Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 155–167

УДК 517.98

Критерии полноты для решеточно нормированных пространств

В. И. Чилин, М. М. Юсупова

Национальный университет Узбекистана
Ташкент 100174, УЗБЕКИСТАН.
E-mail: chilin@ucd.uz, vladimirchil@gmail.com, yusupovamariya@rambler.ru

Аннотация. Устанавливаются различные взаимосвязи между понятиями секвенциальной $\tau(X)$-полноты, секвенциальной (bo)-полноты, $\tau(X)$-полноты и (bo)-полноты для любых решеточно нормированных пространств, у которых значения норм $\|\cdot\|_X$ лежат в расширенном пространстве Канторовича-Пинскера $L^0(\mathcal{B})$, ассоциированном с мультинормированной булевой алгеброй $\mathcal{B}$, где $\tau(X)$ — векторная топология в X, порожденная нормой $\|\cdot\|_X$ и топологией сходимости локально по мере в $L^0(\mathcal{B})$. Получен вариант теоремы Амемия для решеточно нормированных векторных решеток над $L^0(\mathcal{B})$.

Ключевые слова: пространство Канторовича-Пинскера, решеточно нормированное пространство, (bo)-полнота, дизъюнктно разложимая норма.

1. Введение

Одним из важных инструментов установления полноты нормированных векторных решеток является теорема Амемия (см., например, [1], гл. X, §3). При получении аналога теоремы Амемия для L^0-нормированных векторных решеток в [2] существенно использовалась метризуемая структура топологической алгебры $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых функций, заданных на измеримом пространстве с полной σ-конечной мерой. Нормированные L^0-решетки являются частным случаем решеточно нормированных решеток (РНР) $\mathbf{X}$, у которых значения норм $\|x\|_{\mathbf{X}},\ x \in \mathbf{X}$, лежат в расширенном пространстве Канторовича-Пинскера $L^0(\mathcal{B})$, ассоциированном с мультинормируемой булевой алгеброй $\mathcal{B}$ ([3], 1.4.10). Естественно возникает задача о получении варианта теоремы Амемия для РНР относительно топологии $\tau(\mathbf{X})$, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, и топологией сходимости локально по мере в $L^0(\mathcal{B})$. В настоящей работе дается решение этой задачи. При этом, устанавливаются различные взаимосвязи между понятиями секвенциальной $\tau(\mathbf{X})$-полноты, секвенциальной (bo)-полноты, $\tau(\mathbf{X})$-полноты и (bo)-полноты для любых решеточно нормированных пространств над $L^0(\mathcal{B})$. Используется терминология и обозначения теории векторных решеток и решеточно нормированных пространств из [3] и [4].

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра, $\mu : \mathcal{B} \to [0; +\infty]$ — строго положительная локально конечная вполне аддитивная (счетно аддитивная) мера на $\mathcal{B}$, т.е. для μ выполнены следующие свойства:

1. $\mu(e) > 0$ для всех ненулевых $e \in \mathcal{B}$;

2. Для любого ненулевого $e \in \mathcal{B}$ существует такое ненулевое $q \in \mathcal{B}$, что $q \leq e$ и $\mu(q) < \infty$;

3. $\mu(\sup\limits_{i \in I} e_i) = \sum\limits_{i \in I} \mu(e_i)$ для любого семейства $\{e_i\}_{i \in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{B}$, где I — некоторое множество (соответственно, счетное множество) индексов.

Если $\mathbf{1}$ — единица в $\mathcal{B}$ и $\mu(\mathbf{1}) < \infty$, то μ называется *конечной мерой.* В этом случае, булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, т.е. любое семейство ненулевых попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{B}$ не более чем счетно. Обратно, если $\mathcal{B}$ имеет счетный тип и μ — строго положительная локально конечная счетно аддитивная мера на $\mathcal{B}$, то μ является вполне аддитивной мерой. При этом, на $\mathcal{B}$ существует также и строго положительная конечная счетно аддитивная мера.

Для произвольной строго положительной локально конечной меры μ всегда существует такое разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы $\mathbf{1}$ булевой алгебры $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}_{e_i} = \{q \in \mathcal{B} : q \leq e_i\}$ есть полная булева алгебра счетного типа и $\mu(e_i) < \infty$ для всех $i \in I$ ([3], 1.2.11.). В этом случае, полную булеву алгебру $\mathcal{B}$ называют *мультинормированной булевой алгеброй.*

Пусть $Q(\mathcal{B})$ — стоуновский экстремальный несвязный компакт, соответствующий полной булевой алгебре $\mathcal{B}$ ([3], 1.2.3., 1.2.4.). Обозначим через $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ множество всех непрерывных функций $f : Q(\mathcal{B}) \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных подмножествах из $Q(\mathcal{B})$. При естественном введении в множестве $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ алгебраических операций $f + g,\ \alpha f,\ fg$ и частичного порядка $f \leq g$, оно становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел и расширенной порядково полной векторной решеткой ([3], 1.4.2.). Элементы $e \in \mathcal{B}$ отождествляются с функциями

$$e(t) = \chi_{Q(e)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in Q(e); \\ 0, & t \notin Q(e), \end{cases}$$

где $Q(e)$ — открыто-замкнутое множество из $Q(\mathcal{B})$, соответствующее элементу e. Ясно, что $f \in C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ имеет вид $f = \chi_{Q(e)}, e \in \mathcal{B}$, в том и только в том случае, когда f есть идемпотент кольца $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$, т.е. $f^2 = f$. В дальнейшем, будем считать, что $\mathcal{B}$ есть полная булева алгебра всех идемпотентов в кольце $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$. Функция $\mathbf{1}(t)$, тождественно равная единице на $Q(\mathcal{B})$, является кольцевой и слабой порядковой единицей в $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$. В случае мультинормируемой булевой алгебры $\mathcal{B}$ алгебра $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ называется *расширенным пространством Канторовича-Пинскера* и $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ отождествляется с алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых действительных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной локально конечной мерой μ, обладающей свойством прямой суммы (равные почти всюду функции отождествляются) ([3], 1.2.11., 1.4.8., 1.4.10.). В связи с этим, алгебру $C_\infty(Q(\mathcal{B}))$ будем обозначать через $L^0(\mathcal{B})$.

Порядковый идеал $\{f \in L^0(\mathcal{B}) : |f| \leq \lambda\mathbf{1}$ для некоторого положительного $\lambda \in \mathbf{R}\}$ в $L^0(\mathcal{B})$, порожденный элементом $\mathbf{1}$, совпадает с подалгеброй $C(Q(\mathcal{B}))$ всех непрерывных функций $f : Q(\mathcal{B}) \to \mathbf{R}$ (соответственно, с алгеброй $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех существенно ограниченных функций из $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$). Относительно нормы $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in Q(\mathcal{B})} |f(t)|$ (соответственно, $\|f\|_\infty = vrai \sup\limits_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$) алгебра $C(Q(\mathcal{B}))$ (соответственно, $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$) становится банаховой алгеброй. В дальнейшем, подалгебру $C(Q(\mathcal{B}))$ будем обозначать через $L^\infty(\mathcal{B})$.

Сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{B})$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $f_\alpha \leq f_\beta$ (соответственно, $f_\beta \leq f_\alpha$) при $\alpha \leq \beta$, где $\alpha, \beta \in A$. Запись $f_\alpha \uparrow f \in L^0(\mathcal{B})$ (соответственно, $f_\alpha \downarrow f$) означает, что сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ возрастает (убывает) и $f = \sup\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ (соответственно, $f = \inf\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$). Говорят, что сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{B})$ *(о)-сходится* к элементу $f \in L^0(\mathcal{B})$ (запись: $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$), если существуют такие сети $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{B})$, что $h_\alpha \leq f_\alpha \leq g_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ и $h_\alpha \uparrow f$, $g_\alpha \downarrow f$. Сильнейшая из топологий в $L^0(\mathcal{B})$, для которых из (o)-сходимости сетей следует их топологическая сходимость, называется (o)-*топологией* в $L^0(\mathcal{B})$ и обозначается через $\tau_0(L^0(\mathcal{B}))$. Ясно, что из (o)-сходимости $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$ следует сходимость сети f_α к f в (o)-топологии $\tau_0(L^0(\mathcal{B}))$ (запись: $f_\alpha \xrightarrow{\tau_0(L^0(\mathcal{B}))} f$). В то же время, из сходимости $f_\alpha \xrightarrow{\tau_0(L^0(\mathcal{B}))} f$ не следует, вообще говоря, сходимость $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$ (см., например, [4], гл. III, §9).

Непустое подмножество E в $L^0(\mathcal{B})$ называется *идеальным*, если из $f \in E$, $|g| \leq |f|$, $g \in L^0(\mathcal{B})$ следует, что $g \in E$. Ясно, что непустое множество $E \subset L^0(\mathcal{B})$ является идеальным в том и только в том случае, когда $af \in E$ для любых $f \in E$, $a \in L^\infty(\mathcal{B})$ с $\|a\|_\infty \leq 1$.

Пусть t — отделимая топология в $L^0(\mathcal{B})$, относительно которой $L^0(\mathcal{B})$ является топологическим векторным пространством. Говорят, что t есть *R-топология* на $L^0(\mathcal{B})$ ([5], гл. V, §2), если выполнены следующие условия:

(T_1). Существует базис окрестностей нуля, состоящий из идеальных множеств;

(T_2). Если $\{e_\alpha\} \subset \mathcal{B}$ и $e_\alpha \downarrow 0$, то $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$;

(T_3). Если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}$ и $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$, то $f_\alpha e_\alpha \xrightarrow{t} 0$ для любой сети $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{B})$.

Примером R-топологии в расширенном пространстве Канторовича-Пинскера $L^0(\mathcal{B})$ служит топология $t_{l\mu}$ сходимости локально по мере, определяемая с помощью строго положительной локально конечной вполне аддитивной меры μ. Базисом идеальных окрестностей нуля в топологии $t_{l\mu}$ являются множества вида $U(e, \varepsilon, \delta) = \{f \in L^0(\mathcal{B})$: существует такое $q \in \mathcal{B}_e$, что $\mu(e - q) \leq \delta$, $\|fq\|_\infty \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon, \delta > 0$, $e \in \mathcal{B}$ с $\mu(e) < \infty$. Сходимость сети $\{f_\alpha\} \subset L^0(\mathcal{B})$ к элементу $f \in L^0(\mathcal{B})$ относительно топологии $t_{l\mu}$ означает, что $\{ef_\alpha\}$ сходится по мере μ к элементу

ef для любого $e \in \mathcal{B}$ с $\mu(e) < \infty$. Если $\mu(\mathbf{1}) < \infty$, то топология $t_{l\mu}$ совпадает с топологией сходимости по мере μ.

В ([5], гл. V, §3) установлено, что любые две R-топологии на $L^0(\mathcal{B})$ совпадают. Поэтому, в случае мультинормированной булевой алгебры $(\mathcal{B}, \mu)$, R-топология в $L^0(\mathcal{B})$ есть топология $t_{l\mu}$, в частности, $t_{l\mu} = t_{l\nu}$, где ν — другая строго положительная локально конечная вполне аддитивная мера на $\mathcal{B}$.

Следует отметить, что R-топология в $L^0(\mathcal{B})$ метризуема тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ имеет счетный тип ([5], гл. V, §2).

В ([5], гл. V, §4) установлено также, что множество $L^0_+(\mathcal{B})$ всех положительных элементов из $L^0(\mathcal{B})$ есть замкнутое подмножество в $(L^0(\mathcal{B}), t)$. Поэтому для любой возрастающей (убывающей) сети $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{B})$, сходящейся к $f \in L^0(\mathcal{B})$ относительно R - топологии t, верно равенство $f = \sup\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ $(f = \inf\limits_{\alpha \in A} f_\alpha)$ ([6], гл. V, §4).

В дальнейшем R-топологию в $L^0(\mathcal{B})$ будем обозначать через $t(\mathcal{B})$. В ([5], гл. V, §4) установлено, что $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$ является топологическим кольцом, т.е. операция умножения fg непрерывна в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$ по совокупности переменных.

Выберем в мультинормированной булевой алгебре $\mathcal{B}$ произвольное разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы и рассмотрим прямое произведение

$$\prod_{i \in I} L^0(\mathcal{B}_{e_i}) = \{\{g_i\}_{i \in I} : g_i \in L^0(\mathcal{B}_{e_i}) = e_i L^0(\mathcal{B}),\ i \in I\}.$$

Относительно покоординатных алгебраических операций это множество становится коммутативной алгеброй над полем $\mathbf{R}$. Зададим отображение $\Phi : L^0(\mathcal{B}) \to \prod\limits_{i \in I} e_i L^0(\mathcal{B})$, полагая $\Phi(f) = \{e_i f\}_{i \in I}$. Легко видеть, что Φ есть изоморфизм из алгебры $L^0(\mathcal{B})$ на алгебру $\prod\limits_{i \in I} e_i L^0(\mathcal{B})$, что позволяет отождествлять алгебры $L^0(\mathcal{B})$ и $\prod\limits_{i \in I} e_i L^0(\mathcal{B})$.

Пусть t — тихоновское произведение R-топологий $t(\mathcal{B}_{e_i})$ в $\prod\limits_{i \in I} e_i L^0(\mathcal{B})$. Тогда t является R-топологией на $L^0(\mathcal{B}) = \prod\limits_{i \in I} e_i L^0(\mathcal{B})$ ([5], гл. V, §5) и поэтому верно следующее

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра, $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы в $\mathcal{B}$, $f_\alpha, f \in L^0(\mathcal{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{B})} f$;

(ii). $e_i f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{B})} e_i f$ *для любого* $i \in I$;

(iii). $e_i f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{B}_{e_i})} e_i f$ *для любого* $i \in I$.

В ([5], гл. V, §§4,6) установлена следующая взаимосвязь между R-топологией и (o)-топологией в $L^0(\mathcal{B})$.

Утверждение 2. *R-топология $t(\mathcal{B})$ в $L^0(\mathcal{B})$ всегда мажорируется (o)-топологией $\tau_0(L^0(\mathcal{B}))$. При этом, $t(\mathcal{B}) = \tau_0(L^0(\mathcal{B}))$ в том и только в том случае, когда булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип.*

3. Решеточно нормированные пространства над $L^0(\mathcal{B})$

Пусть $\mathbf{X}$ — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$, $\mathcal{B}$ — полная мультинормированная булева алгебра, $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ – $L^0(\mathcal{B})$-значная норма на $\mathbf{X}$ ([3], 2.1.1.). Пара $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ называется *решеточно нормированным пространством* (сокращенно, *РНП*) над $L^0(\mathcal{B})$. В случае, когда $\mathbf{X}$ — векторная решетка, пара $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ называется *решеточно нормированной решеткой* (сокращенно, *РНР*) над $L^0(\mathcal{B})$, если норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ обладает следующим свойством монотонности:

$$\|y\|_{\mathbf{X}} \leq \|x\|_{\mathbf{X}} \text{ для } x, y \in \mathbf{X} \text{ с } |y| \leq |x|.$$

Говорят, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{X}$ (bo)-*сходится* к элементу $x \in \mathbf{X}$ (запись: $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$), если $\|x_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{X}$ называется (bo)-*фундаментальной*, если $(\sup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}}) \downarrow 0$. РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ называется (bo)-*полным* (соответственно, *секвенциально* (bo)-*полным*), если любая (bo)-фундаментальная сеть (соответственно, последовательность) из $\mathbf{X}$ (bo)-сходится к элементу из $\mathbf{X}$.

Пусть $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$ и $\mathcal{U}$ — базис идеальных окрестностей нуля в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ положим

$$W(U) = \{x \in \mathbf{X} : \ \|x\|_{\mathbf{X}} \in U\}.$$

Согласно ([6], гл. I, §1), в $\mathbf{X}$ существует топология $\tau(\mathbf{X})$, относительно которой $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$ есть отделимое топологическое векторное пространство, при этом, система множеств $\{x + W(U) : \ U \in \mathcal{U}\}$ образует базис окрестностей элемента $x \in \mathbf{X}$ (в этом случае, говорят, что топология $\tau(\mathbf{X})$ порождена нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ и R-топологией $t(\mathcal{B})$). Сходимость сети $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x$, $x_\alpha, x \in \mathbf{X}$ означает, что $\|x_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$, в частности, если $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$, то $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x$ (см. утверждение 2).

Будем говорить, что РНП $\mathbf{X}$ – $\tau(\mathbf{X})$-*полно* (соответственно, *секвенциально* $\tau(\mathbf{X})$-*полно*), если любая $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальная сеть (соответственно, последовательность) из $\mathbf{X}$ является $\tau(\mathbf{X})$-сходящейся к элементу из $\mathbf{X}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{B}$ мультинормируемая булева алгебра и $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — $\tau(\boldsymbol{X})$-полное (соответственно, секвенциально $\tau(\boldsymbol{X})$-полное) РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Тогда $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — (bo)-полно (соответственно, секвенциально (bo)-полно).*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — (bo)-фундаментальная сеть из $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, т.е. $f_\gamma = (\sup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}}) \downarrow 0$. Согласно утверждению 2, имеем, что $f_\gamma \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$. Следовательно, для любой идеальной окрестности нуля U в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$ найдется такое $\gamma(U) \in A$, что $f_\gamma \in U$ для всех $\gamma \geq \gamma(U)$. Поскольку U — идеально, то $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}} \in U$ при $\alpha, \beta \geq \gamma(U)$. Это означает, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальна. Поскольку РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — $\tau(\mathbf{X})$-полно, то существует такое $x \in \mathbf{X}$, что $\|x_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$. Покажем, что $\|x_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$. Для $\gamma \geq \gamma(U)$ имеем, что $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}} \leq f_\gamma \in U$ при $\alpha, \beta \geq \gamma$. Фиксируя $\beta \geq \gamma$ и используя сходимость $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x$, получим, что $(x_\alpha - x_\beta) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} (x - x_\beta)$, при $\alpha \in A$. Поскольку $|\|y\|_{\mathbf{X}} - \|z\|_{\mathbf{X}}| \leq \|y - z\|_{\mathbf{X}}$ для любых $y, z \in \mathbf{X}$, то $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} \|x - x_\beta\|_{\mathbf{X}}$. Используя неравенство $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}} \leq f_\gamma$ при $\alpha, \beta \geq \gamma$ и замкнутость множества $L^0_+(\mathcal{B})$ в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$, получим, что $\|x - x_\beta\|_{\mathbf{X}} \leq f_\gamma$ для всех $\beta \geq \gamma$, в частности, $\|x - x_\gamma\|_{\mathbf{X}} \leq f_\gamma \downarrow 0$. Это означает, что $\|x_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$, т.е. $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$. Следовательно, РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — (bo)-полно.

Аналогично устанавливается, что секвенциальная $\tau(\mathbf{X})$-полнота решеточно нормированного пространства $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ влечет его секвенциальную (bo)-полноту. □

Повторяя дословно доказательство предложения 2.1 из [2], получим следующую взаимосвязь между понятиями секвенциальной (bo)-полноты и секвенциальной $\tau(\mathbf{X})$-полноты для РНП над $L^0(\mathcal{B})$, в случае, когда $\mathcal{B}$ булева алгебра счетного типа.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра счетного типа, $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — секвенциально (bo)-полно;

$(ii$. $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — секвенциально $\tau(\boldsymbol{X})$-полно.

Замечание 1. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ утверждения 3 верна для произвольных мультинормируемых булевых алгебр $\mathcal{B}$ (см. теорему 1). Если же булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, то R-топология $t(\mathcal{B})$ метризуема, и поэтому метризуема топология $\tau(\mathbf{X})$. Следовательно, в этом случае, секвенциальная $\tau(\mathbf{X})$-полнота РНП $\mathbf{X}$ совпадает с его $\tau(\mathbf{X})$-полнотой.

Ясно, что любое (bo)-полное ($\tau(\mathbf{X})$-полное) РНП является секвенциально (bo)-полным (соответственно, секвенциально $\tau(\mathbf{X})$-полным). Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра счетного типа со строго положительной конечной счетно аддитивной мерой, $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ — единица в $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ для всех $i \in I$, где I - несчетное множество индексов, $\nabla = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Рассмотрим идеальное линейное пространство $\mathbf{X}$ в $L^0(\nabla)$, состоящее из всех тех $x = \{x_i\}_{i \in I} \in \prod\limits_{i \in I} L^0(\mathcal{B}_i) = L^0(\nabla)$, для которых существует такое, не более чем счетное, множество $I(x) \subset I$, что $x_i = 0$ при $i \notin I(x)$. Определим $L^0(\nabla)$-значную норму на $\mathbf{X}$, полагая $\|x\|_{\mathbf{X}} = |x|$. Обозначим через D направленность всех конечных подмножеств из I, упорядоченных по включению, и для каждого $\alpha \in D$ положим $q_\alpha = \sum\limits_{j \in \alpha} e_j$, где $e_j = \{x_i^{(j)}\}_{i\in I},\ x_i^{(j)} = 0$ при $i \neq j,\ x_j^{(j)} = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$. Ясно, что $q_\alpha \uparrow \mathbf{1}_\nabla = \{a_i\}_{i\in I},\ a_i = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ для всех $i \in I$, в частности, $\sup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} \|q_\alpha - q_\beta\|_{\mathbf{X}} = (\sup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} |q_\alpha - q_\beta|) \downarrow 0$, т.е. $\{q_\alpha\}_{\alpha\in D}$ — (bo)-фундаментальная сеть из $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$. Если сеть $\{q_\alpha\}_{\alpha\in D}$ — (bo)-сходится к некоторому элементу $x \in \mathbf{X}$, то $|q_\alpha - x| = \|q_\alpha - x\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$, и поэтому $x = \mathbf{1}_\nabla \notin \mathbf{X}$.

Из полученного противоречия вытекает, что $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ не является (bo)-полным РНП. В то же время, если $x_n = \{x_i^{(n)}\}_{i\in I}$ — (bo)-фундаментальная последовательность из $\mathbf{X}$, то $\{x_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — (o)-фундаментальная последовательность из $L^0(\mathcal{B})$, и поэтому существует такое $x_i^{(0)} \in L^0(\mathcal{B})$, что $x_i^{(n)} \xrightarrow{(o)} x_i^{(0)}$ для всех $i \in I$. Положим $x_0 = \{x_i^{(0)}\}_{i\in I}$. Так как $I(x_n)$ не более чем счетно, то множество $I(x_0) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I(x_n)$ также не более чем счетно, и поэтому $x_0 \in \mathbf{X}$, при этом, $\|x_n - x_0\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$. Следовательно, $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — секвенциально (bo)-полное РНП.

Отметим, что построенное в примере 1 РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ является также секвенциально $\tau(\mathbf{X})$-полным, но не $\tau(\mathbf{X})$-полным РНП.

Теорема 2. *Пусть $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра счетного типа. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — *секвенциально (bo)-полно;*

(ii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — *секвенциально $\tau(\boldsymbol{X})$-полно;*

(iii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — *(bo)-полно;*

(iv). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — *$\tau(\boldsymbol{X})$-полно.*

Доказательство. Импликации $(i) \Leftrightarrow (ii)$ следуют из утверждения 3, импликация $(ii) \Rightarrow (iv)$ — из замечания 1, импликация $(iv) \Rightarrow (iii)$ — из теоремы 1, а импликация $(iii) \Rightarrow (i)$ очевидна. $\square$

4. Критерии полноты d-разложимых РНП

Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра, $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Элементы $x, y \in \mathbf{X}$ называются *дизъюнктными* (обозначение $x \perp y$), если $\|x\|_{\mathbf{X}} \wedge \|y\|_{\mathbf{X}} = 0$ ([3], 2.1.2) (последнее равенство равносильно равенству $\|x\|_{\mathbf{X}} \cdot \|y\|_{\mathbf{X}} = 0$).

Нам понадобятся следующие свойства $L^0(\mathcal{B})$-значной нормы.

Утверждение 4. *([3],2.1.2).Пусть $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Тогда*

(i). *Если $x, y \in \boldsymbol{X}$ и $x \perp y$, то $\|x + y\|_{\boldsymbol{X}} = \|x\|_{\boldsymbol{X}} + \|y\|_{\boldsymbol{X}}$;*

(ii). *Для любых $x \in \boldsymbol{X},\ f_1, f_2 \in L^0_+(\mathcal{B})$ таких, что $\|x\|_{\boldsymbol{X}} = f_1 + f_2,\ f_1 f_2 = 0$ существует не более одной пары элементов $x_1, x_2 \in \boldsymbol{X}$, для которых $x = x_1 + x_2,\ \|x_1\|_{\boldsymbol{X}} = f_1,\ \|x_2\|_{\boldsymbol{X}} = f_2$.*

Пусть $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Зафиксируем идемпотент $e \in \mathcal{B}$ и положим $\mathbf{X}_e = \{x \in \mathbf{X} : (\mathbf{1} - e)\|x\|_{\mathbf{X}} = 0\},\ \|x\|_{\mathbf{X}_e} = \|x\|_{\mathbf{X}}$ для $x \in \mathbf{X}_e$. Ясно, что $\mathbf{X}_e$ есть линейное подпространство в $\mathbf{X}$, при этом, $e\|x\|_{\mathbf{X}} = \|x\|_{\mathbf{X}}$ для всех $x \in \mathbf{X}_e$, т.е. $(\mathbf{X}_e, \|\cdot\|_{\mathbf{X}_e})$ является РНП над $L^0(\mathcal{B}_e)$, при этом, топология $\tau(\mathbf{X}_e)$ совпадает с топологией, индуцируемой топологией $\tau(\mathbf{X})$ на $\mathbf{X}_e$.

Если $0 \neq q \in \mathcal{B},\ eq = 0,\ x \in \mathbf{X}_e \cap \mathbf{X}_q$, то $\|x\|_{\mathbf{X}} = eq\|x\|_{\mathbf{X}} = 0$, т.е. $\mathbf{X}_e \cap \mathbf{X}_q = \{0\}$. Ясно также, что при $e \leq p \in \mathcal{B}$ верно включение $\mathbf{X}_e \subset \mathbf{X}_p$.

$L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ на векторном пространстве $\mathbf{X}$ называется *дизъюнктно разложимой* или *d-разложимой*, если для любого $x \in \mathbf{X}$ и любого разложения $\|x\|_{\mathbf{X}} = f_1 + f_2$ в сумму дизъюнктных положительных элементов $f_1, f_2 \in L^0(\mathcal{B})$ существуют такие $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\|_{\mathbf{X}} = f_k,\ k = 1, 2$ ([3], 2.1.1.). РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ с d-разложимой $L^0(\mathcal{B})$ - значной нормой называется *d-разложимым РНП* над $L^0(\mathcal{B})$.

Предположим теперь, что $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ — d-разложима. Используя равенство $\|x\|_{\mathbf{X}} = e\|x\|_{\mathbf{X}} + (\mathbf{1}-e)\|x\|_{\mathbf{X}}$ и утверждение 4 (ii), получим, что любой элемент $x \in \mathbf{X}$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathbf{X}_e,\ x_2 \in \mathbf{X}_{\mathbf{1}-e}$, т.е. $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \oplus \mathbf{X}_{\mathbf{1}-e}$. Аналогично устанавливается равенство $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_e \oplus \mathbf{X}_{p-e}$, в случае, когда $e \leq p \in \mathcal{B}$.

Согласно равенству $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \oplus \mathbf{X}_{\mathbf{1}-e}$, существует линейный проектор P_e из $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X}_e$, в частности, $P_e(x) = x$ для всех $x \in \mathbf{X}_e$ и $P_e(y) = 0$ для всех $y \in \mathbf{X}_{\mathbf{1}-e}$. Таким образом, установлено следующее

Утверждение 5. *Пусть $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — d-разложимое РНП над $L^0(\mathcal{B}),\ e \in \mathcal{B}$. Тогда $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_e \oplus \boldsymbol{X}_{\mathbf{1}-e}$ и $e\|x\|_{\boldsymbol{X}} = \|P_e(x)\|_{\boldsymbol{X}}$ для всех $x \in \boldsymbol{X}$, где P_e — линейный проектор из $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{X}_e$.*

Из утверждения 5 и непрерывности операции умножения в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$ вытекает следующее

Следствие 1. *В условиях утверждения 5, проектор P_e непрерывен из $(\boldsymbol{X}, \tau(\boldsymbol{X}))$ в $(\boldsymbol{X}_e, \tau(\boldsymbol{X}_e))$.*

Замечание 2. Если $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — РНР над $L^0(\mathcal{B}),\ x, y \in \mathbf{X},\ x \perp y$, то, в силу монотонности нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$, имеем, что $\|\, |x| \wedge |y|\ \|_{\mathbf{X}} \leq \|x\|_{\mathbf{X}} \wedge \|y\|_{\mathbf{X}} = 0$, и поэтому $|x| \wedge |y| = 0$, т.е. x и y — дизъюнктны как элементы векторной решетки $\mathbf{X}$. Поэтому, согласно утверждению 4 (ii), для d-разложимой РНР $\mathbf{X}$ верно неравенство $P_e(x) \geq 0$, если $0 \leq x \in \mathbf{X},\ e \in \mathcal{B}$, т.е. P_e — положительный проектор из $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X}_e$.

Нам понадобится следующий критерий для $\tau(\mathbf{X})$-сходимости сетей из РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$.

Утверждение 6. *Пусть $\{e_i\}_{i \in I}$ — разбиение единицы в мультинормированной булевой алгебре $\mathcal{B}$, $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — d-разложимое РНП над $L^0(\mathcal{B})$, $\{x_\alpha\}$ — сеть из $\boldsymbol{X}$, $x \in \boldsymbol{X}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\boldsymbol{X})} x$;

(ii). $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\boldsymbol{X}_{e_i})} P_{e_i}(x)$ для всех $i \in I$.

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ вытекает из следствия 1.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $x = 0$. Пусть $P_i(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} 0$, т.е. $e_i\|x_\alpha\|_\mathbf{X} = \|P_{e_i}(x_\alpha)\|_\mathbf{X} \xrightarrow{t(\mathcal{B}_{e_i})} 0$ для всех $i \in I$. Согласно утверждению 1, имеем, что $\|x_\alpha\|_\mathbf{X} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$, т.е. $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} 0$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра, $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — d-разложимое РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — $\tau(\boldsymbol{X})$*-полно;*

(ii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — (bo)*-полно.*

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ установлена в теореме 1.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Выберем такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы мультинормируемой булевой алгебры $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}_{e_i}$ — булева алгебра счетного типа для всех $i \in I$. Покажем, что $(\mathbf{X}_{e_i}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}_{e_i}})$ — (bo)-полное РНП над $L^0(\mathcal{B}_{e_i})$ для всех $i \in I$. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{X}_{e_i}$ — (bo)-фундаментальная сеть, т.е. $(\sup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathbf{X}_{e_i}}) \downarrow 0$ в $L^0(\mathcal{B}_{e_i})$. Тогда $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — (bo)-фундаментальная сеть в $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_\mathbf{X})$ и, в силу (bo)-полноты $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_\mathbf{X})$, существует такое $x \in \mathbf{X}$, что $\|x_\alpha - x\|_\mathbf{X} \xrightarrow{(o)} 0$. Поскольку $\|x_\alpha\|_\mathbf{X} \xrightarrow{(o)} \|x\|_\mathbf{X}$ и $\|x_\alpha\|_\mathbf{X} \in e_iL^0(\mathcal{B})$, то $\|x\|_\mathbf{X} \in e_iL^0(\mathcal{B})$, т.е. $x \in \mathbf{X}_{e_i}$.

Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ — $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальная сеть в $\mathbf{X}$. Тогда $\{P_{e_i}(x_\alpha)\}$ есть $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-фундаментальная сеть в $\mathbf{X}_{e_i}$ для всех $i \in I$ (см. следствие 1). Поскольку $\mathcal{B}_{e_i}$ — мультинормируемая булева алгебра счетного типа и $(\mathbf{X}_{e_i}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}_{e_i}})$ — (bo)-полно, то $(\mathbf{X}_{e_i}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}_{e_i}})$ — $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-полно (см. теорему 2). Следовательно, существует такое $x_i^{(0)} \in \mathbf{X}_{e_i}$, что $\|P_{e_i}(x_\alpha) - x_i^{(0)}\|_\mathbf{X} \xrightarrow{t(\mathcal{B}_{e_i})} 0$.

Обозначим через D направленность всех конечных подмножеств из I, упорядоченных по включению, и для каждого $\beta \in D$ положим $z_\beta = \sum\limits_{i\in\beta} x_i^{(0)}$. Поскольку $\|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X} \wedge \|x_j^{(0)}\|_\mathbf{X} = 0$ при $i \neq j$, то, в силу утверждения 4 (i), $\|z_\beta\|_\mathbf{X} = \sum\limits_{i\in\beta} \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X} = \sup\limits_{i\in\beta} \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X}$. При этом, верно равенство $\|z_\gamma - z_\beta\|_\mathbf{X} = \sum\limits_{i\in\gamma\triangle\beta} \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X}$, где $\gamma\triangle\beta = (\gamma \setminus \beta) \cup (\beta \setminus \gamma)$. Кроме того, существует такое $f \in L^0(\mathcal{B})$, что $e_i f = \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X}$ для всех $i \in I$, в частности, множество $\{\|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X}\}_{i\in I}$ ограничено в $L^0(\mathcal{B})$, и поэтому существует $\sup\limits_{i\in I} \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X} = \sup\limits_{\beta\in D} \|z_\beta\|_\mathbf{X} = g \leq f$. Поскольку $(\sup\limits_{i\in\alpha} e_i) \uparrow \mathbf{1}$, то $\sup\limits_{\gamma,\beta\geq\alpha} \|z_\gamma - z_\beta\|_\mathbf{X} \leq \sup\limits_{i\notin\alpha} \|x_i^{(0)}\|_\mathbf{X} = (\mathbf{1} - \sup\limits_{i\in\alpha} e_i)g \downarrow 0$, т.е. $\{z_\beta\}$ — (bo)-фундаментальная сеть из $(\mathbf{X}, \|.\|_\mathbf{X})$. В силу (bo)-полноты $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_\mathbf{X})$, найдется такое $x_0 \in \mathbf{X}$, что $\|z_\beta - x_0\|_\mathbf{X} \xrightarrow{(o)} 0$, в частности, $z_\beta \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$ (см. утверждение 2). Согласно утверждению 6, имеем, что $P_{e_i}(z_\beta) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} P_{e_i}(x_0)$ для всех $i \in I$. Поскольку $P_{e_i}(z_\beta) = x_i^{(0)}$ при $\beta \geq \gamma = \{i\}$, то $x_i^{(0)} = P_{e_i}(x_0)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} P_{e_i}(x_0)$ для всех $i \in I$, что, в силу утверждения 6, влечет сходимость $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$. $\square$

Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — семейство попарно дизъюнктных элементов из РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ и D — направление всех конечных подмножеств из I, упорядоченных по включению. Говорят, что семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ — (bo)-*суммируемо*, если существует такое $x \in \mathbf{X}$, что $\|x - \sum\limits_{i\in\beta} x_i\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$ при $\beta \in D$ ([3], 2.1.5).

РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ называется *дизъюнктно полным* (d-*полным*), если любое семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathbf{X}$ является (bo)-суммируемым ([3], 2.1.5).

Примером d-полного РНП над $L^0(\mathcal{B})$ служит любое (bo)-полное d-разложимое РНП ([3], 2.2.1).

Из доказательства теоремы 3 вытекает следующее

Следствие 2. *Если d-разложимое и d-полное РНП $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ над $L^0(\mathcal{B})$ секвенциально (bo)-полно, то $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — $\tau(\boldsymbol{X})$-полно.*

Таким образом, с учетом теоремы 1 и следствия 2, верна следующая

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра, $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — d-разложимое и d-полное РНП над $L^0(\mathcal{B})$. Следующее условия эквивалентны:*
(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — секвенциально (bo)-полно;
(ii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — секвенциально $\tau(\boldsymbol{X})$-полно;
(iii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — (bo)-полно;
(iv). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — $\tau(\boldsymbol{X})$-полно.

Заметим, что РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$, построенное в примере 1, является d-разложимым и секвенциально $\tau(\mathbf{X})$-полным, но не d-полным РНП над $L^0(\mathcal{B})$. При этом, указанное РНП $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ не является $\tau(\mathbf{X})$-полным. Следовательно, свойство d-полноты в условиях теоремы 4 убрать нельзя.

5. Теорема Амемия для РНР над $L^0(\mathcal{B})$

Пусть $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ — РНР над $L^0(\mathcal{B})$, $\mathbf{X}_+ = \{x \in \mathbf{X} : x \geq 0\}$. В силу равенств

$$\|\,|x|\,\|_{\mathbf{X}} = \|x\|_{\mathbf{X}},\ x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),\ x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|),\ x, y \in \mathbf{X},$$

получаем, что решеточные операции $x \vee y$ и $x \wedge y$ непрерывны в топологии $\tau(\mathbf{X})$ по совокупности переменных. Следовательно, множество $\mathbf{X}_+$ замкнуто в $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$, и поэтому для любой возрастающей (убывающей) сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{X}$, $\tau(\mathbf{X})$ - сходящейся к $x \in \mathbf{X}$, верно равенство $x = \sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ $(x = \inf\limits_{\alpha\in A} x_\alpha)$ ([6], гл. V, § 4).

Повторяя дословно доказательство теоремы 3.2 из [2], используя замечание 3.3 из [2] и теорему 2, получим следующий вариант теоремы Амемия для РНР над $L^0(\mathcal{B})$, в случае, когда $\mathcal{B}$ — булева алгебра счетного типа.

Теорема 5. *Пусть* $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ *— РНР над* $L^0(\mathcal{B})$, *где* $\mathcal{B}$ *— мультинормируемая булева алгебра счетного типа. Следующие условия эквивалентны:*

(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ *—* $\tau(\boldsymbol{X})$*-полно;*

(ii). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ *— секвенциально* $\tau(\boldsymbol{X})$*-полно;*

(iii). *Любая возрастающая* $\tau(\boldsymbol{X})$*-фундаментальная последовательность из* $\boldsymbol{X}_+$ *сходится в* $(\boldsymbol{X}, \tau(\boldsymbol{X}))$*;*

(iv). *Для любой возрастающей* $\tau(\boldsymbol{X})$*-фундаментальной последовательности* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \boldsymbol{X}_+$ *существует* $\sup\limits_{n\geq 1} x_n$ *в* $\boldsymbol{X}$.

Заметим, что для РНР $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ из примера 1 выполнены свойства $(ii)-(iv)$ из теоремы 5. Однако, это РНР не является $\tau(\mathbf{X})$-полной, поскольку булева алгебра $\mathcal{B}$ в этом примере, не имеет счетный тип.

Опишем теперь вариант теоремы 5 для d-разложимых и d-полных РНР.

Рассмотрим следующие свойства РНР $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ над $L^0(\mathcal{B})$:

(i). $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ *—* $\tau(\boldsymbol{X})$*-полно;*

(ii). *Любая возрастающая* $\tau(\boldsymbol{X})$*-фундаментальная сеть* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \boldsymbol{X}_+$ *сходится в* $(\boldsymbol{X}, \tau(\boldsymbol{X}))$;

(iii). *Для любой возрастающей* $\tau(\boldsymbol{X})$*-фундаментальной сети* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \boldsymbol{X}_+$ *существует* $\sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ *в* $\boldsymbol{X}$.

Ясно, что всегда верны импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Теорема 6. *Если РНР* $(\boldsymbol{X}, \|.\|_{\boldsymbol{X}})$ *—* d*-разложима, то* $(i) \Leftrightarrow (ii)$. *Если же РНР* $(\boldsymbol{X}, \|.\|_{\boldsymbol{X}})$ *—* d*-разложима и* d*-полна, то* $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Доказательство. $(ii) \Rightarrow (i)$. Выберем такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы мультинормируемой булевой алгебры $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}_{e_i}$ — булева алгебра счетного типа для всех $i \in I$. Если $x, y \in \mathbf{X}_{e_i}$, то $\|x\|_{\mathbf{X}}, \|y\|_{\mathbf{X}} \in e_i L^0(\mathcal{B})$, и, в силу неравенства $\|\, |x-y|\, \|_{\mathbf{X}} = \|x-y\|_{\mathbf{X}} \leq \|x\|_{\mathbf{X}} + \|y\|_{\mathbf{X}}$, имеем, что $|x-y| \in \mathbf{X}_{e_i}$. Следовательно, $\mathbf{X}_{e_i}$ — векторная подрешетка в $\mathbf{X}$, и $\mathbf{X}_{e_i}$ есть РНР над $L^0(\mathcal{B}_{e_i})$. Если $0 \leq x_n \in \mathbf{X}_{e_i}$, $x_n \leq x_{n+1}$, $\{x_n\}$ — $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-фундаментальная последовательность, то $\{x_n\}$ — $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальна, и, в силу условия (ii), существует такое $x \in \mathbf{X}$, что $x_n \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x$. Поскольку $\|x_n\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{t(B)} \|x\|_{\mathbf{X}}$, $\|x_n\|_{\mathbf{X}} \in e_i L^0(\mathcal{B})$, то $\|x\|_{\mathbf{X}} \in e_i L^0(\mathcal{B})$, т.е. $x \in \mathbf{X}_{e_i}$. Используя теперь теорему 5, получим, что $\mathbf{X}_{e_i}$ — $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-полно для каждого $i \in I$.

Покажем теперь, что любая $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальная сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathbf{X}_+$ сходится в $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$. Также, как и при доказательстве теоремы 3, используя $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-полноту $\mathbf{X}_{e_i}$, получим существование такого $x_i^{(0)} \in \mathbf{X}_{e_i}$, что $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} x_i^{(0)}$ для всех $i \in I$.

Пусть D и $z_\beta = \sum\limits_{i\in\beta} x_i^{(0)}, \beta \in D$ те же, что и при доказательстве теоремы 3. Согласно замечанию 2, $P_{e_i}(x_\alpha) \geq 0$, и поэтому $x_i^{(0)} \geq 0$, что влечет неравенства $0 \leq z_\beta \leq z_\gamma$ при $\beta \leq \gamma$. Поскольку сеть $\{z_\beta\}_{\beta\in D} \subset \mathbf{X}_+$ — (bo)-фундаментальна, (см. доказательство теоремы 3), то, в силу условия (ii), найдется такое $x_0 \in \mathbf{X}$, что $z_\beta \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$. Следовательно, $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$ (см. конец доказательства теоремы 3).

Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — произвольная $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальная сеть из $\mathbf{X}$, $x_\alpha^+ = x_\alpha \vee 0$, $x_\alpha^- = (-x_\alpha)\vee 0$. Поскольку $|x_\alpha^+ - x_\beta^+| \le |x_\alpha - x_\beta|$, $|x_\alpha^- - x_\beta^-| \le |x_\alpha - x_\beta|$, то $\{x_\alpha^+\}_{\alpha\in A}$, $\{x_\alpha^-\}_{\alpha\in A} - \tau(\mathbf{X})$-фундаментальные сети из $\mathbf{X}_+$. В силу доказанного выше, существуют такие $x_0, y_0 \in \mathbf{X}_+$, что $x_\alpha^+ \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$, $x_\alpha^- \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} y_0$, что влечет сходимость $x_\alpha = x_\alpha^+ - x_\alpha^- \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0 - y_0$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Также, как и при доказательстве импликации $(ii) \Rightarrow (i)$, имеем, что РНР $\mathbf{X}_{e_i}$ — $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-полна для каждого $i \in I$. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — возрастающая $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальная сеть из $\mathbf{X}_+$. Тогда $\{P_{e_i}(x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ есть возрастающая $\tau(\mathbf{X}_{e_i})$-фундаментальная сеть из $(\mathbf{X}_{e_i})_+$. Согласно теореме 5, существует такое $x_i^{(0)} \in \mathbf{X}_{e_i}$, что $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} x_i^{(0)}$ и $x_i^{(0)} = \sup\limits_{\alpha\in A} P_{e_i}(x_\alpha)$.

Пусть $\{z_\beta\}_{\beta\in D}$ — та же возрастающая сеть из $\mathbf{X}_+$, что и при доказательстве импликации $(ii) \Rightarrow (i)$. Поскольку $\{z_\beta\}_{\beta\in D}$ — $\tau(\mathbf{X})$-фундаментальна, то, в силу условия (iii), в $\mathbf{X}$ существует $x_0 = \sup\limits_{\beta\in D} z_\beta$.

Согласно свойству d-полноты для РНР $\mathbf{X}$, существует такое $y \in \mathbf{X}$, для которого $\|z_\beta - y\|_{\mathbf{X}} \xrightarrow{(o)} 0$. Следовательно, $z_\beta \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} y$ и, в силу следствия 1, $P_{e_i}(z_\beta) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} P_{e_i}(y)$. Поскольку $P_{e_i}(z_\beta) = x_i^{(0)}$ при $\beta \ge \{i\}$, то $x_i^{(0)} = P_{e_i}(y)$. Так как сеть $\{z_\beta\}_{\beta\in D}$ возрастает и $\mathbf{X}_+$ — $\tau(\mathbf{X})$-замкнуто, то $y = \sup\limits_{\beta\in D} z_\beta = x_0$, т.е. $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(\mathbf{X}_{e_i})} x_i^{(0)} = P_{e_i}(y) = P_{e_i}(x_0)$ для всех $i \in I$. Согласно утверждению 6, получим, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau(\mathbf{X})} x_0$. $\square$

Замечание 3. Заменяя в доказательстве теоремы 6 сеть $\{x_\alpha\}$ на последовательность $\{x_n\}$, получим, что для d-разложимых и d-полных РНР $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ сохраняется эквивалентность условий $(ii), (iii), (iv)$ из теоремы 5 и в случае произвольной мультинормируемой булевой алгебры $\mathcal{B}$.

Из теорем 4, 6 и замечания 3 вытекает следующая

Теорема 7. *Пусть $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — d-разложимая и d-полная РНР над $L^0(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — мультинормируемая булева алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(i). *$(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — $\tau(\boldsymbol{X})$-полно;*

(ii). *$(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{X}})$ — секвенциально $\tau(\boldsymbol{X})$-полно;*

(iii). *Любая возрастающая $\tau(\boldsymbol{X})$-фундаментальная последовательность из $\boldsymbol{X}_+$ сходится в $(\boldsymbol{X}, \tau(\boldsymbol{X}))$;*

(iv). *Для любой возрастающей $\tau(\boldsymbol{X})$-фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n\ge1} \subset \boldsymbol{X}_+$ существует $\sup\limits_{n\ge1} x_n$ в $\boldsymbol{X}$.*

Список цитируемых источников

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
2. *Закиров Б. С.* Теория Амемия для L^o - нормированных векторных решеток // Узбекский матем. ж. — 2008. — **N 3**. — С. 23-33.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. — М.: Наука, 2003. — 620 с.
4. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961. — 408 с.
5. *Сарымсаков Т. А, Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. — Ташкент: ФАН, 1983. — 303 с.
6. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

Получена 27.02.2012