \in C^2((-T_\sigma, T_\sigma), H) \cap C^1((-T_\sigma, T_\sigma), H_A) \cap C((-T_\sigma, T_\sigma), H_{A^2}),$$

где $T_\sigma \to \infty$, если $\sigma \to 0$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся со скоростью геометрической прогрессии. Метод последовательных приближений в работе [16] применялся к интегральному уравнению, заменяющего задачу Коши (1.1), (1.2). Для интегрального уравнения гладкая зависимость от начальных условий и параметров исследуется достаточно стандартным способом. В работе [16] приведен достаточно полный список работ, где рассмотрены схожие задачи. Аналогичные результаты получены в широко известной работе [28].

Следующие предположения носят более специальный характер.

Предположение 5. Линейный оператор $A^2 + cB$ при $c = c_2, c_2 \in (0, c_1)$ имеет положительные и простые собственные значения

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \ldots,$$

При этом $\sigma_2 = 2\sigma_1$, $\sigma_k/\sigma_1 \neq 2$, $|\sigma_k - \sigma_j \pm \sigma_m| \geq D > 0$, $D = const > 0$, $j = 3, 4, 5, \ldots$.

Предположение 6. В рамках данной работы будем считать, что

$$f(u, v, c) = f_2(u, v, c) + f_3(u, v, c),$$

где $f_2(u, v, c), f_3(u, v, c)$ - билинейный и трилинейный операторы по совокупности переменных u, v при всех рассматриваемых c. Будем считать, что они зависят от параметра c аналитически в метрике пространства H. В большинстве приложений

$$f_j(u, v, c) = \sum_{m=0}^{m_0} f_{jm}(u, v)c^m,\ j = 1, 2.$$

Очень часто $f_{jm} \equiv 0,\ m = 1, 2, \ldots$, то есть они от c не зависят. Так будет, например, если ограничиться рассмотрением задач, где учитывается лишь "геометрическая нелинейность"[2; гл. 7, §7.6].

Положим $g_0 = 2\varepsilon g (g > 0),\ c = c_2 + a\varepsilon, a \in R$ и рассмотрим линейный оператор

$$A_2(\varepsilon) = A^2 + (c_2 + a\varepsilon)B, a, \varepsilon \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Положим $A_2 = A_2(0)$, а через A_2^* обозначим сопряженный ему линейный оператор. Через e_k будем обозначать собственные элементы линейного оператора A_2, а через h_k – собственные элементы A_2^*. Будем считать, что h_j, e_k биортогональны, то есть $(e_k, h_j) = \delta_{kj}$ –символ Кронекера.

Наконец будем считать, что система собственных элементов $\{e_j\}$, как и система $\{h_j\}$, образует базис Бари-Рисса [17-18]. В указанных монографиях изложены соответствующие определения и результаты (см., например, гл. 6 из монографии [23]). В монографии [18] эти результаты применяются к исследованию несамосопряженных дифференциальных операторов.

Линейный оператор $A_2(\varepsilon) = A_2 + a\varepsilon B$ имеет собственные числа и собственные элементы [29;гл. 8]

$$\lambda_k(\varepsilon) = \sigma_k^2 + \varepsilon\nu_k + o(\varepsilon),\ e_k(\varepsilon) = e_k + \varepsilon e_{k1} + o(\varepsilon).$$

Итак в рамках данного параграфа будем изучать уравнение (1.1), записанное следующим образом

$$\ddot{u} + 2\varepsilon g\dot{u} + A_2 u + a\varepsilon B u = F_2(u, \dot{u}) + F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon G_2(u, \dot{u}, \varepsilon) + \varepsilon G_3(u, \dot{u}, \varepsilon). \quad (1.3)$$

Здесь $F_2(u, \dot{u}) = f_2(u, \dot{u}, c_2), F_3(u, \dot{u}) = f_3(u, \dot{u}, c_2)$, а G_2, G_3 билинейный и трилинейный операторы (см. п. 1.1), которые гладко зависят от параметра ε.

Замечание 1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + A_2 u = q \exp(i\omega t),\ q \in H_K.$$

При $\omega \neq \sigma_j$ $(j = 1, 2)$ оно всегда имеет периодическое решение с периодом $2\pi/\omega$. Если же оказалось, что $\omega = \sigma_1$ или $\omega = \sigma_2$, то данное неоднородное уравнение имеет периодическое решение с периодом $2\pi/\sigma_1$ или $2\pi/\sigma_2$, если выполнены равенства $(q, h_1) = 0$ или $(q, h_2) = 0$ соответственно. Последние два равенства принято называть условиями разрешимости для соответствующего неоднородного дифференциального уравнения в классе периодических функций.

2. Алгоритм построения нормальной формы в случае близком к резонансу 1:2 собственных частот

Введем в рассмотрение семейство решений уравнения (1.3), для которых справедливо представление

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon[z_1(s)\exp(i\sigma t) + \overline{z}_1(s)\exp(-i\sigma t)]e_1 + \varepsilon[z_2(s)\exp(2i\sigma t)+ \\ +\overline{z}_2(s)\exp(-2i\sigma t)]e_2 + \varepsilon^2 u_2(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + O(\varepsilon^3), \tag{2.1}$$

где $s = \varepsilon t, \sigma = \sigma_1(\sigma_2 = 2\sigma_1 = 2\sigma)$. Комплекснозначные функции $z_1(s), z_2(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (нормальной форме). Структура её главной части будет определена ниже. Для этого подставим сумму (2.1) в дифференциальное уравнение (1.3) и выделим слагаемые, имеющие порядок ε^2. Для $u_2(t, s, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)$ получим неоднородную краевую задачу

$$\ddot{u}_2 + A_2 u_2 = -aBu_1 + F_2(u_1, \dot{u}_1) - 2i\sigma g[z_1\exp(i\sigma t)) - \overline{z}_1\exp(-i\sigma t)]e_1- \\ -4i\sigma g[z_2\exp(2i\sigma t)) - \overline{z}_2\exp(-2i\sigma t)]e_2 - 2i\sigma[z_1'\exp(i\sigma t)- \\ -\overline{z}_1'\exp(-i\sigma t)]e_1 - 4i\sigma[z_2'\exp(2i\sigma t) - \overline{z}_2'\exp(-2i\sigma t)]e_2, \tag{2.2}$$

где $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$, $u_1 = u_1(t, s) = [z_1\exp(i\sigma t)+\overline{z}_1\exp(-i\sigma t)]e_1+[z_2\exp(2i\sigma t)+ \overline{z}_2\exp(-2i\sigma t)]e_2$. Здесь точкой обозначена частная производная по t, а штрихом по s. Билинейный оператор $F_2(u_1, \dot{u}_1)$ можно переписать в иной форме:

$$F_2(u_1, \dot{u}_1) = \exp(2i\sigma t)z_1^2 p_2 + z_1\overline{z}_1 p_0 + \exp(-2i\sigma t)\overline{z}_1^2\overline{p}_2 + \exp(3i\sigma t)z_1 z_2 p_3+ \\ +\exp(-3i\sigma t)\overline{z}_1\overline{z}_2\overline{p}_3 + \exp(i\sigma t)\overline{z}_1 z_2 p_1 + \exp(-i\sigma t)z_1\overline{z}_2\overline{p}_1+ \\ +\exp(4i\sigma t)z_2^2 p_4 + z_2\overline{z}_2 q_0 + \exp(-4i\sigma t)\overline{z}_2^2\overline{p}_4,\ p_1, p_2, p_3, p_4 \in H_k,\ p_0, q_0 \in H.$$

Условия разрешимости неоднородного уравнения в классе $2\pi/\sigma$ периодических по t функций позволяют получить систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для комплекснозначных функций $z_1(s), z_2(s)$. В данном случае укороченный её вариант (квазинормальная форма) приобретает следующий вид

$$z_1' = (-g + ia_1)z_1 + (d_1 + ic_1)z_2\overline{z}_1, \\ z_2' = (-g + ia_2)z_2 + (d_2 + ic_2)z_1^2. \tag{2.3}$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{(Be_1, h_1)}{2i\sigma},\ a_2 = -\frac{(Be_2, h_2)}{4i\sigma},\ (d_1 + ic_1) = \frac{(p_1, h_1)}{2i\sigma},\ (d_2 + ic_2) = \frac{(p_2, h_2)}{4i\sigma}.$$

Квазинормальную форму (2.3) можно записать и иначе, положив

$$y_1(t) = z_1(\varepsilon t)\exp(i\sigma t),\ y_2(t) = z_2(\varepsilon t)\exp(2i\sigma t).$$

Откуда получаем новую систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\sigma y_1 + \varepsilon[(-g + ia_1)y_1 + (d_1 + ic_1)y_2\overline{y}_1], \\ \dot{y}_2 &= 2i\sigma y_2 + \varepsilon[(-g + ia_2)y_2 + (d_2 + ic_1)y_1^2]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В свою очередь, систему дифференциальных уравнений (2.4) можно и целесообразно переписать в тригонометрической форме. Положим

$$y_1 = \gamma_1\rho_1 \exp(i\psi_1 + i\delta_1),\ y_2 = \gamma_2\rho_2 \exp(i\psi_2 + i\delta_2),$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in R$ и $\gamma_1, \gamma_2 > 0,\ \psi_j = \psi_j(t),\ \rho_j = \rho_j(t),\ j = 1, 2$. Наконец,

$$\begin{gathered} d_1 + ic_1 = \chi_1 \exp(i\Delta_1),\ d_2 + ic_2 = \chi_2 \exp(i\Delta_2), \Theta(t) = \psi_2(t) - 2\psi_1(t), \\ \Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}, \delta_2 - 2\delta_1 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}, \gamma_2\chi_1 = 1,\ \gamma_1^2\chi_2 = \gamma_2. \end{gathered}$$

Отметим, что аргументы Δ_1, Δ_2 можно выбрать так, чтобы $\Delta \in [0; \pi)$.

В результате получим замкнутую систему дифференциальных уравнений для $\rho_1(t), \rho_2(t), \Theta(t)$ следующего вида

$$\begin{gathered} \dot{\rho}_1 = \varepsilon[-g\rho_1 + \rho_1\rho_2 \cos(\Theta + \Delta)], \quad \dot{\rho}_2 = \varepsilon[-g\rho_2 + \rho_1^2 \cos(\Theta - \Delta)], \\ \dot{\Theta} = \varepsilon[a_0 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \sin(\Theta - \Delta) - 2\rho_2 \sin(\Theta + \Delta)], \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $a_0 = a_2 - 2a_1$. Систему (2.5) следует дополнить уравнением для $\psi_1(t)$

$$\dot{\psi}_1 = \sigma + \varepsilon\rho_2 \sin(\Theta + \Delta). \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала замкнутую подсистему (2.5) и найдем состояния равновесия, отличные от тривиального ($\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0$). Координаты такого состояния равновесия находим как решения системы уравнений

$$\begin{gathered} \rho_2 \cos(\Theta + \Delta) = g,\ \rho_1^2 \cos(\Theta - \Delta) = g\rho_2, \\ \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \sin(\Theta - \Delta) + 2\rho_2 \sin(\Theta + \Delta) = a_0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Из двух первых уравнений системы (2.7) находим, что

$$\rho_2 = \frac{g}{\cos(\Theta + \Delta)},\ \rho_1^2 = \frac{g^2}{\cos(\Theta + \Delta)\cos(\Theta - \Delta)}.$$

Из двух последних равенств, в частности, вытекает, что

$$\cos(\Theta + \Delta) > 0,\ \cos(\Theta - \Delta) > 0. \tag{2.8}$$

Поэтому при $\Delta = \pi/2$ система (2.7) решений не имеет и далее этот вариант исключен из рассмотрения. Случай $\Delta = 0$ тривиален, так как приводит к уравнению

$\operatorname{tg}\Theta = a_0/3g$. У него следует выбрать решение $\Theta = \Theta_*$, для которого $\cos\Theta_* > 0$. Перейдем к общему случаю ($\Delta \neq 0, \pi/2$).

После исключения ρ_1, ρ_2 получим уравнение для определения Θ

$$\operatorname{tg}(\Theta - \Delta) + 2\operatorname{tg}(\Theta + \Delta) = a_4,\ a_4 = a_0/g.$$

Преобразования приводят к квадратному уравнению для $y = \alpha \operatorname{tg}\Theta$ ($\alpha = \operatorname{tg}\Delta$)

$$P_2(y) = (1 + \alpha a_4)y^2 + 3(1 + \alpha^2)y + (\alpha^2 - \alpha a_4) = 0, \tag{2.9}$$

у которого, как вытекает из неравенств (2.8), следует искать решения $y \in (-1; 1)$. Из условий $P_2(1) > 0$, $P_2(-1) < 0$ вытекает, что уравнение (2.9) имеет ровно один подходящий корень y_*. Уравнение $\operatorname{tg}\Theta = y_*/\alpha$ имеет на полуинтервале $[0, 2\pi)$ два корня. Подходит тот корень Θ_*, для которого $\cos\Theta_* \cos\Delta > 0$.

Лемма 1. *Пусть $\Delta \neq \pi/2$. Система дифференциальных уравнений (2.5) имеет одно седловое состояние равновесия S. Ему соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (2.5),(2.6) и, следовательно, (2.4).*

При $\Delta = \pi/2$ состояния равновесия отсутствуют.

Завершение доказательства предполагает проверку устойчивости S. Это можно сделать стандартным образом. Линеаризуем (2.5) на состоянии равновесия S. Теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению сводятся к исследованию спектра матрицы Якоби, вычисленной в точке с координатами состояния равновесия. В данном случае приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0,$$

$$P = 4g,\ Q = g^2[1 - 4\frac{y_*^2 - \alpha^4}{\alpha^2(1 - y_*^2)} + \frac{(y_* - \alpha^2)^2}{\alpha^2(1 + y_*)^2}],$$
$$R = -g^3[6 + 4\frac{(y_* + \alpha^2)^2}{\alpha^2(1 - y_*)^2} + 2\frac{(y_* - \alpha^2)^2}{\alpha^2(1 + y_*)^2}].$$

а y_*– корень уравнения (2.9). Ясно, что всегда $P > 0, R < 0$. Поэтому состояние равновесия S всегда седловое.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ нелинейное дифференциальное уравнение (1.3) имеет неустойчивое (седловое) периодическое решение. Для него справедливо асимптотическое представление*

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon(y_1 + \overline{y}_1)e_1 + \varepsilon(y_2 + \overline{y}_2)e_2 + \varepsilon^2 u_2(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2) + o(\varepsilon^2), \tag{2.10}$$

период которого равен $2\pi/\sigma(\varepsilon)$, где $\sigma(\varepsilon) = \sigma + \varepsilon\omega_1 + o(\varepsilon)$. В свою очередь, $\omega_1 = \dfrac{g(y_* + \alpha^2)}{\alpha(1 - y^2)}$ при $\alpha = \operatorname{tg}\Delta \neq 0$ ($\Delta \neq 0$) и $\omega_1 = a_0/3$ при $\alpha = 0$. Наконец, y_* — корень уравнения (2.9).

В равенстве (2.10) $y_1(t)$, $y_2(t)$ — периодическое решение системы дифференциальных уравнений (2.4), а u_2 — решение вспомогательной неоднородной задачи (2.2), в которой следует положить $y_1(t) = z_1(\varepsilon t)\exp(i\sigma t)$, $y_2(t) = z_2(\varepsilon t)\exp(2i\sigma t)$.

3. Доказательство теоремы.

В предыдущем разделе было построено приближенное периодическое решение с периодом близким к $2\pi/\sigma$. Первые три слагаемые в правой части равенства (2.10) определяют такое решение, которое удовлетворяет уравнению (1.3) с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Поэтому положим

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon(y_1+\overline{y}_1)e_1 + \varepsilon(y_2+\overline{y}_2)e_2 + \varepsilon^2 u_2(t,y_1,\overline{y}_1,y_2,\overline{y}_2) + \varepsilon^2 w(t,\varepsilon), \tag{3.1}$$

где последнее слагаемое может быть представлено в виде сходящегося ряда, то есть

$$w(t,\varepsilon) = \sum_{k=3}^{\infty} w_k e_k, \quad w_k = w_k(t,\varepsilon),\ (w,h_j) = 0,\ j = 3,4,5,\ldots$$

Напомним, что в нашем случае предполагается также сходимость рядов

$$\sum_{j=3}^{\infty} w_j\sigma_j^2 e_j,\ \sum_{j=3}^{\infty} \dot{w}_j\sigma_j e_j,\ \sum_{j=3}^{\infty} \ddot{w}_j e_j.$$

в смысле нормы в пространстве H. Для w_k при $\varepsilon \neq 0$ получим последовательность дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_k + \sigma_k^2 w_k + \varepsilon g\dot{w}_k + \varepsilon a\ \sum_{j=3}^{\infty}\alpha_{jk}w_j = \Phi_k,$$

где $k = 3,4,\ldots,\alpha_{jk} = (Be_j,h_k)$,

$$\Phi_k = \frac{1}{\varepsilon^2}(F_2(u,\dot{u}) + F_3(u,\dot{u}) + \varepsilon G_2(u,\dot{u},\varepsilon) + \varepsilon G_3(u,\dot{u},\varepsilon),h_k),$$

а $u = u(t,\varepsilon)$ задано в виде суммы (3.1). Поэтому

$$\Phi_k = \Phi_k(y_1,\overline{y}_1,y_2,\overline{y}_2,w,\dot{w},\varepsilon),\ w = (w_3,w_4,\ldots),\ \dot{w} = (\dot{w}_3,\dot{w}_4,\ldots).$$

Последние уравнения удобно переписать иначе:

$$\begin{gathered}\ddot{w}_k + \sigma_k^2 w_k + \varepsilon g\dot{w}_k + \varepsilon a\sum_{j=3}^{\infty}\alpha_{kj}w_j = \\ = \varepsilon F_{2k}(y_1,\overline{y}_1,y_2,\overline{y}_2,w,\dot{w}) + \varepsilon^2 F_{0k}(y_1,\overline{y}_1,y_2,\overline{y}_2,w,\dot{w},\varepsilon),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $F_{2k} = \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$. Откуда следует уточнение структуры функционала F_{2k}. Его можно представить в виде суммы

$$F_{2k}(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, w, \dot{w}) = y_1 \sum_{j=3}^{\infty} \beta_{1kj} w_j + \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} \overline{\beta}_{1kj} w_j +$$
$$+ y_2 \sum_{j=3}^{\infty} \beta_{2kj} w_j + \overline{y_2} \sum_{j=3}^{\infty} \overline{\beta}_{2kj} w_j + y_1 \sum_{j=3}^{\infty} \nu_{1kj} \dot{w}_j +$$
$$+ \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} \overline{\nu}_{1kj} \dot{w}_j + y_2 \sum_{j=3}^{\infty} \nu_{2kj} \dot{w}_j + \overline{y}_2 \sum_{j=3}^{\infty} \overline{\nu}_{2kj} \dot{w}_j .$$

Коэффициенты $\beta_{1kj}, \beta_{2kj}, \nu_{1kj}, \nu_{2kj} \in C$.

При формировании системы дифференциальных уравнений (3.2) учтено, что первые три слагаемых в равенстве (3.1) формируют приближенное решение уравнения (1.3). Их сумма удовлетворяет этому уравнению с точностью до членов, имеющих порядок $o(\varepsilon^2)$. В частности, поэтому в левой части уравнений системы (3.2) отсутствуют слагаемые $\varepsilon a \alpha_{k1} y_1, \varepsilon a \alpha_{k2} y_2$ и им сопряженные. Наконец, пусть

$$\Phi_{0k} = \Phi_{0k}(w) = a \sum_{j=3}^{\infty} \alpha_{kj} w_j .$$

Положим

$$w_k = -\frac{v_{1k}}{\sigma_k},\ \dot{w}_k = v_{2k},\ \eta_k = v_{1k} + i v_{2k},\ k = 3, 4, 5, \ldots,$$
$$v_1 = (v_{13}, v_{14}, \ldots), v_2 = (v_{23}, v_{24}, \ldots),\ \eta = (\eta_3, \eta_4, \eta_5, \ldots).$$

Система дифференциальных уравнений (3.2) сначала перепишется в виде следующей системы первого порядка

$$\begin{gathered} \dot{v}_{1k} = -\sigma_k v_{2k}, \\ \dot{v}_{2k} = \sigma_k v_{1k} - 2\varepsilon g v_{2k} + \varepsilon F_{2k}(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, v_1, v_2) + \\ + \varepsilon^2 F_{0k}(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, v_1, v_2, \varepsilon) - \varepsilon \Phi_{0k}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

а затем система (3.3) перепишется уже в комплексной форме

$$\begin{gathered} \dot{\eta}_k = i\sigma_k \eta_k - \varepsilon g \eta_k + \varepsilon g \overline{\eta}_k + \\ + i\varepsilon F_{2k}(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, \frac{\eta + \overline{\eta}}{2}, \frac{\eta - \overline{\eta}}{2i}) + i\varepsilon \Phi_{0k} + O(\varepsilon^2). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $k = 3, 4, 5, \ldots$, а

$$F_{2k}(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, \frac{\eta + \overline{\eta}}{2}, \frac{\eta - \overline{\eta}}{2i}) = y_1 \sum_{j=3}^{\infty} a_{1kj} \eta_j + \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} b_{1kj} \eta_j +$$
$$+ y_1 \sum_{j=3}^{\infty} c_{1kj} \overline{\eta}_j + \overline{y}_1 \sum_{j=3}^{\infty} d_{1kj} \overline{\eta}_j + y_2 \sum_{j=3}^{\infty} a_{2kj} \eta_j + \overline{y}_2 \sum_{j=3}^{\infty} b_{2kj} \eta_j +$$
$$+ y_2 \sum_{j=3}^{\infty} c_{2kj} \overline{\eta}_j + + \overline{y}_2 \sum_{j=3}^{\infty} d_{2kj} \overline{\eta}_j ,$$

где комплексные коэффициенты в правой части последнего равенства могут быть явно выражены через коэффициенты функционала F_{2k}, но приводить их здесь не будем, так как они не будут далее использоваться. Однако отметим, что при любом наборе индексов справедливы равенства

$$d_{1kj} = \overline{a}_{1kj},\ c_{1kj} = \overline{b}_{1kj},\ d_{2kj} = \overline{a}_{2kj},\ c_{2kj} = \overline{b}_{2kj}.$$

Наконец, после замен и перехода к комплексной форме записи в формуле (3.4)

$$\Phi_{0k} = \frac{ia}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\alpha_{kj}}{\sigma_j}\eta_j + \frac{ia}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\alpha_{kj}}{\sigma_j}\overline{\eta}_j.$$

Систему дифференциальных уравнений (3.4) можно еще раз преобразовать, положив для этого

$$\begin{gathered}\eta_k = y_k + \varepsilon\Big[(\sum_{j=3}^{\infty}\gamma_{kj}y_j + \sum_{j=3}^{\infty}\delta_{kj}\overline{y}_j) + (y_1\sum_{j=3}^{\infty}\gamma_{1kj}y_j + \overline{y}_1\sum_{j=3}^{\infty}\delta_{1kj}y_j + \text{к.с.}) + \\ +(y_2\sum_{j=3}^{\infty}\gamma_{2kj}y_j + \overline{y}_2\sum_{j=3}^{\infty}\delta_{2kj}y_j + \text{к.с.})\Big],\ k = 3, 4, 5, \ldots,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где через к.с. обозначены комплексно-сопряженные слагаемые к двум им непосредственно предшествующим.

При соответствующем выборе коэффициентов замены (3.5) систему дифференциальных уравнений (3.4) можно привести к виду

$$\dot{y}_k = i\sigma_k y_k + \varepsilon(-g + ia_k)y_k + \varepsilon^2 G_k(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}, \varepsilon), \tag{3.6}$$

где $k = 3, 4, 5, \ldots, a_k = \alpha_{kk}/(2\sigma_k), y = (y_3, y_4, y_5, \ldots), \overline{y} = (\overline{y}_3, \overline{y}_4, \overline{y}_5, \ldots)$, а функционалы $G_k = G_k(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}, \varepsilon)$ гладко зависят от своих аргументов. Все производные первого порядка функционала G_k непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют по $y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}$ условию Липшица. Соответствующие производные (производные Фреше) действуют из H_{kA} в H_k. Для вывода уравнения (3.6) следует коэффициенты в заменах (3.5) выбрать как решение ниже указанного семейства уравнений. Правую группу этого семейства составляют уравнения вида

$$i\sigma_j\gamma_{kj} = i\sigma_k\gamma_{kj} + ia\frac{\alpha_{kj}}{2\sigma_j},$$

если $j \neq k, j, k = 3, 4, 5, \ldots$. Из этих уравнений γ_{kj} находим однозначно. При $j = k$ напротив соответствующее уравнение решений не имеет. Поэтому второе слагаемое в правой части (3.6) осталось неизменным.

Вторая группа для определения коэффициентов δ_{kj}, при $j \neq k$

$$-i\sigma_j\delta_{kj} = i\sigma_k\delta_{kj} + ia\frac{\alpha_{kj}}{2\sigma_j}.$$

Эти уравнения разрешимы при всех j, k. При $j = k$ имеем уравнение

$$-i\sigma_k\delta_{kk} = i\sigma_k\delta_{kk} + ia\frac{\alpha_{kk}}{2\sigma_k} + g,$$

которое также имеет решение. Остальные коэффициенты находятся как решения следующих уравнений

$$\begin{array}{l}(i\sigma_1 + i\sigma_j - i\sigma_k)\gamma_{1jk} = a_{1jk},\ (-i\sigma_1 + i\sigma_j - i\sigma_k)\delta_{1jk} = b_{1jk},\\ (i\sigma_2 + i\sigma_j - i\sigma_k)\gamma_{2jk} = a_{2jk},\ (-i\sigma_2 + i\sigma_j - i\sigma_k)\delta_{2jk} = b_{2jk},\end{array} \tag{3.7}$$

а также им сопряженных. Здесь $j, k = 3, 4, 5, \ldots$ Все уравнения (3.7) разрешимы в силу предположения 5.

Полная система может быть получена, если систему (3.6) дополнить уравнениями для $y_1, y_2, \overline{y}_1, \overline{y}_2$. Укороченный вариант этих уравнений был выписан в предудущем разделе (см. систему (2.4)).

Итак имеем

$$\begin{array}{c}\dot{y}_1 = i\sigma_1 y_1 + \varepsilon\Big[(-g + ia_1)y_1 + (d_1 + ic_1)y_2\overline{y}_1\Big] + \varepsilon^2 G_1(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}, \varepsilon),\\ \dot{y}_2 = i\sigma_2 y_2 + \varepsilon\Big[(-g + ia_2)y_2 + (d_2 + ic_2)y_1^2\Big] + \varepsilon^2 G_2(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}, \varepsilon),\end{array} \tag{3.8}$$

$$\dot{y}_k = i\sigma_k y_k + \varepsilon(-g + ia_k)y_k + \varepsilon^2 G_k(y_1, \overline{y}_1, y_2, \overline{y}_2, y, \overline{y}, \varepsilon),\ k = 3, 4, 5, \ldots \tag{3.9}$$

Систему уравнений для $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ разделили на две части: подсистему (3.8) и (3.9). Подсистему (3.8) удобно переписать в переменных $\rho_1, \rho_2, \Theta, \psi_1$, как это было сделано при переходе от систему дифференциальных уравнений (2.4) к системе (2.5). Это было сделано в предыдущем разделе. В результате система (3.8), (3.9) перепишется следующим образом при $\rho_1, \rho_2 > 0$ $(\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0)$

$$\dot{\rho}_1 = \varepsilon[-g\rho_1 + \rho_1\rho_2\cos(\Theta + \Delta)] + \varepsilon^2 Q_1,\ \dot{\rho}_2 = \varepsilon[-g\rho_2 + \rho_1^2\cos(\Theta - \Delta)] + \varepsilon^2 Q_2,$$

$$\dot{\Theta} = \varepsilon[a_0 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\sin(\Theta - \Delta) - 2\rho_2\sin(\Theta + \Delta)] + \varepsilon^2 Q_0, \tag{3.10}$$

$$\dot{y}_k = i\sigma_k y_k + \varepsilon[-g + ia_k]y_k + \varepsilon^2 Q_k. \tag{3.11}$$

Здесь постоянные Δ, a_0 были определены в предыдущем разделе, функционалы $Q_p = Q_p(\rho_1, \rho_2, \Theta, \psi_1, y, \overline{y}, \varepsilon)$ гладко зависят от своих аргументов при $\rho_1, \rho_2 > 0, \Theta, \psi_1 \in R$, а также всех y, для которых конечна норма $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{|y_j|}{\sigma_j}$. От переменных Θ, ψ_1 они зависят периодическим образом, имея при этом период 2π. Добавим к системе уравнение для ψ_1

$$\dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon\rho_2\sin(\Theta + \Delta) + \varepsilon^2 R_0, \tag{3.12}$$

где $R_0 = R_0(\rho_1, \rho_2, \Theta, \psi_1, y, \overline{y}, \varepsilon)$ и свойства этого функционала аналогичны свойствам функционалов Q_p. Вместе с системой (3.10), (3.11),(3.12) рассмотрим «укороченную» систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{\rho}_1 = \varepsilon[-g\rho_1 + \rho_1\rho_2\cos(\Theta+\Delta)],\ \dot{\rho}_2 = \varepsilon[-g\rho_2 + \rho_1^2\cos(\Theta-\Delta)],\\ \dot{\Theta} = \varepsilon[a_0 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\sin(\Theta-\Delta) - 2\rho_2\sin(\Theta+\Delta)],\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\dot{y}_k = i\sigma_k y_k + \varepsilon[-g + ia_k]y_k\ k = 3, 4, 5, \ldots, \tag{3.14}$$

$$\dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon\rho_2\sin(\Theta+\Delta). \tag{3.15}$$

Укороченная система дифференциальных уравнений (3.13), (3.14) имеет седловое состояние равновесия S_0 :

$$\rho_2 = \rho_{20} = \frac{g}{\cos(\Theta_* + \Delta)},\ \rho_1 = \rho_{10} = \frac{g}{\sqrt{\cos(\Theta_*+\Delta)\cos(\Theta_*-\Delta)}},\ y_k = 0, \tag{3.16}$$

где Θ_* — корень, найденный с помощью анализа вспомогательного уравнения (2.9), если, конечно, $\Delta \neq \pi/2, k = 3, 4, 5$. Собственные значения оператора Якоби, полученного после линеаризации системы (3.13),(3.14) обозначим через $\lambda_0(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon), \lambda_3(\varepsilon), \ldots$. При этом Re $\lambda_k(\varepsilon) = -\varepsilon g < 0,\ k = 3, 4, 5, \ldots$, а собственные числа $\lambda_j(\varepsilon) = \varepsilon\mu_j$, где $j = 0, 1, 2$, а μ_j собственные числа матрицы Якоби вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5), вычисленная в точке $\rho_1 = \rho_{10}, \rho_2 = \rho_{20}, \Theta = \Theta_*$, то есть на ее состоянии равновесия S. Состояние равновесия (3.16) системы дифференциальных уравнений (3.13),(3.14) порождает цикл l_0 «полной» системы (3.13),(3.14), (3.15). Из результатов работ [19-21] вытекает, что грубому циклу l_0 соответствует цикл возмущенной системы (3.10),(3.11),(3.12) и, конечно, системы дифференциальных уравнений (3.8), (3.9). При использовании результатов работ [19-21] следует учесть, что речь идет о тех их разделах, где изучается вопрос о сохранении инвариантных торов при возмущении, (см. [21], а также §2 из [19]) а также то обстоятельство, что система дифференциальных уравнений (3.8), (3.9) может быть включена в класс рассматриваемых там уравнений. Уместно, пояснить, что в упомянутых работах изучен вопрос о сохранении торов произвольной размерности. В данной работе ситуация даже проще, так как изучается вопрос о о сохранении цикла, то есть "одномерного"тора. Подробное изложение вопроса о сохранении инвариантных торов при возмущениях можно найти в монографии [22] (см. §2 и §4 гл. 1).

4. О резонансах 1:1 и 1:3

В предыдущих разделах работы показано, что для широкого класса динамических систем с распределенными параметрами, которые могут быть включены в класс абстрактных дифференциальных уравнений (1.1) возможно жесткое, докритическое возбуждение колебаний в случаях близких к реонансу 1:2. В такой класс дифференциальных уравнений входят многие нелинейные краевые задачи теории упругой устойчивости (см., например, краевую задачу (0.1), (0.2)). Жесткое возбуждение колебаний может иметь место и в случаях близких к резонансу 1:1 [8,11-14] и к резонансу 1:3 [9]. При рассмотрении последнего варианта, то есть вблизи резонанса 1:3 следует возвратиться к рассмотрению дифференциального уравнения (1.3) при иных предположениях.

Будем считать, что при $c = c_3 > 0$ линейный оператор $A_3 = A + c_3 B$ имеет простые собственные числа $0 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 < \ldots$ и $\sigma_2 = 3\sigma_1$. Наконец, будем предполагать, что

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_m} \neq 2\left(\frac{1}{2}\right), \quad \frac{\sigma_k}{\sigma_m} \neq 3\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\sigma_k \neq \sigma_m \pm \sigma_1, \quad \sigma_k \neq \sigma_m \pm \sigma_2, \quad \sigma_k \neq \sigma_m \pm 2\sigma_1$$

ни при каких $k, m \in N$ за одним ранее отмеченным исключением.

Будем предполагать, что

$$F_2(u, \dot{u}) = F_2(u),\ F_3(u, \dot{u}) = F_3(u), b_j(u, \dot{u}, \varepsilon) = b_j(u, \varepsilon), j = 2, 3,$$

то есть все слагаемые правой части уравнения (1.3) не зависят от $\dot{u}$. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + 2\varepsilon g\dot{u} + (A_3 + \varepsilon aB)\, u = F_2(u) + F_3(u) + \varepsilon\left[b_2(u, \varepsilon) + b_3(u, \varepsilon)\right], \tag{4.1}$$

Пусть e_j собственные элементы линейного оператора A_3, отвечающие собственным числам $\sigma_j^2, j = 1, 2, 3, \ldots$. Через h_j обозначим собственные элементы сопряженного оператора A_3^*, соответствующие тем же собственным числам σ_j^2, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Будем предполагать что $\{e_j\}$ базис Рисса и его элементы биортогональны элементам системы $\{h_k\} : (e_j, h_k) = \delta_{kj}$ – символ Кронекера [17-18].

Для того, чтобы найти решения с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$, будем искать те решения, для которых справедливо представление $(s = \varepsilon t)$

$$u(t, s) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, s) + \varepsilon u_2(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, s) + \varepsilon^2 u_4(t, s) + O(\varepsilon^{5/2}), \tag{4.2}$$

$$u_1(t, s) = \sum_{j=1}^{2} (z_j(s)\exp(i\sigma_j t) + \overline{z}_j(s)\exp(-i\sigma_j t))e_j,$$

Подставляя сумму (4.2) в уравнение (4.1) и, последовательно приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}, \ldots$, получим рекуррентную последовательность неоднородных краевых задач. Условия их разрешимости в классе тригонометрических многочленов по переменной t, а также построения близкие к фрагментам доказательств теоремы 1 приводят к системе дифференциальных уравнений в W_1 ($a \in W_1$, если $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 < \infty$). В данном случае эти уравнения, а точнее их главную часть, удается записать в виде [9]

$$\begin{aligned} z_1' &= (-g + i\beta_1)z_1 + ia_{11} z_1 |z_1|^2 + ia_{12} z_1 |z_2|^2 + ia_{13} \overline{z}_1^2 z_2, \\ z_2' &= (-g + i\beta_2)z_2 + ia_{21} z_2 |z_1|^2 + ia_{22} z_2 |z_2|^2 + ia_{23} z_1^3, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$z_k' = (-g + i\beta_k) + iz_k(a_{k1}|z_1|^2 + a_{k2}|z_2|^2),\ k = 3, 4, 5, \dots\ . \tag{4.4}$$

Здесь $\beta_k \in R,\ a_{jk} \in R$. Эти коэффициенты определяются в процессе реализации алгоритма построения квазинормальной формы.

Замечание 2. Случай, когда нелинейные слагаемые в уравнении (4.1) не зависят от $\dot{u}$ достаточно типичен. Например, в задаче о нелинейном панельном флаттере он реализуется, если учет аэродинамических сил был произведен по "квазистационарному"варианту закона "плоских сечений"[1,24]. В более общем варианте постановке задачи, когда нелинейные слагаемые зависят от $\dot{u}$, получаем нормальную форму (4.3), в которой ее коэффициенты $a_{jk} \in C$, а не R, как в работе [9]. В таком случае требуется более детальное изучение системы уравнений (4.3) по сравнению с изложенным ниже.

Замены $z_k(s) = \rho_k(s)\exp(i\Theta_k(s))$ $(k = 3, 4, 5\dots)$ позволяют записать группу уравнений (4.4) в виде

$$\rho_k' = -g\rho_k,\ \Theta_k' = \beta_k + a_{k1}|z_1|^2 + a_{k2}|z_2|^2.$$

Откуда получаем $\rho_k(s) = \rho_k(0)\exp(-gs)$ и, следовательно, $\lim\limits_{s\to\infty} z_k(s) = 0$.

Для изучения замкнутой подсистемы (4.3) целесообразно сделать замены

$$\tau = gs,\ z_j(\tau) = \gamma_j\rho_j(\tau)\exp(i\Theta_j(\tau)),\ j = 1, 2,$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ и будут выбраны ниже. В обобщенных полярных координатах уравнения (4.3) перепишутся в виде

$$\begin{gathered}\rho_1' = -\rho_1 + \gamma_0\rho_1^2\rho_2\sin\Theta,\ \rho_2' = -\rho_2 + \rho_1^3\sin\Theta,\\ \Theta_1' = b_{10} + b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2 - \gamma_0\rho_1\rho_2\cos\Theta,\\ \Theta_2' = b_{20} + b_{21}p_1^2 + b_{22}\rho_2^2 + \frac{\rho_1^3}{\rho_2}\cos\Theta,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $\Theta = \Theta(\tau) = \Theta_2(\tau) - 3\Theta_1(\tau)$. Вычитая из последнего уравнения утроенное предпоследнее, получаем замкнутую подсистему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\rho_1' = -\rho_1 + \gamma_0\rho_1^2\rho_2\sin\Theta,\ \rho_2' = -\rho_2 + \rho_1^3\sin\Theta,\\ \Theta' = b_0 + b_1\rho_1^2 + b_2\rho_2^2 + \left(\frac{\rho_1^3}{\rho_2} + 3\gamma_0\rho_1\rho_2\right)\cos\Theta.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь и в системе (4.5)

$$\begin{gathered}b_{11} = \frac{a_{11}\gamma_{12}}{g},\ b_{12} = \frac{a_{12}\gamma_2^2}{g},\ b_{21} = \frac{a_{21}\gamma_1^2}{g},\ b_{22} = \frac{a_{22}\gamma_2^2}{g},\\ b_{10} = \frac{\beta_1}{g},\ b_{20} = \frac{\beta_2}{g},\ \gamma_0 = -\frac{a_{13}\gamma_1\gamma_2}{g},\\ b_1 = b_{21} - 3b_{11},\ b_2 = b_{22} = -3b_{12},\ b_0 = b_{20} - 3b_{10}.\end{gathered}$$

При $a_{13}, a_{23} \neq 0$ постоянные γ_1, γ_2 выбираем так, чтобы были выполнены равенства

$$|\gamma_0| = 1,\ \gamma_2 = \frac{a_{23}\gamma_1^2}{g}.$$

Если $a_{13}a_{23} = 0$, то анализ системы дифференциальных уравнений (4.3) аналогичен. Поэтому ограничимся изложением общего случая.

Система дифференциальных уравнений (4.6) [9] имеет одно состояние равновесия, если выполнено одно из трех условий

$$a)\ (b_1+b_2)^2 < 16,\quad b)\ (b_1+b_2)^2 = 16,\ b_0(b_1+b_2) < 0,$$
$$c)\ b_0^2 + 16 = (b_1+b_2)^2,\ b_0(b_1+b_2) < 0.$$

Их два, если $(b_1+b_2)^2 > 16, b_0(b_1+b_2) < 0, (16+b_0)^2 > (b_1+b_2)^2$. При иных вариантах выбора b_0, b_1, b_2 состояния равновесия отсутствуют. В работе [9] также показано, что если состояние равновесия одно, то оно неустойчиво, если их два, то одно из них обязательно неустойчиво. Как и ранее, каждому грубому состоянию равновесия нормальной формы (3.6) соответствует цикл дифференциального уравнения (4.1) с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$ с наследованием свойств устойчивости. Всё это вместе означает, что для уравнения (4.1) при указанных ограничениях характерно жесткое возбуждение колебаний (бифуркации неустойчивых периодических решений в докритическом случае).

В случае близком к резонансу 1:1 задача о бифуркациях малых периодических решений может быть сведена к исследованию нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [8,14]

$$z'' + gz' + (q_1 + iq_2)z + (Q_1 + iQ_2)z|z|^2 = 0$$

для комплекснозначной функции $z(s)$ $(s = \varepsilon t)$. У последнего дифференциального уравнения для достаточно широкого набора параметров $q_1, q_2, Q_1, Q_2 \in R$ существует неустойчивое периодическое решение.

Отметим, что случай резонанса 1:2 имеет отличия от иных резонансов (1:1, 1:3). В случае близком к резонансу 1:2 практически всегда существуют неустойчивые периодические решения.

5. Заключение

В работе показано, что в случае близком к резонансу 1:2 для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве реализуется жесткое и докритическое возбуждение колебаний. Этот вывод, в частности, означает, что "практическая"неустойчивость может проявить себя ранее того момента, когда нулевое решение потеряет устойчивость в строгом математическом смысле. Если обратиться к задаче о нелинейном панельном флаттере, то при скоростях потока газа меньших скорости флаттера возможно жесткое возбуждение колебаний. В монографии [1;гл. 4] отмечалось, что докритические колебания часто наблюдались в экспериментах.

Прикладные аспекты данных результатов были изложены в докладах на IX и X съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в Нижнем Новгороде (см. [23], где изложены материалы последнего доклада). Часть результатов была изложена в докладе на Всероссийской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложениям (Рязань, 2006, см. [14]).

Список цитируемых источников

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматлит,1961. — 337 с.
2. *Гукенхеймер Дж.,Холмс Ф.* Нелинейные колебания динамических систем и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований,2002. — 559 с.
3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. — М.: Наука,1979. — 320 с.
4. *Монвель Л.,Чуешов И.Д.* О колебаниях кармановесной пластинки в потенциальном потоке газа // Известия РАН. Сер. матем. — 1999. — Т. 63. — №2. —Р. 3–28.
5. *Куликов А.Н., Либерман Б.Д.* О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера // Вестник Яросл.-го ун-та. / Под ред. Ю.С. Колесова. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 118–133.
6. *Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И.* Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // Прикл. математика и механика. — 1978. — Т. 42. — №3. —С. 458–465.
7. *Куликов А. Н.* Исследование некоторых классов уравнений гиперболического типа, встречающихся в теории упругой устойчивости и радиофизике: Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Ростов-на-Дону, 1977.
8. *Куликов А.Н.* Бифуркация автоколебаний пластинки при малом коэффициенте демпфирования в свехзвуковом потоке газа // Прикл. математика и механика. — 2009. — Т. 73. — №2. — С. 271–281.
9. *Куликов А.Н.* Резонанс 1:3 – одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51. — №7. — С. 1266–1279.
10. *Бекбулатова А.О.,Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний // Совр. пробл. математики и информатики — 2002. — №5. — С. 22–27.
11. *Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28. — №6. — С. 1080–1082.
12. *Куликов А.Н.* Об одном аналоге бифуркационной теоремы Хопфа в задаче о математическом исследовании нелинейного панельного флаттера при малом коэффициенте затухания // Дифференц. уравн. — 1993. — Т. 29. — №5. — С. 780–785.
13. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем // Труды МиАН. —2008. — Т. 261. — С. 154–175.

14. *Куликов А.Н.* Жесткое возбуждение колебаний характерно для флаттера при малом коэффициенте демпфирования // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 29. — №11. — С. 131–134.
15. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука,1977. — 464 с.
16. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды ММО. —1970. — Т. 23. — С. 154–175.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. — М.: Наука,1965. — 448 с.
18. *Неймарк М.А.* Линейный дифференциальные операторы. — М.: Наука,1969. — 526 с.
19. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 2003. — 105 с.
20. *Колесов А.Ю.,Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференц. уравн. — 2003. — Т. 39. — №5. — С. 584–601.
21. *Колесов А.Ю.,Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференц. уравн. — 2003. — Т. 39. — №6. — С. 738–753.
22. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004. — 405 с.
23. *Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер. Резонансы собственных частот — одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний // Вестник Нижегородского ун-та. — 2011. — Т. 4. — №2. — С. 193–194.
24. *Dowell E.* Flutter of panels at high supersonic speeds // AIAAJ. Vac. Technol. — 1964. — V. 2. — №10. — P. 1113–1119.
25. *Holmes P.J.,Marsden J.E.* Bifurcations to divergence and flutter in flow induced oscillation - an infinite dimensional analisis // Automatica. — 1978. — V. 14. — №4. — P.367–384.
26. *Paidoussis M.P.* Dynamical of flexible slender cylinders in axial flow // J. Fluid Mech. — 1966. — V. 26. — №4. — P. 737–751.
27. *Kulikov A. N.* Resonance of proper frequence 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate ultrasonic gas // Тр. Междунар. конгресса ENOC-2008. — Russia,Saint-Petersburg: Saint-Petersburg, 2008. — P. 1636–1643.
28. *Segal J.* Nonlinear Semigroups // Ann. of Math. — 1963. — V. 78. — P. 339–364.
29. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — Berlin: Springer-Verlag, 1966. — 740 с.

Получена 30.09.2011 Переработана 03.12.2012