

УДК 534.231

# Вычисление коэффициентов возбуждения сейсмоакустических волн в волноводе

И. В. Калинюк, А. А. Ярошенко\*

Отдел сейсмологии института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины,  
г. Симферополь, 97505, Украина *E-mail: kalinyuki2010@gmail.com*

\*Севастопольский национальный технический университет,  
г. Севастополь, 99053, Украина *E-mail: yaroshenko@optima.com.ua*

**Аннотация.** В статье определяются коэффициенты возбуждения нормальных волн в волноводе с гармоническим источником, расположенным в упругом полупространстве. Применяется сеточный метод расчета полей давлений, адаптированный для модели среды с произвольным профилем скорости звука.

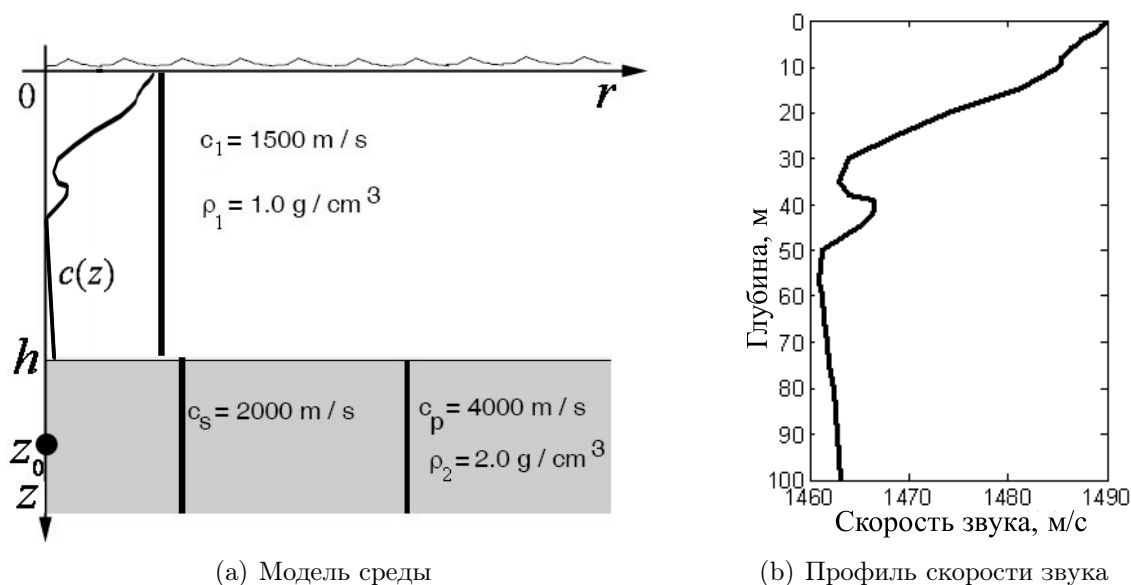
**Ключевые слова:** акустические волны, поля давления

## 1. Введение

В морской среде постоянно присутствует звуковой шум, создаваемый различными источниками в том числе и сейсмоакустической эмиссией [1-3]. Сейсмические волны, прошедшие упругую среду, распространяются в жидкости в виде волн сжатия, образуя акустические поля давлений. Структура полей давлений определяется нормальными волнами (модами) и коэффициентами их возбуждения. Коэффициенты и форма нормальных волн зависят от модели рассматриваемой среды. Наиболее простыми и хорошо исследованными являются модель Пекериса (жидкий слой на жидком полупространстве) [4] и модель Шермана (жидкий слой, лежащий на упругом полупространстве) [5]. Модели Пекериса и Шермана с источником, расположенным в жидком слое, широко используются в гидроакустике. Для моделей с неоднородным жидким слоем разработаны численные методы расчета полей звуковых давлений [6]. В работах [7,8] получены аналитические решения для моделей с однородным слоем и источником в упругом полупространстве. В реальной морской среде скорость звука зависит от температуры, солености и статического давления. Это влияет на структуру акустического поля [9]. В связи с этим возникает задача, в которой необходимо определить акустическое поле в неоднородной среде. Учитывая природу источника и место его расположения (нижнее полупространство), в статье рассматривается модель Шермана. Данную задачу можно решить, используя сеточные методы для волноводов с источником в жидком слое.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим гидроакустический волновод глубины  $h$ , лежащий на упругом полупространстве рис.1(a). Плотность жидкого слоя  $\rho_1$ , а полупространства  $\rho_2$ . Скорость звука в жидком слое  $c(z)$  является функцией глубины. В нижнем слое  $c_p$  и  $c_s$  — скорости продольных и поперечных волн.



(a) Модель среды

(b) Профиль скорости звука

Рис. 1. Акустическая модель среды

В упругом полупространстве на глубине  $z_0 = h + d$  находится точечный гармонический источник. Распространение звуковых волн в описанной модели сводится к решению следующих дифференциальных уравнений [4,6,8]:

$$\Delta\varphi_1 + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\varphi_1 = 0, 0 \leq z \leq h \quad (1)$$

$$\Delta\varphi_2 + \frac{\omega^2}{c_p^2}\varphi_2 = -\frac{Q\delta(z-z_0)\delta(r)}{2\pi r}, z \geq h \quad (2)$$

$$\Delta\psi_2 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\psi_2 = 0, z \geq h \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат,  $\delta(\cdot)$  — функция Дирака,  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_2$  — потенциалы продольных и поперечных волн,  $\omega$  — циклическая частота источника. На границах разделов двух сред должны выполняться следующие граничные условия [10]:

для границы "воздух-вода"

$$\varphi_1 = 0, \quad z = 0. \quad (4)$$

для границы "вода-упругое полупространство" нормальное давление  $\sigma_{zz}$  равно давлению в жидкости  $p = \rho_1 \omega^2 \varphi_1$ , взятому с обратным знаком, а касательные напряжения  $\sigma_{zr}, \sigma_{z\theta}$  равны нулю

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -p, \\ \sigma_{zr} &= \sigma_{z\theta} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

компоненты вектора нормальных смещений равны между собой

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \quad z = h, \quad (6)$$

### 3. Решение задачи

В случае однородного водного слоя ( $c(z) = const$ ) задача (1)-(3) с граничными условиями (4)-(6) допускает аналитическое решение. Для произвольного профиля скорости звука  $c(z)$  с источником, расположенным в жидком слое, разработано несколько методов решения [11]. Среди них — сеточный метод, основанный на решении спектральной задачи Штурма-Лиувилля для волновода путем аппроксимации производных первого и второго порядка. Исходя из того, что расположение источника не влияет на дисперсионные характеристики волновода, для решения задачи можно использовать волновые числа  $\xi_n$  и собственные функции  $Z_n(z)$ , рассчитанные сеточным методом [6]. При этом необходимо определить коэффициенты связи собственных функций уравнений (1) и (2), соответствующих волновым числам  $\xi_n$ . Решения волновых уравнений (1)-(3) представим в виде:

$$\varphi_1 = AZ(\beta_1 z) J_0(\xi r) e^{-j\omega t}, \quad 0 \leq z \leq h \quad (7)$$

$$\varphi_2 = B e^{(j\beta_p(z-h))} J_0(\xi r) e^{-j\omega t}, \quad z \geq h \quad (8)$$

$$\psi_2 = C e^{(j\beta_s(z-h))} J_0(\xi r) e^{-j\omega t}, \quad z \geq h \quad (9)$$

где  $\beta_{1,p,s}^2 = k_{1,p,s}^2 - \xi^2$ ,  $k_{1,p,s} = (\omega/c_{1,p,s})$ ,  $Im(\beta_{1,p,s}) > 0$ . Подставляя (7)-(9) в граничные условия (4)-(6) получим однородную систему уравнений относительно коэффициентов A,B,C:

$$\Lambda(\xi) \cdot X = 0, \quad \Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_1 Z'(\beta_1 h) & -j\beta_p & -\xi^2 \\ 0 & 2j\beta_p & \xi^2 - \beta_s^2 \\ \rho_1 \omega^2 Z(\beta_1 h) & 2\mu \xi^2 - \rho_2 \omega^2 & 2j\xi^2 \beta_s \mu \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (10)$$

где  $\mu$ - постоянная Ламэ. Дисперсионное уравнение волновода имеет вид [8]:

$$\beta_1 Z'(\beta_1 h) R(\xi) - \frac{j\beta_p k_s^4 \rho_1 Z(\beta_1 h)}{\rho_2} = 0, \quad (11)$$

где

$$R(\xi) = 4\xi^2\beta_p\beta_s + (2\xi^2 - k_s^2)^2 \quad (12)$$

Корни уравнения (11) соответствуют собственным значениям  $\xi_n$  волновода. Обозначим собственные функции через

$$Z_n^0(\beta_1 z), 0 \leq z \leq h$$

Используя непрерывность звукового давления, из однородной системы (10) можно выразить  $B$  и доопределить собственные функции для  $z \geq h$  :

$$Z_n^h(\beta_1 z) = \frac{\rho_1}{\rho_2} M_n Z_n^0(\beta_1 h) e^{j\beta_p(z-h)}, z \geq h$$

где

$$M_n(\xi) = -\frac{k_s^2(2\xi^2 - k_s^2)}{R(\xi)}.$$

Выражение  $M_n(\xi)$  можно выразить через фазовую скорость  $v$ , тогда получим:

$$M_n(v) = -\frac{\left(\frac{v}{c_s}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2\right)}{4\sqrt{\left(\frac{v}{c_p}\right)^2 - 1}\sqrt{\left(\frac{v}{c_s}\right)^2 - 1} + \left(2 - \left(\frac{v}{c_s}\right)^2\right)^2} \quad (13)$$

При этом оказывается, что выражение (13) не зависит от частоты. Первый корень дисперсионного уравнения соответствует нулевой моде, которая является аналогом поверхностной волны Стоунли. Собственную функцию нулевой моды запишем в виде [12]:

$$F_0^0(\beta_1(\xi_0)z) = \frac{1}{2} \frac{k_s^2 Z_0^0(\beta_1(\xi_0)z)}{(Z_0^0(\beta_1(\xi_0)h))' \beta_1(\xi_0)}, 0 \leq z \leq h$$

$$F_0^h(\beta_1(\xi_0)z) = \frac{1}{2} \frac{j(2\xi_0^2 - k_s^2) e^{j\beta_p(\xi_0)(z-h)}}{\beta_p(\xi_0)}, z \geq h$$

Полученная система собственных функций является также ортогональной [13]. Источник в (2) задан в виде произведения дельта-функций. Разложим функцию  $\delta(z - z_0)$  в ряд по базису из собственных функций

$$\delta(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n Z_n(z) \quad (14)$$

где

$$Z_n(z) = \begin{cases} Z_n^0(\beta_1(\xi_n)z), & 0 \leq z \leq h \\ Z_n^h(\beta_1(\xi_n)z), & h \leq z < \infty. \end{cases} \quad (15)$$

После умножения (14) на  $\rho_2 Z_m(z)$  и интегрирования от 0 до  $\infty$  получим коэффициенты разложения:

$$G_m = \frac{\rho_2 Z_m(z_0)}{\nu_m}$$

где  $\nu_m = \int_0^\infty \rho_2 Z_m^2(z) dz$ .

Запишем решение уравнений (1)-(2) в общем виде:

$$\varphi(r, z, t) = \begin{cases} e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} R_n^0(r) Z_n^0(\beta_1(\xi_n)z), & 0 \leq z \leq h \\ e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} R_n^h(r) Z_n^h(\beta_1(\xi_n)z), & h \leq z < \infty. \end{cases} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (2) учитывая разложение (14), получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_n^h(r)}{\partial r} \right) + \xi_n^2 R_n^h(r) = -\frac{Q\delta(r)\rho_2 Z_n^h(z_0)}{2\pi r \nu_n},$$

решение которого представим в виде [6]:

$$R_n^h(r) = \frac{jQ\rho_2 Z_n^h(z_0)}{4\nu_n} H_0^1(\xi_n r) \quad (17)$$

Равенство функций  $R_n^0(r)$  и  $R_n^h(r)$  следует из выбора решения волновых уравнений (7), (8). Подставляя (17) в (16) найдем потенциал первого слоя:

$$\varphi_1 = \frac{j}{4} Q \rho_2 e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(z_0) Z_n(z)}{\nu_n} H_0^1(\xi_n r) \quad (18)$$

Следуя [4] представим выражение (18) в асимптотическом виде, используя (15) и учитывая, что  $z_0 = h + d$  получим:

$$\varphi_1 = \frac{j}{4} Q \rho_2 e^{-j(\omega t + \pi/4)} r^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_1 M_n Z_n^0(\beta_1 h) e^{j\beta_p d} Z_n^0(\beta_1 z)}{\rho_2 \nu_n} \frac{e^{j\xi_n r}}{\sqrt{\xi_n}} \quad (19)$$

Запишем (19) в виде:

$$\varphi_1 = e^{-j(\omega t + \pi/4)} r^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n(d) Z_n^0(\beta_1 h) Z_n^0(\beta_1 z) e^{j\xi_n r} \quad (20)$$

где  $q_n(d)$  — коэффициенты возбуждения нормальных волн

$$q_n(d) = \frac{j}{4} \frac{Q\rho_1}{\sqrt{\xi_n \nu_n}} M_n(\xi_n) e^{j\beta_p d}.$$

## 4. Результаты

На рис.1(a,b) приведена модель среды с разными профилями скорости звука в жидкости. Параметры среды описаны в таблице 1. Скорость имеет размерность км/с, плотность — г/см<sup>3</sup>, частота — Гц и глубина выражена в км.

Таблица 1. Физико-механические параметры среды.

№	$f$	$h$	$\rho_1$	$c$	$\rho_2$	$c_p$	$c_s$
1	50	0.1	1.0	1.5	2.0	4.0	2.0
2	50	0.1	1.0	$c(z)$	2.0	4.0	2.0

Для двух профилей скорости звука из формул (11)-(12) найдены волновые числа и собственные функции (рис.2(a)). На частоте 50 Гц в волноводе распространяются 5 мод. Для неоднородной модели вычисления волновых чисел и собственных функций производились сеточным методом. На (рис.2(б)) приведено сравнение первых и четвертых мод двух профилей. Жирная линия соответствует постоянному профилю.

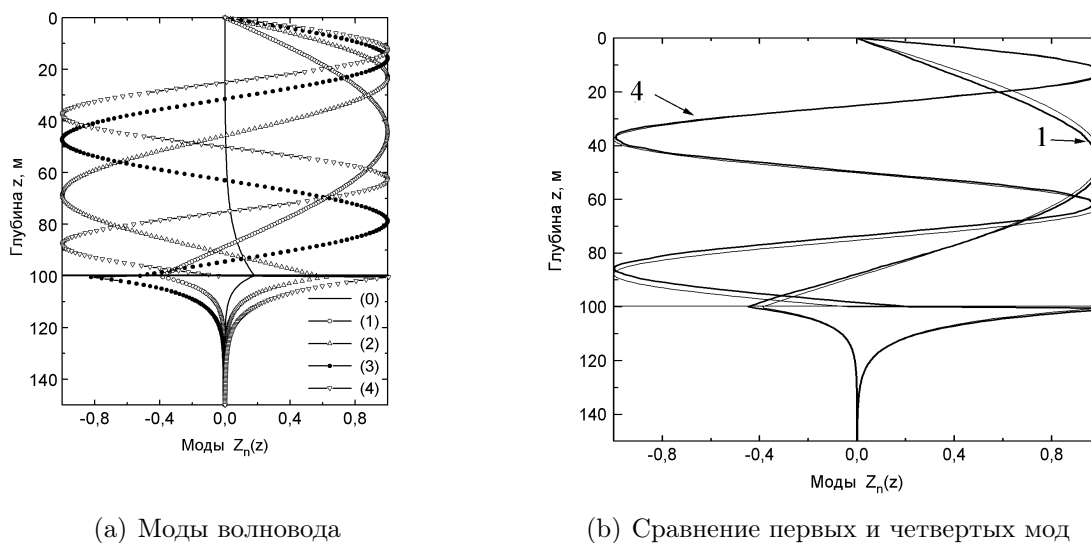


Рис. 2. Собственные функции

Поле звукового давления вычисляется по формуле  $p = \rho_1 \omega^2 \varphi_1$ , при этом необходимо учесть в (20) дополнительные множители  $M_n(\xi_n)$  (13) и  $e^{j\beta_p(\xi_n)d}$  в коэффициентах возбуждений нормальных волн. Из (13) видно, что выражение полностью

определяется параметрами упругого слоя и не зависит от частоты и места расположения источника. В момент возникновения нормальных волн абсолютное значение коэффициента (13) равно единицы. Мода, фазовая скорость которой наиболее близка к фазовой скорости в волне Рэлея (корень уравнения  $R(\xi) = 0$ ), имеет наибольший коэффициент  $M_n(\xi_n)$ . Второй множитель определяется не только глубиной источника  $d$ , но и волновым числом каждой моды  $\beta_p(\xi_n)$ . Поэтому показательный закон для каждой моды выделяет последнюю распространяющуюся моду как доминирующую над остальными. Комбинация двух сомножителей корректирует коэффициенты возбуждения нормальных волн, в результате чего звуковые поля давлений могут значительно отличаться при различных параметрах упругого полупространства. На рис.3 приведены нормированные на максимум зависимости дополнительных множителей от волновых чисел и глубины источника. Из рисунка видно, что амплитудное преобладание последней распространяющейся моды возрастает с глубиной источника.

Для неоднородной среды на исследуемой частоте существенных изменений не возникает.

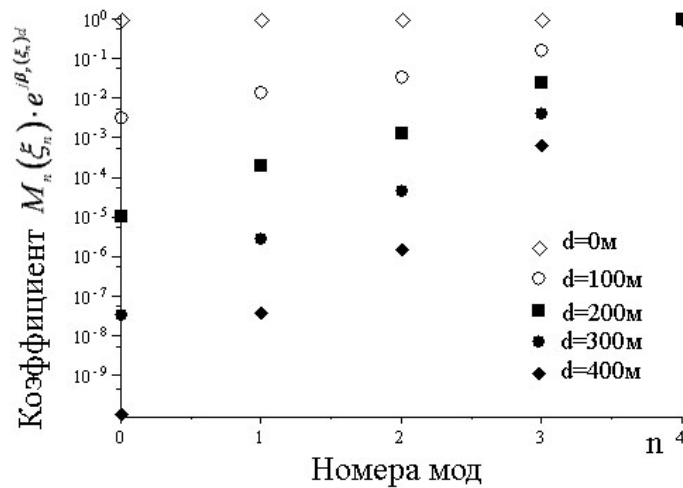


Рис. 3. Зависимости дополнительных множителей от волновых чисел и глубины источника

## 5. Выводы

Коэффициенты возбуждения нормальных волн источником, расположенным в упругом полупространстве или на его границе, зависят от параметров упругой среды. При заглублении источника от дна в сторону упругого полупространства коэффициенты возбуждения нормальных волн убывают по показательному закону. При этом амплитудные коэффициенты каждой моды зависят от соответствующего волнового числа. Такая зависимость в результате приводит к амплитудному преобладанию последней распространяющейся моды над всеми остальными.

## Список цитируемых источников

1. *Грешников В.А., Дробот Ю.Б.* Акустическая эмиссия. —М.: Изд. Стандартов, 1976. —272 с.
2. *Соболев Г.А., Пономарев А.В.* Физика землетрясений и предвестники. —М.: Наука, 2003. —270 с.
3. *Марапулец Ю.В.* Методы исследования высокочастотной геоакустической эмиссии. —Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2008. —105 с.
4. *Пекерис К.* Теория распространения звука взрыва в мелкой воде. // Распространение звука в океане. —М.: Изд-во иностр. лит., 1951. —С. 48-156.
5. *Шерман Д.И.* О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве.// Тр. Сейсмол. ин-та. —М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. —№115. —43 с.
6. *Porter M.B.* The kraken normal mode program.// SACLANT Undersea Research Centre, 2001. —202 p.
7. *Лапин А.Д.* Звуковое поле в жидком волноводе от монопольного и дипольного источников, расположенных в граничащем с волноводом твердом полупространстве. // Акуст. журн. —1993. —Т.39, вып. 5. —С. 859-865.
8. *Ewing W.M, Jardetzky W.S., Press F.* Elastic waves in layered media. N.Y., McGraw-Hill, 1957. —380 p.
9. *Ярошенко А.А., Ластовенко О.Р., Лисютин В.А., Калинин И.В.* О влиянии профиля скорости звука и течений на распространение акустических волн в море.// Вісник СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка. —2007. —№1. —С.178-186.
10. *Исакович М.А.* Общая акустика. —М.: Наука, 1973. —495 с.
11. *Jensen F.B.* Ocean seismo-acoustic modeling: Numerical Methods: SACLANT Undersea Research Centre, La Spezia, Italy 1999. —344 p.
12. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. —М.: Наука, 1981. —288 с.
13. *Клей К., Медвин Г.* Акустическая океанография. —М.: Мир, 1980. —580 с.

Получена 31.05.2012