

УДК 539.182+518.5

# Хвильові розв'язки моделі середовища з осциляторами Ван дер Поля

В. А. Даниленко, С. І. Скуратівський

Інститут геофізики ім.С.І.Субботіна НАН України, Відділення геодинаміки вибуху  
Київ 03680. E-mail: skurserg@rambler.ru

**Анотація.** У роботі розглядається одновимірна математична модель складного середовища, яка складається із хвильового рівняння для основного середовища та, зв'язаних з ним, рівнянь Ван дер Поля для коливних включень. Використовуючи метод Боголюбова-Митропольського, побудовані хвильові розв'язки слабконелінійної моделі. Методами якісного та числового аналізу за допомогою знайдених асимптотичних розв'язків досліджено сценарії утворення квазіперіодичних та мультиперіодичних хвильових режимів моделі в сильнонелінійній області.

**Ключові слова:** нелінійні хвилі, осцилятор Ван дер Поля, тор.

## Вступ

Більшість природних середовищ являють собою ієрархічні утворення структурних елементів, динамікою яких за певних умов навантаження не можна знехтувати [9]. Для опису таких середовищ зі структурою використовується математична модель у вигляді сукупності двох континуумів — основного середовища та, зв'язаних з ним, часткових осциляторів [10, 7]. Поширення цих моделей на нелінійні середовища було проведено в роботах [4, 13, 11], в яких урахувались нелінійні властивості основного середовища, а динаміка коливних включень лишалась лінійною.

У даній роботі досліджується випадок лінійного основного середовища у поєднанні з нелінійною динамікою осциляторів. Тоді математична модель складного середовища матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, & \sigma &= \frac{E}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + F_k(w_k - u) &= 0, & k &= 1..N, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u$  — зміщення основного середовища густини  $\rho$ ;  $\sigma$  — напруження;  $E$  — модуль пружності Юнга;  $w_k$  — зміщення осцилюючого включення густини  $m_k \rho$  з власною частотою  $\omega_k$ ;  $t$  та  $x$  — часова та просторова змінні.

Оператор  $F_k$ , який описує динаміку часткового осцилятора, означимо наступним чином  $F_k(y) = -(\lambda_k - \mu_k y^2) \frac{\partial y}{\partial t} + \omega_k^2 y$ ,  $k = 1..N$ , тобто коливне включення розглядається як сукупність осциляторів Ван дер Поля.

Виконаємо знерозмірення моделі (1), використовуючи характерні величини  $\tau$ ,  $c_0$ ,  $u_0$ , за формулами  $t \rightarrow \tau t$ ,  $x \rightarrow \tau c_0 x$ ,  $u \rightarrow u_0 u$ ,  $w \rightarrow u_0 w$ ,  $\lambda_k \rightarrow \lambda_k \tau^{-1}$ ,  $\omega_k \rightarrow \omega_k \tau^{-1}$ ,  $\mu_k = \lambda_k \tau^{-1} u_0^{-2}$ , тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \lambda_k [1 - (w_k - u)^2] \frac{\partial (w_k - u)}{\partial t} + \omega_k^2 (w_k - u) = 0,$$

де  $c^2 = E \rho^{-1} c_0^{-2}$ .

Розглянемо хвильові розв'язки моделі (2)

$$u = U(s), \quad w_k = W_k(s), \quad s = x + Dt \quad (3)$$

та проаналізуємо залежність структури розв'язку (3) від параметрів  $\lambda_k$ ,  $D$ .

## 1. Побудова асимптотичного розв'язку моделі (2)

Підставляючи вирази (3) в систему (2), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$D^2 W_k'' + F_k (W_k - U) = 0, \quad U = \sum_{j=1}^N \varphi_j W_j, \quad (4)$$

де  $\varphi_j = \frac{D^2}{c^2 - D^2} m_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $(\cdot)' = d(\cdot)/ds$ .

Динамічна система (4) належить до класу моделей зв'язаних осциляторів. Основний інтерес у дослідженнях цих моделей становлять нові ефекти, які зумовлені типом взаємодії між частковими осциляторами. Як правило, в цих моделях розрізняють зв'язок осциляторів з найближчим сусідом [15, 6] або глобально зв'язані осцилятори через середнє поле [8, 14]. Система (4) є прикладом останнього випадку. Основними засобами вивчення таких моделей є асимптотичні та числові методи.

На початковому етапі вивчення системи (4) обмежимо кількість осциляторів до  $N = 2$ . Тоді система (4) у розгорнутому вигляді зводиться до двох глобально сильнозв'язаних осциляторів Ван дер Поля

$$W_1' = Z_1,$$

$$Z_1' = \alpha_1 \left( 1 - \left( W_1 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i W_i \right)^2 \right) \left( Z_1 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i Z_i \right) - \Omega_1^2 \left( W_1 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i W_i \right), \quad (5)$$

$$W_2' = Z_2,$$

$$Z_2' = \alpha_2 \left( 1 - \left( W_2 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i W_i \right)^2 \right) \left( Z_2 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i Z_i \right) - \Omega_2^2 \left( W_2 - \sum_{i=1}^2 \varphi_i W_i \right),$$

де  $\alpha_k = \lambda_k D^{-1}$ ,  $\Omega_k = \omega_k D^{-1}$ .

Розглянемо слабконелінійний випадок, коли  $\alpha_k = \varepsilon \alpha_k$ , де  $\varepsilon \ll 1$ . У цьому випадку до системи (5) можна застосувати метод Боголюбова-Митропольського [3, 2]. При  $\varepsilon = 0$  розв'язки системи (5) шукаємо у вигляді

$$W_1 = a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2, \quad W_2 = ar_1 \sin \theta_1 + br_2 \sin \theta_2, \quad (6)$$

де  $a, b, k_i, \beta_i$  — сталі,  $\theta_i = k_i s + \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Підставляючи (6) у (5) при  $\varepsilon = 0$ , отримаємо систему лінійних рівнянь відносно  $r_i$ , умовою сумісності якої є рівняння

$$\begin{vmatrix} k^2 + \Omega_1^2(\varphi_1 - 1) & \Omega_1^2 \varphi_2 \\ \Omega_2^2 \varphi_1 & k^2 + \Omega_2^2(\varphi_2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Дійсні розв'язки рівняння (7) визначають частоти  $k_1$  та  $k_2$  розв'язку (6):

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\Omega_1^2(1 - \varphi_1) + \Omega_2^2(1 - \varphi_2) \pm \sqrt{[\Omega_1^2(1 - \varphi_1) + \Omega_2^2(1 - \varphi_2)]^2 + 4\Omega_1^2\Omega_2^2(\varphi_1 + \varphi_2 - 1)}}{2}}.$$

Тоді

$$r_1 = -\frac{k_1^2 + \Omega_1^2(\varphi_1 - 1)}{\Omega_1^2 \varphi_2}, \quad r_2 = -\frac{k_2^2 + \Omega_1^2(\varphi_1 - 1)}{\Omega_1^2 \varphi_2}.$$

При малому  $\varepsilon \neq 0$  вважатимемо, що розв'язок системи (5) визначається виразами (6), у яких  $a, b, \beta_i$  є функціями "повільної" змінної  $\varepsilon s$ . Також приймемо, що

$$\frac{dW_1}{ds} = ak_1 \cos \theta_1 + bk_2 \cos \theta_2, \quad \frac{dW_2}{ds} = ar_1 k_1 \cos \theta_1 + br_2 k_2 \cos \theta_2, \quad (8)$$

за додаткової умови

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} \sin \theta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} a \cos \theta_1 + \frac{db}{ds} \sin \theta_2 + \frac{d\beta_2}{ds} b \cos \theta_2 &= 0, \\ \frac{da}{ds} r_1 \sin \theta_1 + \frac{d\beta_1}{ds} ar_1 \cos \theta_1 + \frac{db}{ds} r_2 \sin \theta_2 + \frac{d\beta_2}{ds} br_2 \cos \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи (6), (8) у (5) з урахуванням (7) отримаємо наступну систему в нормальній формі

$$\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \frac{\varepsilon}{k_1(r_1 - r_2)} (g - fr_2) \cos \theta_1, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{\varepsilon}{k_2(r_1 - r_2)} (g - fr_1) \cos \theta_2, \\ \frac{d\beta_1}{ds} &= -\frac{\varepsilon}{ak_1(r_1 - r_2)} (g - fr_2) \sin \theta_1, \quad \frac{d\beta_2}{ds} = \frac{\varepsilon}{bk_2(r_1 - r_2)} (g - fr_1) \sin \theta_2, \end{aligned}$$

де вирази  $f$  та  $g$  — коефіцієнти при  $\varepsilon$  в системі (4), обчислені з використанням співвідношень (6), (8).

Після осереднення за змінними  $\theta_{1,2}$  отримаємо

$$\frac{da}{ds} = \frac{a\varepsilon}{8(r_1 - r_2)} [\alpha_2 A_1 (a^2 A_1^2 + 2b^2 B_1^2 - 4) - \alpha_1 A_2 r_2 (a^2 A_2^2 + 2b^2 B_2^2 - 4)],$$

$$\frac{db}{ds} = -\frac{b\varepsilon}{8(r_1 - r_2)} [\alpha_2 B_1 (2a^2 A_1^2 + b^2 B_1^2 - 4) - \alpha_1 B_2 r_1 (2a^2 A_2^2 + b^2 B_2^2 - 4)],$$

де  $A_1 = \varphi_1 + (\varphi_2 - 1)r_1$ ,  $A_2 = \varphi_1 - 1 + \varphi_2 r_1$ ,  $B_1 = \varphi_1 + (\varphi_2 - 1)r_2$ ,  $B_2 = \varphi_1 - 1 + \varphi_2 r_2$ . Домножимо перше та друге рівняння динамічної системи на  $a$  та  $b$  відповідно і запишемо її у формі

$$\begin{aligned} \frac{da^2}{ds} &= \frac{a^2\varepsilon [\alpha_2 A_1^3 - A_2^3 \alpha_1 r_2] + b^2 (2A_1 \alpha_2 B_1^2 - 2A_2 \alpha_1 B_2^2 r_2) + 4A_2 \alpha_1 r_2 - 4A_1 \alpha_2}{4(r_1 - r_2)}, \\ \frac{db^2}{ds} &= -\frac{b^2\varepsilon [2A_1^2 \alpha_2 B_1 - 2A_2^2 \alpha_1 B_2 r_1] + b^2 (\alpha_2 B_1^3 - \alpha_1 B_2^3 r_1) + 4\alpha_1 B_2 r_1 - 4\alpha_2 B_1}{4(r_1 - r_2)} \end{aligned} \quad (10)$$

За допомогою заміни змінних  $a^2 = x \geq 0$ ,  $b^2 = y \geq 0$  та масштабного перетворення

$$\nu \varepsilon s = T, \quad x \rightarrow x\xi, \quad y \rightarrow y\eta,$$

$$\xi = -\frac{4A_2 \alpha_1 r_2 - 4A_1 \alpha_2}{\alpha_2 A_1^3 - A_2^3 \alpha_1 r_2}, \quad \eta = -\frac{2A_2 \alpha_1 r_2 - 2A_1 \alpha_2}{A_1 \alpha_2 B_1^2 - A_2 \alpha_1 B_2^2 r_2}, \quad \nu = -\frac{A_2 \alpha_1 r_2 - A_1 \alpha_2}{r_1 - r_2}$$

приведемо динамічну систему (10) до вигляду

$$\frac{dx}{dT} = x(x + y - 1), \quad \frac{dy}{dT} = y(\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{2A_1^2 \alpha_2 B_1 - 2A_2^2 \alpha_1 B_2 r_1}{\alpha_2 A_1^3 - A_2^3 \alpha_1 r_2}, & \mu_2 &= -\frac{\alpha_2 B_1^3 - \alpha_1 B_2^3 r_1}{2(A_1 \alpha_2 B_1^2 - A_2 \alpha_1 B_2^2 r_2)}, \\ \mu_3 &= -\frac{\alpha_1 B_2 r_1 - \alpha_2 B_1}{A_2 \alpha_1 r_2 - A_1 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Варто зазначити, що напрями руху вздовж траєкторій систем (10) та (11) узгоджуються за допомогою знаку параметра  $\nu$ . Якщо  $\nu > 0$ , то напрями співпадають, інакше – вони протилежні, що відповідним чином позначається на ідентифікації типів стійкості точок системи (11). Динамічна система (11) має чотири стаціонарні точки з координатами

$$O(0;0), \quad X(1;0), \quad Y\left(0; \frac{\mu_3}{\mu_2}\right), \quad Q\left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}; \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right).$$

Зі змісту змінних  $x$  та  $y$  випливає, що точки  $Y$  та  $Q$  лежать у першій чверті фазової площині, якщо

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geq 0 \quad \text{та} \quad \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1} \geq 0, \quad \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \geq 0$$

відповідно. Власні значення матриці лінеаризації

$$J(x_0; y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 + y_0 - 1 & x_0 \\ \mu_1 y_0 & \mu_1 x_0 + 2\mu_2 y_0 - \mu_3 \end{pmatrix}$$

- для точки  $O$  дорівнюють  $\lambda_O = (-1; -\mu_3)$ ;
- для точки  $X$  —  $\lambda_X = (1; \mu_1 - \mu_3)$ ;
- для точки  $Y$  —  $\lambda_Y = (\mu_3; \mu_3\mu_2^{-1} - 1)$ ;
- для точки  $Q$  —  $\lambda_Q = \frac{\mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_3 + \mu_2\mu_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(\mu_2 - \mu_1)}$ , де  $\Delta = (\mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_3 + \mu_2\mu_3)^2 + 4(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_3)$ .

Очевидно, що стаціонарні точки  $X$  та  $Y$  відповідають існуванню в системі гармонічних режимів з частотами  $k_1$  та  $k_2$ , точка  $Q$  відповідає бігармонічному режиму.

Як показано в [1], система (11) не має замкнутих траєкторій, оскільки існує функція

$$B(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}, \quad p = \frac{\mu_2 - \mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad q = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - \mu_2},$$

така що

$$G = \frac{\partial}{\partial x}(Bx(x+y-1)) + \frac{\partial}{\partial y}(By(\mu_1x + \mu_2y - \mu_3)) = \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_3 - 1) + \mu_3}{\mu_1 - \mu_2} B.$$

Крива  $G = 0$  не має віток, зокрема, в першій чверті, якщо  $\mu_2(\mu_1 - \mu_3 - 1) + \mu_3 \neq 0$ . Тож за критерієм Дюлака в першій чверті немає замкнутих траєкторій.

Розглянемо залежність коефіцієнтів  $\mu_i$  від швидкості хвильового фронту  $D$  та пов'язані з цим зміни фазових портретів динамічної системи (11). Зазначимо, що  $\mu_i$  — парні функції аргумента  $D$ . З умови, що значення частот  $k_{1,2}$  є дійсними величинами, отримаємо обмеження на параметр  $D$

$$D^2 < \frac{1}{1 + m_1 + m_2} \quad \text{або} \quad D^2 > c^2.$$

Для визначеності зафіксуємо значення параметрів  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 2.1$ ,  $c = 1$  та  $\lambda_1 = 0.7$ ,  $\lambda_2 = 1.3$ . На рисунку 1 зображено графіки коефіцієнтів  $\mu_i$  в залежності від параметра  $D$ . Точки перетину графіків між собою поділяють інтервал зміни параметра  $D$  на області I-VI, яким відповідають фазові площини системи (11) з різною структурою. Проаналізуємо детально кожен область з рисунка 1.

**Область I.** У цій області  $\mu_2 > \mu_3 > \mu_1 > 0$ . Виберемо значення параметра  $D$  з області I, наприклад,  $D = 0.44$ . Тоді фазовий портрет має вигляд рис.2а.

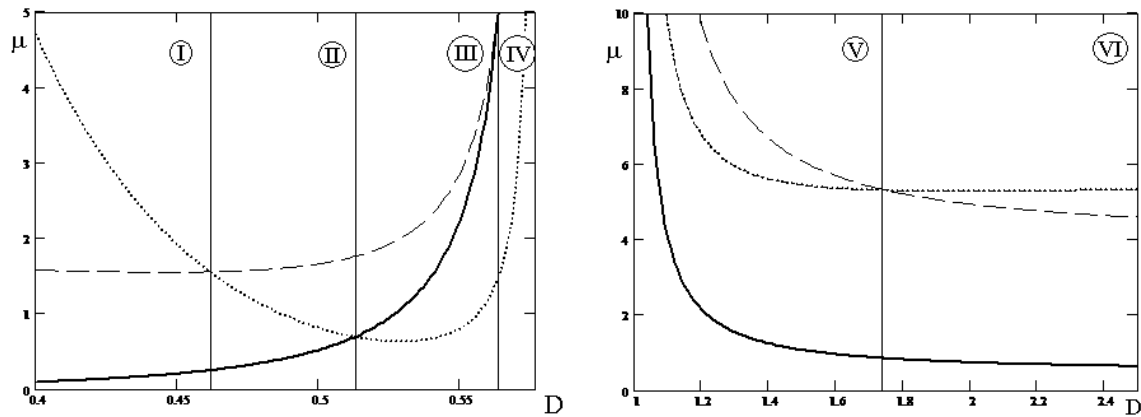


Рис. 1. Залежність коефіцієнтів  $\mu_i$  динамічної системи (11) від параметра  $D$ . Суцільна лінія позначає графік  $\mu_1$ , пунктирна —  $\mu_2$ , штрихова —  $\mu_3$ .

Питання про тип стаціонарної точки  $Q$  розглянемо детальніше. Для цього розглянемо визначник  $\Delta$  матриці  $J(Q)$ , знак якого визначає тип точки  $Q$ . На межі області I  $\mu_2 = \mu_3$  і тоді  $\Delta = 0$  і  $\lambda_Q \in R$ . Як тільки  $\mu_3 = \mu_2 + \delta$ ,  $\delta > 0$  мале число, то ми потрапляємо в область II, де абсциса точки  $Q$  стає від'ємною  $x_Q = -\frac{\delta}{\mu_2 - \mu_1} < 0$  (сторонній випадок). Якщо  $\mu_3 = \mu_2 - \delta$ , тоді  $\Delta = \delta^2 ((1 + \mu_2)^2 - 4\mu_1) - 2\delta (2\mu_1^2 + \mu_2^2 (1 + \mu_2) - \mu_1\mu_2 (3 + \mu_2)) + (\mu_1 - \mu_2)^2 \mu_2^2$ . Дискримінант квадратичного виразу  $\Delta$  дорівнює  $4\mu_1 (\mu_1 - \mu_2)^3 < 0$  в області I. Тому  $\Delta$  зберігає знак старшого коефіцієнта  $(1 + \mu_2)^2 - 4\mu_1 \geq (2\sqrt{\mu_2})^2 - 4\mu_1 = 4(\mu_2 - \mu_1) > 0$ . Це означає, що для параметрів  $\mu_i$  з області I  $\lambda_Q \in R$  і точка  $Q$  не може бути фокусом.

**Область II.** У цій області  $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1 > 0$ . Виберемо значення параметра  $D$  з області I, наприклад,  $D = 0.49$ . Тоді фазовий портрет має вигляд рис.2б.

**Область III.** У цій області змінюється положення точки  $Q$   $x_Q > 0$ ,  $y_Q < 0$ , але структура першого квадранта фазової площини залишається такою ж, як і для області I.

**Область IV.**  $\mu_1 > \mu_3 > \mu_2 > 0$ . Типовий фазовий портрет при  $D = 0.568$  зображено на рис.2в. Зазначимо, що сідлова точка  $Q$  з'явилась після біфуркації сідло-вузлової точки  $X$  при перетині межі між областями III та IV.

**Область V.** Структура така ж, як для області II.

**Область VI.** Структура така ж, як для області I.

Зазначимо, що при розглянутих вище параметрах параметр  $\nu < 0$ . Тому напрямки руху по траєкторіях у часовій змінній  $s$  системи (10) є протилежними до напрямків руху в змінній  $T$  системи (11). Тоді точка  $Q$  рисунка 2а є стійким вузлом у фазовій площині системи (10) і відповідає двочастотному режиму системи (5).

Розглянемо залежність коефіцієнтів  $\mu_i$  від параметра  $D$  при  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 2.1$ ,  $c = 1$  та  $\lambda_1 = -0.7$ ,  $\lambda_2 = 1.3$  (рис.3). На рисунку 3 можна виділити дві області параметра  $D$ , яким відповідають фазові портрети із суттєво різною структурою. Типові фазові портрети зображені на рисунку 4 при

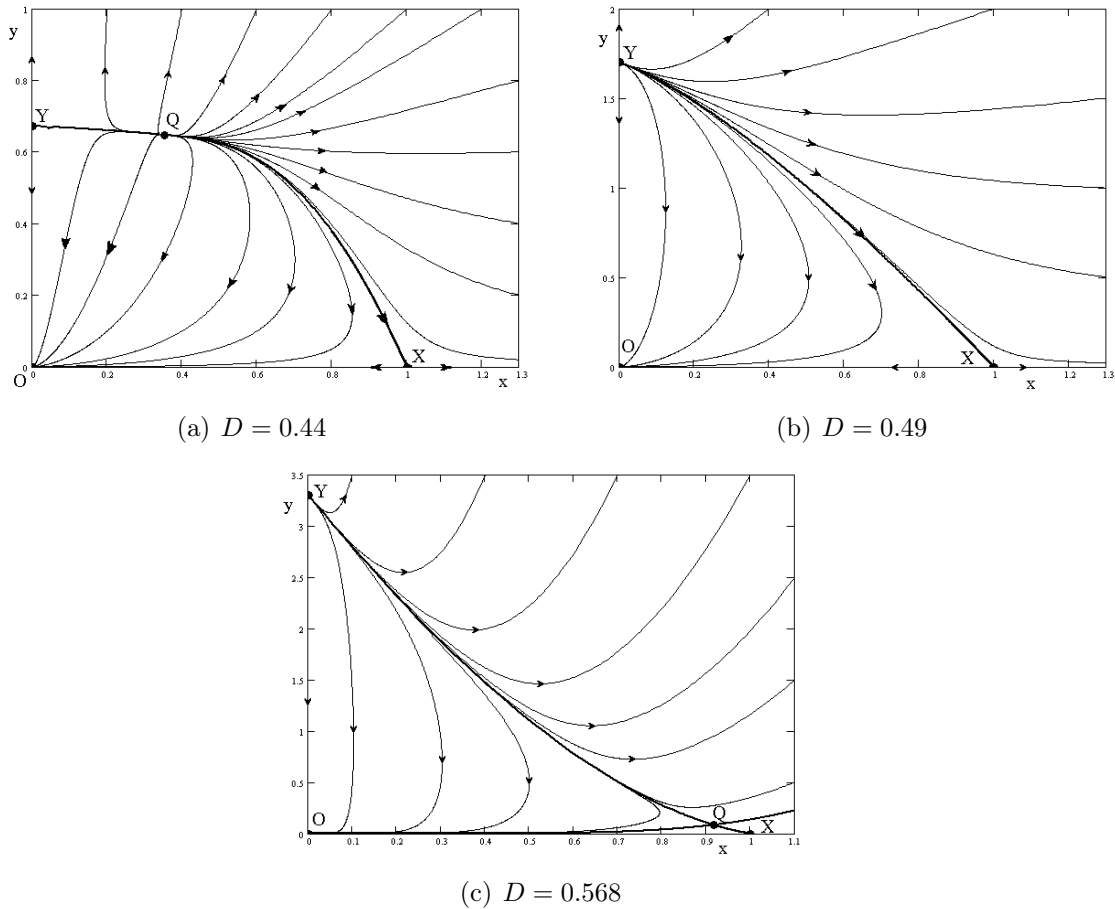


Рис. 2. Фазові портрети динамічної системи (11).

$D = 0.45$  та  $D = 0.5$ . На фазових портретах, на відміну від рисунка 2, точка  $O$  є сідловою. У результаті біфуркації сідло-вузла  $Y$  при умові  $\mu_2 = \mu_3$  (див. рис.3), на фазовому портреті рис.4а з'явилась сідлова точка  $Q$ . При зростанні параметра  $D$  точка  $Q$  виходить з першої чверті, тому на фазовому портреті рисунка 4б тільки три стаціонарні точки лежать в області допустимих значень. При цьому точки  $O$  та  $Y$  — сідла, точка  $X$  — нестійкий вузол. Варто зазначити, що перебудова фазової площини, яка лежить у першій чверті, спостерігається при проходженні коефіцієнта  $\mu_2$  через нуль на рисунку 3(лівий). При цьому точка  $Y$  прямує до  $+\infty$ , але через присутність у другій чверті сідлової точки  $Q$  її сепаратриса обмежує частину траєкторій нестійкого вузла  $X$ . Тому в цьому випадку фазовий портрет подібний до рисунка 4б. Оскільки при зафіксованих вище параметрах  $\nu > 0$ , то напрями руху по траєкторіях у часових змінних  $s$  та  $T$  співпадають.

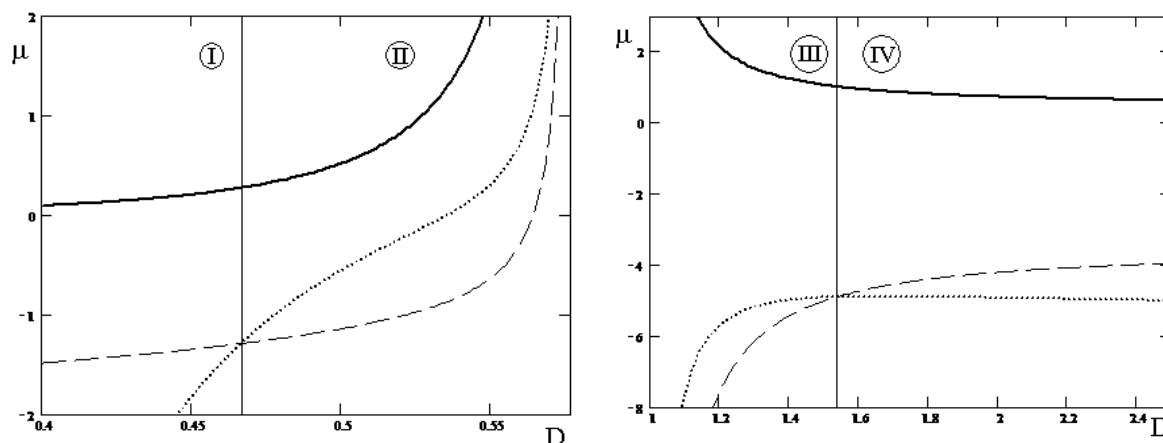


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів  $\mu_i$  системи (11) від параметра  $D$  при  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $\lambda_1 = -0.7$ ,  $\lambda_2 = 1.3$ ,  $\omega_1 = 0.2$ ,  $\omega_2 = 2.1$ ,  $c = 1$ . Суцільна лінія відповідає графіку  $\mu_1$ , пунктирна —  $\mu_2$ , штрихова —  $\mu_3$ .

## 2. Точний розв'язок амплітудної системи (11)

На сьогодні для систем з квадратичними правими частинами, на зразок (11), запропоновано велику кількість прийомів пошуку точних розв'язків, які дали змогу знайти умови інтегрування таких систем або принаймні вказати вирази для часткових розв'язків. Система (11) зводиться до рівняння Абеля другого роду:

$$x(x+y-1) \frac{dy}{dx} = y(\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3). \quad (12)$$

В окремих випадках для цих рівнянь побудовані точні розв'язки [5]. Зокрема, рівняння (12) для  $\mu_1 = 0$  є рівнянням Бернуллі відносно  $x(y)$ , при  $\mu_3 = 1$  воно зводиться до лінійного. У даній роботі побудовано точний частинний розв'язок рівняння (12) у явному вигляді, який не виявлений у класифікації роботи [5].

Шукатимемо розв'язок (12) у параметричній формі, вважаючи, що

$$\frac{dy}{dx} = (\mu_1 x + \mu_2 y - \mu_3) t, \quad (13)$$

де  $t$  — параметр. Тоді

$$x(x+y-1)t = y \quad \text{і} \quad y = \frac{t(1-x)x}{tx-1},$$

де  $x = x(t)$ . Після підстановки  $y(t)$  в (13) отримаємо рівняння Абеля

$$\frac{dt}{dx} = tF_1(x) + t^2F_2(x) + t^3F_3(x), \quad (14)$$



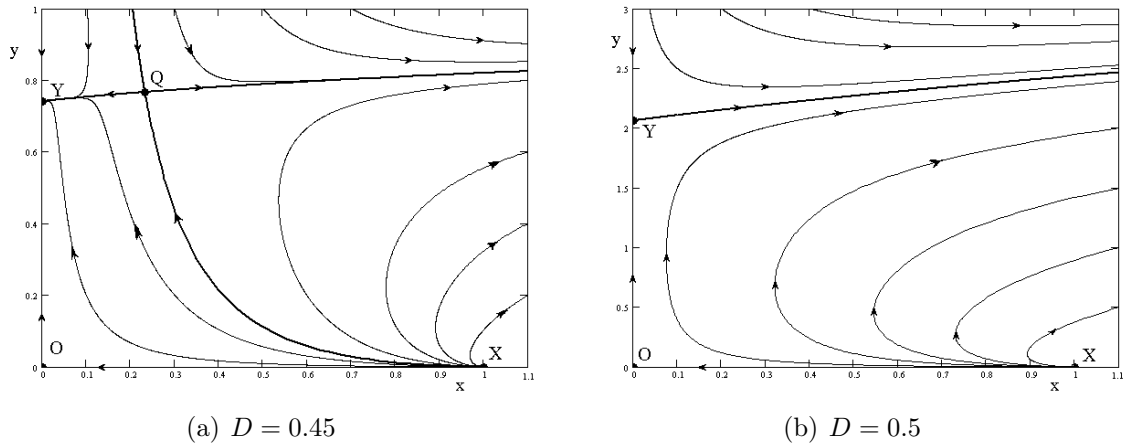


Рис. 4. Фазові портрети системи (11) для даних з рисунка 3.

де

$$F_1(x) = \frac{1 - \mu_3 - (2 - \mu_1)x}{x(x-1)}, \quad F_2(x) = \frac{2\mu_3 - \mu_2 + (1 - 2\mu_1 + \mu_2)x}{x-1},$$

$$F_3(x) = \frac{x(\mu_2 - \mu_3 + (\mu_1 - \mu_2)x)}{x-1}.$$

Один із розв'язків рівняння (14) можна знайти при  $F_2(x) = 0$ , тобто при  $2\mu_3 - \mu_2 = 0$  та  $1 - 2\mu_1 + \mu_2 = 0$ . Тоді рівняння (14) є рівнянням Бернуллі для змінної  $u = t^2$

$$\frac{du}{dx} = 2uF_1(x) + 2u^2F_3(x).$$

Його розв'язок

$$u = \frac{x^{2\mu_3-2}}{C(x-1) + x^{2\mu_3}} = t^2.$$

Отримане співвідношення дає параметричну залежність  $x = x(t)$ . Але більш корисним є розв'язок (12) у вигляді  $y = y(x)$ , який є першим інтегралом системи (11). Такий розв'язок (12) за додаткових умов

$$\mu_2 = 2\mu_3, \quad \mu_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\mu_3) \quad (15)$$

має вигляд

$$y(x) = \frac{x(x-1)}{-x \pm \sqrt{x^2 + C(x-1)x^{2-2\mu_3}}}, \quad C = \text{const.} \quad (16)$$

Проаналізуємо розташування кривих на фазовому портреті системи (11), які визначаються розв'язком (16) при різних сталих  $C$ . Стационарні точки за умови (15) мають координати

$$O(0;0), \quad X(1;0), \quad Y\left(0; \frac{1}{2}\right), \quad Q\left(\frac{2\mu_3}{2\mu_3-1}; -\frac{1}{2\mu_3-1}\right).$$

Точка  $Q$  лежить у першій чверті при  $\mu_3 < 0$ , при  $\mu_3 > 0$  фазовий портрет містить лише три точки  $O$ ,  $X$ ,  $Y$ . Таким чином, при  $C = 0$  отримаємо  $y(x) = \frac{x-1}{2}$  — пряму, яка з'єднує стаціонарні точки  $X$  та  $Y$ . З умови  $y(x_Q) = y_Q$  знайдемо значення  $C = 4^{\mu_3} (1 - 2\mu_3)^{1-2\mu_3} (-\mu_3)^{2\mu_3}$ , при якому розв'язок (16) проходить через точку  $Q$ . Якщо зафіксувати  $\mu_3 = -1$ , то точка  $Q$  є сідловою, а криві (16) при  $C = \frac{27}{4}$  є її сепаратрисами (рис. 5а).

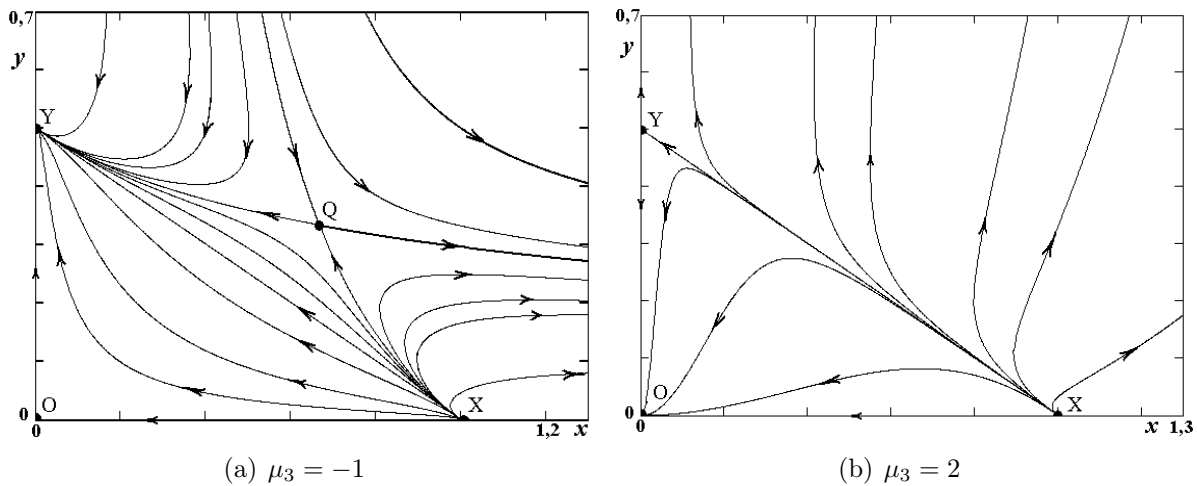


Рис. 5. Фазовий портрет динамічної системи (11), побудований за допомогою розв'язку (16), за умов (15).

### 3. Продовження асимптотичних розв'язків моделі (5) у сильнонелінійну область

Розглянемо поведінку асимптотичних розв'язків слабконелінійної динамічної системи (5) при зростанні параметра нелінійності  $\varepsilon$ . Інші параметри залишимо без змін. У випадку невеликого  $\varepsilon$  вивчення динамічної системи (5) проведемо за допомогою методів якісного та числового аналізу, зокрема, методу перерізів Пуанкаре. Для цього використаємо січну гіперплощину  $W_2 = 0$ , яку траєкторія перетинає у певному напрямі в точці  $M(W_1; Z_1; 0; Z_2)$ . Спроектувавши ці точки гіперплощини на одну з координатних площин, отримаємо переріз Пуанкаре. Таким чином, наприклад, при трансверсальному перерізі граничного цикла в січній гіперплощині отримаємо точку, при перерізі тора — замкнуту криву.

Разом з перерізом Пуанкаре будемо використовувати біфуркаційну діаграму Пуанкаре, яка є зображенням функціональної залежності між однією з координат точки  $M$  та біфуркаційним параметром, у нашому випадку,  $D$ .

Таким чином, проаналізуємо бігармонічний розв'язок, якому на рис. 2а відповідає єдина стійка точка  $Q$ . Вибираючи довільні ненульові початкові дані при невеликих  $\varepsilon$  для системи (5) у її чотирьохвимірному фазовому просторі, спостерігаємо утворення торової поверхні. Зростання параметра  $\varepsilon$  деформує її, про що свідчить

переріз тора при  $\varepsilon = 1.0$  (рис.6а). Наступне зростання параметра  $\varepsilon$  спричинює збільшення розмірів тора та його біфуркації з виходом на складну періодичну траєкторію (рис.6б).

Розглянемо розв'язок, зображений на рисунку 2б. Єдиною стійкою точкою є  $Y$ , якій відповідає гармонічний режим. При зростанні  $\varepsilon$  у фазовому просторі динамічної системи (5) утворюється граничний цикл, розвиток якого при зростанні  $\varepsilon$  зображено на біфуркаційній діаграмі Пуанкаре рисунка 7а. Як свідчить рисунок 7а, граничний цикл змінює свою форму та розміри, але біфуркацій не зазнає.

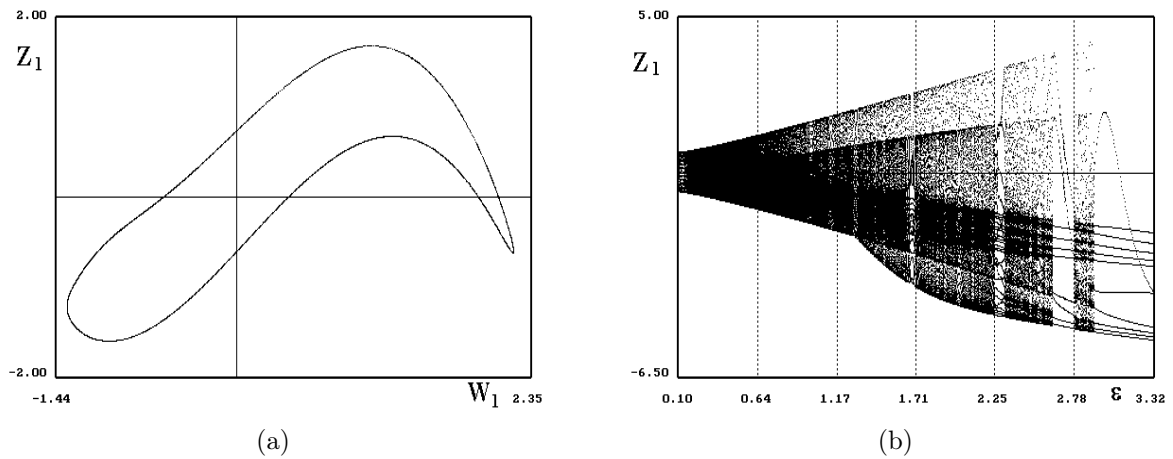


Рис. 6. Переріз Пуанкаре при  $\varepsilon = 1.0$  (а) та біфуркаційна діаграма розвитку коливань у динамічній системі (5) при  $D = 0.44$  (б).

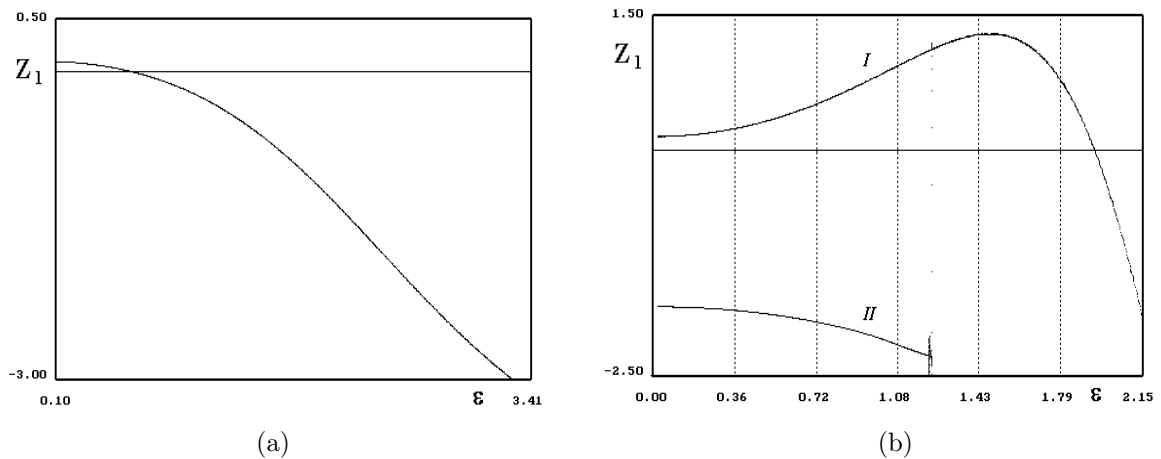


Рис. 7. Біфуркаційна діаграма розвитку коливань у динамічній системі (5) при  $D = 0.49$  (а)  $D = 0.568$  (б).

Наступний випадок — рисунок 2в. Стійкими точками є  $X$  та  $Y$ , області притягання яких розділені сепаратрисами точки  $Q$ . Це означає, що при певних початко-

вих умовах траєкторія системи (5) виходить на режим, близький до гармонічного з частотою  $k_1$ , при інших — на режим, близький до гармонічного з частотою  $k_2$ . Якщо, наприклад, зафіксувати  $\varepsilon = 0.01$  та вибрати початкові умови  $(0, 0.19, 0, 0.19)$ , то граничний цикл розвивається у відповідності з графіком  $I$  на рисунку 7б. Якщо вибрати інші початкові умови  $(0, 1.42, 0, 1.19)$ , то граничний цикл розвивається у відповідності з графіком  $II$  на рисунку 7б. При деякому значенні параметра  $D$  аттрактор, який відповідає графіку  $II$ , зливається з граничним циклом, який відповідає лінії  $I$ . У цьому випадку також біфуркацій циклу не виявлено. Для даних рисунка 4а спостерігається розвиток граничного цикла, який при малих  $\varepsilon$  вироджується в гармонічний режим, відповідний точці  $Y$ . У випадку даних рисунка 4б локалізованих режимів не спостерігається. Представлені біфуркаційні діаграми є типовими для значень параметра  $D$ , взятих з областей I-IV.

#### 4. Висновки

Таким чином,

- у роботі побудовано асимптотичні розв'язки слабконелінійної моделі (1), встановлені умови існування одночастотних та двочастотних режимів, вивчено структуру фазової площини динамічної системи, яка описує динаміку амплітуди знайдених розв'язків;
- методами якісного аналізу встановлені типові сценарії розвитку коливних режимів при переході до сильнонелінійних моделей, зокрема, виявлено утворення торової поверхні, яка зазнає біфуркаційних перетворень при зростанні швидкості поширення хвилі;
- отримані результати вказують на те, що врахування в моделі процесів на рівні мікроструктури дозволяє описати здатність таких середовищ до прояву самоорганізаційних властивостей: формування усамітнених хвиль, багатоперіодичних локалізованих хвиль, їх біфуркацій тощо.

#### Перелік цитованих джерел

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — Москва: Наука, 1976. — 496 с.
2. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — Москва: Наука, 1987. — 384 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Москва: Наука, 1974. — 504 с.
4. Даниленко В. А., Скуратівський С. І. Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями // Доповіді НАНУ. — 2008. — № 11. — С. 108–112.
5. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Москва: Физматлит, 2001. — 576 с.

6. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля-Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Известия вузов. Прикл. нелинейная динамика. — 2008. — Т.16, № 4.—С. 101–136.
7. Пальмов В. А. Об одной модели среды сложной структуры //Прикл. математика и механика. — 1969. —Вып.4. —С. 768–773.
8. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. — Москва: Техносфера, 2003. — 508 с.
9. Садовский М. А. Автомодельность геодинамических процессов //Вест.АН СССР. — 1986. —№ 8. —С. 3–11.
10. Слепян Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами // Механика твердого тела. —1967. —№ 5. —С. 34–40.
11. Скуратовский С. И., Скуратовская И. А. Локализованные автоволновые решения нелинейной модели сложной среды // Элект. журнал "Техническая акустика <http://ejta.org>, 2010, 6
12. Скуратовский С. И., Скуратовская И. А. Точные волновые решения моделей геофизических сред с осциллирующими включениями //Материалы XIX Международной научной школы им. академика С.А.Христиановича, Крым, г. Алушта, 21-27 сентября 2009г. — С. 291–293.
13. Danylenko V. A., Danevych T. B., Makarenko O. S., Skurativskiy S. I., Vladimirov V. A. Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. — Kyiv, Subbotin in-t of geophysics NASU, 2011. — 333 p.
14. Camacho E., Rand R.H., Howland H. Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // Int. J. of Solids and Structures. — 2004. — Vol. 41. — P. 2133–2143.
15. Storti D. W., Rand R. H. Dynamics of two strongly coupled Van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. — 1982. — Vol. 17, № 3. — P. 143–152.

Получена 30.09.2012    Переработана 01.12.2012