

УДК 539.3+539.215+622.276

Волны давления и движение жидкости в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде при динамических воздействиях

А. Р. Сницер

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,

НИИ Проблем геодинамики,

Симферополь 95007. E-mail: *snitser_arnold@yahoo.com*

Аннотация. Рассмотрена задача о притоке жидкости в скважину из продуктивного пласта, расположенного на заданной глубине, при гармонических воздействиях на поверхность скважины. Динамическая составляющая дебита рассчитана на основе решения краевой задачи о гармоническом воздействии на поверхность скважины в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде, в рамках теории М. Био. Представлены частотные зависимости перемещений твердой и жидкой фаз среды, порового давления и дебита. Расчеты проведены для заданных упругих и фильтрационных свойств среды с учетом диссипации. Оценено влияние частоты воздействия на скважину и коэффициента проницаемости на динамическую составляющую дебита в сравнении с дебитом, обусловленным гидростатическим пластовым давлением.

Ключевые слова: теория М. Био, пористо-упругая насыщенная жидкостью среда, гармоническое воздействие, волна давления, скважина, дебит.

Введение

Известно, что вибровоздействия используются для реанимации и повышения продуктивности нефтяных, газовых и артезианских скважин [4]. Это связано не только с возможным увеличением пористости (образованием трещин) и с изменением других свойств среды, но и созданием дополнительного градиента давления поровой жидкости. Вибровоздействия на поверхность скважины в области нефтеносных пластов создают фильтрационные волны давления, которые приводят к повышению дебита скважин.

В этой связи представляет интерес вопрос о влиянии частоты вибровоздействий на генерацию фильтрационных волн давления и на приток жидкости из пласта в скважину. Нахождение оптимальных частотных режимов динамических воздействий на пласт с целью увеличения дебита скважин является важным стимулом решения таких задач в широком частотном диапазоне воздействий на среду.

Динамические воздействия на среду также используются для определения ее свойств. Знание фильтрационных свойств нефтеносных пластов способствует эффективному освоению нефтяных месторождений. Одним из методов определения таких характеристик пластов как пьезо- и гидропроводность, является метод

фильтрационных волн давления (ФВД) [1,7]. Метод основан на натуральных измерениях и использовании расчетных формул, теоретически полученных на основе выбранной модели фильтрации.

Модели, чаще всего используемые в данном методе, предполагают задание закона фильтрации (связь скорости фильтрации с поровым давлением жидкости) и дифференциального уравнения для давления. С наиболее распространенными моделями такого типа можно ознакомиться, например, в работе [7]. При проведении межскважинных исследований методами фильтрационных гармонических волн давления, обычно используют воздействия, периоды которых составляют минуты, а чаще часы и сутки, что соответствует частотам f менее 10^{-2} Гц. Соответственно колебания дебитов и давлений жидкости в забое скважин также будут иметь такие же частоты. На столь низких частотах упруго-акустические эффекты в пластах практически не выражены, в то время как имеет место фильтрация жидкости из пластов. Именно таким условиям соответствует приведенный выше тип моделей фильтрации.

Однако, для анализа волновых процессов происходящих в пористо-упругой среде насыщенной жидкостью при динамических воздействиях широкого диапазона частот $0 - 10^6$ Гц, необходимо использовать модели среды, учитывающие как ее фильтрационные, так и упругие свойства. В этом случае подходящей является модель М. Био, получившая широкое применение и экспериментальные подтверждения [17,19]. Целью данной работы является исследование связи динамического воздействия на скважины с характером возникающих волн давления и перетоками жидкости в среде на основе модели М. Био. Полученные закономерности также предполагают их использование в методах гидродинамического мониторинга пористо-упругой среды в широком частотном диапазоне динамического воздействия на нее.

1. Стационарная фильтрация

Пусть продуктивный (нефтеносный) горизонтальный пласт мощности h располагается на глубине H_d от дневной поверхности весомой породы. От поверхности, сквозь породу и пласт пробурена скважина, радиус которой $r = a$ значительно меньше толщины пласта ($r \ll h$). Пренебрегая влиянием плоских границ пласта на его напряженно-деформированное состояние и движение жидкости, будем считать скважину расположенной в безграничной пористо-упругой насыщенной жидкостью среде отвечающей модели Био [8,12,17]. Пластовое давление p_∞ по всей мощности пласта в отсутствии скважины имеет порядок гидростатического давления на глубине залегания пласта [13], поэтому будем полагать:

$$p_\infty = \rho_f g H_d = const, \quad (1)$$

где ρ_f — плотность поровой жидкости, g — ускорение свободного падения. При наличии в пласте скважины со свободными от напряжений проницаемыми границами, пластовое давление будет убывать в радиальном направлении к оси скважины, в силу чего согласно закону Дарси возникает приток поровой жидкости в

скважину. В случае плоского симметричного относительно оси скважины течения жидкости (фильтрации), с учетом значений порового давления на поверхности скважины и на бесконечном (достаточно большом $r = r_c \gg a$) удалении от нее, распределение пластового давления $p(r)$ вдоль радиального направления определяется решением краевой задачи для уравнения Лапласа [15]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad p(a) = 0, \quad p(r_c) = p_\infty, \quad (2)$$

и имеет вид:

$$p^{st}(r) = p_\infty \frac{\ln(r/a)}{\ln(r_c/a)}. \quad (3)$$

Исходя из распределения (3) порового давления в пласте со скважиной и используя закон Дарси, можно определить скорость фильтрации, а затем дебит жидкости:

$$Q_{st} = -2\pi h k_{pr} p_\infty / \theta_0 \ln(r_c/a), \quad (4)$$

где k_{pr} — коэффициент проницаемости пласта; θ_0 — динамическая вязкость поровой жидкости; r_c — радиальное расстояние от оси скважины, на котором поровое давление (с заданной точностью) мало отличается от пластового давления p_∞ .

2. Задача о гармоническом воздействии на поверхность скважины

Если на поверхность скважины подействовать гармонической проницаемой нагрузкой (оставляющей возможность притока жидкости из пласта в скважину), то в пласте возникнут фильтрационные волны давления [1,7], которые изменят статический дебит скважины (4), обусловленный неизменным во времени пластовым давлением (3). Для установления связи между гармоническими воздействиями на пласт и изменением дебита жидкости, а также для анализа возникающих при этом фильтрационных волн давления, потребуется решение динамической краевой задачи о гармоническом нагружении поверхности скважины в безграничной пористо-упругой насыщенной жидкостью среде. Такая задача для произвольной гармонической во времени функции нагружения скважины, в рамках теории М. Био [17], решена в работе [9]. Приведем краткую постановку этой задачи и выпишем необходимые для дальнейшего анализа результаты, которые следуют из ее решения.

Отметим, что важным стимулом использования теории М. Био для решения этой задачи является не только ее эффективность в широком диапазоне частот, но и возможность учитывать как фильтрационные, так и упругие свойства среды, а также ее диссипативные характеристики (вязкость поровой жидкости и трение в упругом скелете).

Согласно теории М. Био, динамика пористоупругой насыщенной жидкостью среды определяется двумя векторными уравнениями относительно векторов пере-

мещений скелета \vec{u} и поровой жидкости \vec{U} [8,12,17]:

$$N\nabla^2\vec{u} + \text{grad} \left[(A + N)\text{div}\vec{u} + Q\text{div}\vec{U} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U} \right) + b\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{u} - \vec{U} \right) \quad (5)$$

$$\text{grad} \left(Q\text{div}\vec{u} + R\text{div}\vec{U} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U} \right) + b\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{U} - \vec{u} \right), \quad (6)$$

Входящие в (5), (6) константы выражаются через физические свойства среды: $N = \mu$, $A = \lambda + K_0 a_0^2 S_0 / m$, $R = m K_0 S_0$, $Q = a_0 K_0 S_0$, λ , μ — упругие константы Ламэ пористого упругого скелета; K_0 — модуль объемной сжимаемости жидкости; $a_0 = 1 - m - K_s / K_r$, $S_0 = m K_r / (m K_r + a_0 K_0)$, $K_s = \lambda + 2\mu / 3$ — модуль всестороннего сжатия пористого скелета с пустыми порами, K_r — истинный модуль сжимаемости твердой фазы, m — коэффициент пористости среды; $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = (m\rho_f - \rho_{12})$ — эффективные массы фаз, ρ_s , ρ_f — плотности твердой и жидкой фаз соответственно; ρ_{12} — коэффициент динамической связи в модели М. Био.

При указанных выше условиях гармонического нагружения поверхности скважины, граничные условия для данной задачи при $r = a$ и $|z| < \infty$ имеют вид:

$$\sigma_{rr}^s(a, z) = -p_1(z) \exp(i\omega t), \quad \tau_{rz}^s(a, z) = 0, \quad (7)$$

$$\sigma^f(a, z) = 0. \quad (8)$$

В граничных условиях (7), (8), индекс s относится к твердой фазе, f — к жидкой; $p_1(z)$ — заданная функция нагрузки.

Воспользуемся решением сформулированной задачи (5)-(8) полученным в работе [9] для произвольной функции нагрузки. Необходимые нам в дальнейшем выражения для порового давления жидкости и радиальных компонент вектора перемещений твердой и жидкой фаз, которые следуют из решения этой задачи, содержат под знаком интегралов преобразования Фурье от функции нагрузки. В рассматриваемом нами здесь случае динамического воздействия, выберем функцию нагрузки независимую от координаты z на всей поверхности скважины:

$$p_1(z) = p_1 = \text{const}. \quad (9)$$

Тогда, вычисляя преобразование Фурье функции (9) получим:

$$\bar{p}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1 \exp(-i\xi z) dz = 2\pi p_1 \delta(\xi). \quad (10)$$

После подстановки (10) в соответствующие интегралы [9], с учетом свойства функции Дирака: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(\xi - a)d\xi = f(a)$, для радиальных компонент перемещений твердой $u(r)$ и жидкой $U(r)$ фаз среды и дополнительного порового давления¹ $p^{din}(r)$ жидкости получим:

$$u(r) = u_0(r) + u_1(r) \quad (11)$$

¹ Данное обозначение подчеркивает, что это давление жидкости возникает благодаря динамическому воздействию на поверхность скважины.

$$u_0(r) = p_1 \left(\frac{a}{2\mu} \right) \frac{SH_1}{\mathcal{D}} \mathcal{H}^{(1)}(\bar{k}_0 r), \quad u_1(r) = -p_1 \left(\frac{a}{2\mu} \right) \sqrt{\frac{z_0}{z_1}} \frac{H_0}{\mathcal{D}} \mathcal{H}^{(1)}(\bar{k}_1 r). \quad (12)$$

$$U(r) = U_0(r) + U_1(r), \quad U_0(r) = M_0 u_0(r), \quad U_1(r) = M_1 u_1(r). \quad (13)$$

$$p^{din}(r) = p_0^{din}(r) + p_1^{din}(r), \quad (14)$$

$$p_0^{din}(r) = -m^{-1} \sigma_0^f(r), \quad p_1^{din}(r) = -m^{-1} \sigma_1^f(r). \quad (15)$$

$$\sigma_0^f(r) = p_1 \left(\frac{\bar{k}_0 a}{2\mu} \right) \frac{T_1 H_1}{\mathcal{D}} \mathcal{H}^{(0)}(\bar{k}_0 r), \quad \sigma_1^f(r) = -p_1 \left(\frac{\bar{k}_0 a}{2\mu} \right) \frac{T_1 H_0}{\mathcal{D}} \mathcal{H}^{(0)}(\bar{k}_1 r). \quad (16)$$

$$\mathcal{D} = SH_1 [1 - (\bar{k}_0 a) S_0 H_0] - \frac{\bar{k}_0}{\bar{k}_1} H_0 [1 - (\bar{k}_1 a) S_1 H_1]. \quad (17)$$

В выражениях (11), (13), (14) компоненты перемещений и поровое давление представлены в виде суммы двух слагаемых. Слагаемые с индексом ноль отвечают медленной продольной волне (волне второго рода) с волновым числом \bar{k}_0 , а с индексом единица — быстрой продольной волне (волне первого рода) с волновым числом \bar{k}_1 :

$$\bar{k}_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} z_j, \quad j = 0, 1, \quad (18)$$

где

$$c^2 = \frac{H}{\rho}, \quad H = A + 2N + R + 2Q, \quad \rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}, \quad (19)$$

$\omega = 2\pi f$ — циклическая частота; z_0, z_1 — корни квадратного уравнения:

$$\alpha z^2 - \beta z + \gamma = 0, \quad (20)$$

$$\alpha = (q_{11}q_{22} - q_{12}^2), \quad \beta = q_{11}\gamma_{22} + q_{22}\gamma_{11} - q_{12}\gamma_{12} + b/(\rho s), \quad (21)$$

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + b/(\rho s), \quad \gamma_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad \left\| \begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{array} \right\| = \frac{1}{H} \left\| \begin{array}{cc} A + 2\mu & Q \\ 0 & R \end{array} \right\|. \quad (22)$$

В выражениях (11)-(17) введены обозначения:

$$M_j = \frac{V_j + (q_{22} + q_{12})b/(i\rho\omega)}{q_{12}\gamma_{22} - q_{22}\gamma_{12} + (q_{22} + q_{12})b/(i\rho\omega)}, \quad j = 0, 1 \quad (23)$$

$$V_j = q_{11}\gamma_{11} - q_{12}\gamma_{12} - (q_{11}q_{22} - q_{12}^2)z_j. \quad (24)$$

$$S = \frac{T_1}{T_0}, \quad T_j = Q + RM_j, \quad S_j = 1 + \frac{A + QM_j}{2N}, \quad (25)$$

$$H_j = \frac{H_0^{(2)}(\bar{k}_j a)}{H_1^{(2)}(\bar{k}_j a)}, \quad \mathcal{H}^{(i)}(\bar{k}_j r) = \frac{H_i^{(2)}(\bar{k}_j r)}{H_1^{(2)}(\bar{k}_j a)}, \quad i = 0, 1; \quad j = 0, 1. \quad (26)$$

В выражениях (26) $H_i^{(2)}(\bar{k}_j r)$ — функции Ханкеля; в выражениях (11)-(16) временной множитель $\exp(i\omega t)$ опущен.

Отметим, что быстрая продольная волна аналогична продольной волне в упругом теле, медленная продольная волна (волна второго рода) описывает перетоки жидкости относительно упругого скелета [12,17].

3. Учет диссипации при динамических процессах в двухфазной среде

Диссипативный член, b введенный в динамические уравнения М.Био (5),(6) для учета сил межфазного взаимодействия имеет вид:

$$b = \frac{m^2 \theta_0}{k_{pr}} F(f), \quad (27)$$

где m , k_{pr} , θ_0 — коэффициенты пористости, проницаемости и динамической вязкости среды соответственно. Функция $F(f)$ учитывает частотную зависимость диссипативного члена. Согласно теории М.Био для частот $f < f_1$, когда течение жидкости в порах подчиняется закону Пуазейля, можно считать корректирующую функцию равной единице $F(f) = 1$. На интервале частот $f_1 < f < f_2$, в случае трехмерной задачи, корректирующая функция имеет вид [17]:

$$F(k) = \frac{kT(k)}{4[1 - 2T(k)/ik]}, \quad T(k) = \frac{ber'(k) + ibei'(k)}{ber(k) + ibei(k)} = e^{i\pi/4} \frac{I_1(ke^{i\pi/4})}{I_0(ke^{i\pi/4})}, \quad (28)$$

где: $ber(z)$, $bei(z)$ — функции Томсона; $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя; согласно [2,17] — $k = \alpha_2 \sqrt{2\pi f / \nu_f}$, $\alpha_2 = \eta \sqrt{k_{pr}/m}$ — структурный коэффициент, ν_f — кинематическая вязкость, η — коэффициент, учитывающий геометрию пор. Для сферических пор эксперимент дает $\eta = 3.2$ [16]. На частотах $f > f_2$ размеры пор соизмеримы с длинами волн и течение жидкости в пористо-упругой среде не описывается теорией М.Био. Критические частоты находятся по формулам [12,17]:

$$f_1 = \pi \theta_0 / 4 \rho_f d^2, \quad f_2 = |\bar{c}_2 / d|, \quad (29)$$

$$\bar{c}_2 = \sqrt{\mu / (\rho_{11} + \rho_{12} M_2)} \quad M_2 = \frac{b/i\omega - \rho_{12}}{b/i\omega - \rho_{22}} \quad (30)$$

где $d = 2a_1$ — эффективный диаметр пор, \bar{c}_2 — скорость поперечных волн в 2-х фазной среде.

Для учета диссипации в упругом скелете 2-х фазной среды эффект внутреннего трения достигается введением комплексного модуля сдвига [3,12,20]: $\hat{\mu} = \mu e^{i\gamma}$, γ — коэффициент внутреннего трения.

Для дальнейшего исследования влияния динамических воздействий на изменение порового давления и движение поровой жидкости в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде, зададим физические свойства среды, определяемые

параметрами [18]:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 1.47 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2; & \mu &= 9.79 \cdot 10^7 \text{Н/м}^2; \\
 Q &= 2.7948 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2; & R &= 2.74 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2; \\
 A &= \lambda + 1.02 \cdot Q; & H &= A + 2\mu e^{i\gamma} + R + 2Q; \\
 \rho_f &= 9.94 \cdot 10^2 \text{кг/м}^3; & \rho_s &= 2.67 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3; \\
 \rho_{12} &= 0; & \nu &= 0.25 \text{ — коэф. Пуассона}; \\
 m &= 0.25; & \gamma &= 0.01, 0.05, 0.1; \\
 k_{pr} &= 5 \cdot 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-9}, 5 \cdot 10^{-9} (\text{м}^2);
 \end{aligned} \tag{31}$$

При расчетах функций $b(\omega)$ и $F(k)$, для коэффициентов динамической и кинематической вязкости поровой жидкости взяты значения [2]:

$$\theta_0 = 10^{-3} \text{Н}\cdot\text{с/м}^2 \quad \nu_f = \frac{\theta_0}{\rho_f} = 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}. \tag{32}$$

При заданных параметрах среды и эффективном радиусе пор $a_1 = 8 \cdot 10^{-5} \text{м}$ для критических частот, определяемых согласно формулам (29), получены значения: $f_1 = 31 \text{Гц}$, $f_2 = 10^6 \text{Гц}$.

4. Поровое давление в пласте при динамических воздействиях

В результате динамического воздействия (7) на поверхность скважины полное поровое давление в пласте изменится, и будет состоять из гидростатической составляющей давления $p^{st}(r)$ — (3) и динамической составляющей $p^{din}(r)$ — (14). Максимальные и минимальные значения давления жидкости в пласте, будут:

$$|p(r)|_{\max, \min} = |p^{st}(r)| \pm |p^{din}(r)| \tag{33}$$

Для заданных выше параметров среды (31), согласно формулам (14)-(17), были проведены расчеты частотных и пространственных зависимостей динамической составляющей давления поровой жидкости. При расчетах, амплитуда нормальной гармонической нагрузки (9) на поверхность скважины полагалась равной $p_1 = 1 \text{МПа}$, на порядок меньшей гидростатического пластового давления (1). Пластовое давление определялось в предположении залегания пласта на глубине $H_d = 1000 \text{м}$, и для данной поровой жидкости принимает значение — $p_\infty = 9.74 \text{МПа}$. Статическое давление вокруг скважины вычислялось по формуле (3) при радиусе контура питания равном $r_c = 1000 \text{м}$.

На рис.1а,б приведены графики зависимости модуля комплексной амплитуды динамической составляющей порового давления от частоты гармонического воздействия и расстояния до оси скважины. Из рис.1а видно, что частотные зависимости динамической составляющей порового давления имеют осциллирующий характер: с ростом частоты амплитуды вначале возрастают, а затем с возрастающей частотой осцилляций убывают. При этом с ростом расстояния от оси скважины

амплитуды давления уменьшаются, и главные максимумы амплитудно-частотных характеристик сдвигаются в область более низких частот (кривые 1-4). Графики зависимости модуля комплексной амплитуды динамической составляющей порового давления от расстояния до оси скважины, на рис.1б, также имеют осцилляционный характер. С ростом расстояния от оси скважины амплитуды давлений уменьшаются. С ростом частоты динамического воздействия амплитуда и частота осцилляций пространственных зависимостей порового давления возрастает (кривые 1-4). Аналогичные частотные и пространственные зависимости порового давления без учета сил межфазного взаимодействия в среде имеются в работе [11], а влияние диссипации на дисперсию поверхностных волн Био — в работе [10].

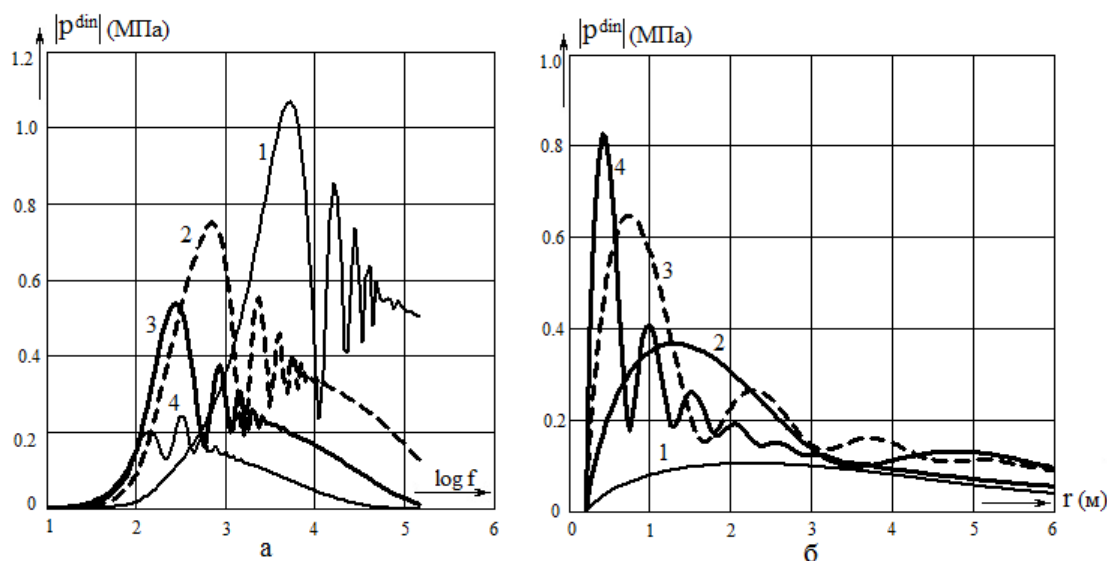


Рис. 1. Зависимости модуля комплексной амплитуды динамической составляющей порового давления от частоты гармонического воздействия и расстояния до оси скважины. На рисунке а, амплитудно-частотные характеристики 1-4 рассчитывались для расстояний r от оси скважины соответственно равных: 0.25, 0.55, 1.15, 2.65 м. На рисунке б, зависимости 1-4 амплитуд порового давления от расстояния до оси скважины рассчитывались для частот динамического воздействия: $f = 76.2$ Гц, 159.2 Гц, 364.6 Гц, 1.004 кГц. Все расчеты проведены при параметрах: $\gamma = 0.1$, $k_{pr} = 10^{-9}$ Гц, $m = 0.25$, $a = 0.2$ м.

На рис.2а,б представлены зависимости суперпозиции динамической и статической составляющих модулей комплексных амплитуд порового давления от частоты гармонического воздействия и расстояния до оси скважины. На рис.2а представлены частотные зависимости всех компонент порового давления в выражении (33), а на рис.2б — их зависимости от расстояния до оси скважины.

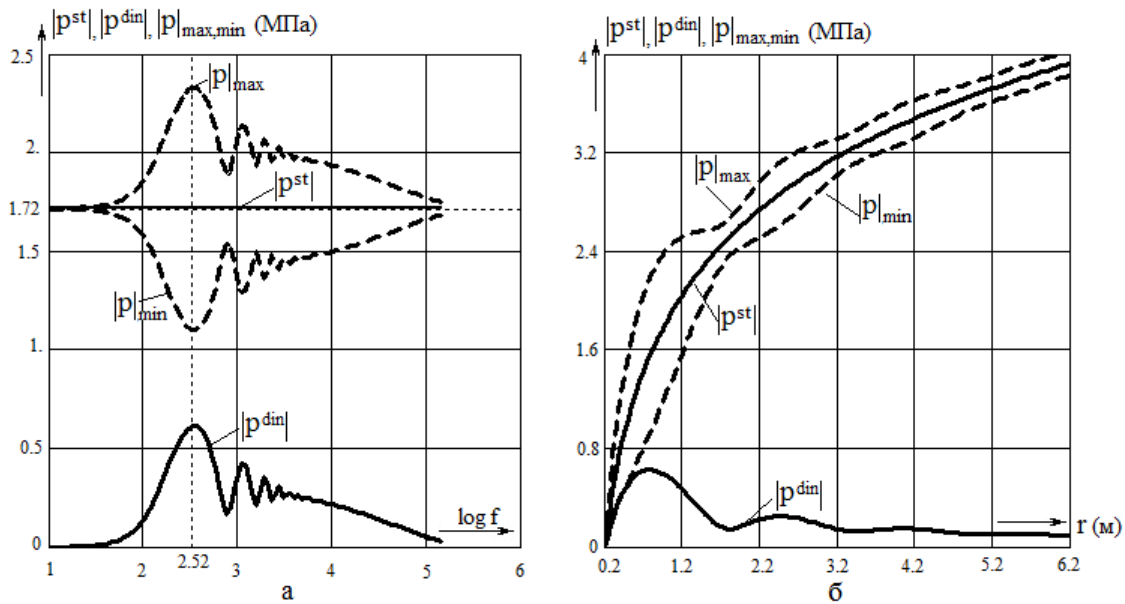


Рис. 2. Зависимости суперпозиции динамической и статической составляющих модулей комплексных амплитуд порового давления от частоты гармонического воздействия и расстояния до оси скважины. На рисунке (а) гидростатическая и динамическая составляющие порового давления рассчитывались для расстояния $r = 0.9$ м от оси скважины. На рисунке (б) зависимость амплитуд порового давления от расстояния до оси скважины рассчитывалась для частоты динамического воздействия $f = 332.5$ Гц. Все расчеты проведены при параметрах: $\gamma = 0.1$, $k_{pr} = 10^{-9}$ м², $m = 0.25$, $a = 0.2$ м.

5. Дебит жидкости при динамическом воздействии на пласт

Для определения притока жидкости в скважину, возникающего при динамическом воздействии на пласт необходимо знать соответствующую радиальную составляющую скорости жидкой фазы на поверхности скважины. Чтобы определить вклад каждого типа волн в радиальную составляющую скорости, проанализируем соответствующие этим волнам относительные перемещения жидкой и твердой фаз. Представим комплексные модули компонент перемещений в виде:

$$u_j = |u_j| \exp(i\varphi_j), \quad U_j = |U_j| \exp(i\psi_j). \quad (34)$$

В силу соотношений (13) можно записать

$$U_j = M_j u_j = |M_j| |u_j| \exp[i(\arg(M_j) + \varphi_j)]. \quad (35)$$

Из (34), (35) следует:

$$\psi_j - \varphi_j = \arg(M_j), \quad (36)$$

т.е. разность фаз между комплексными модулями перемещений поровой жидкости и упругого скелета с одноименными индексами определяются аргументами комплексных величин M_1 и M_0 соответствующих продольным волнам первого и второго рода.

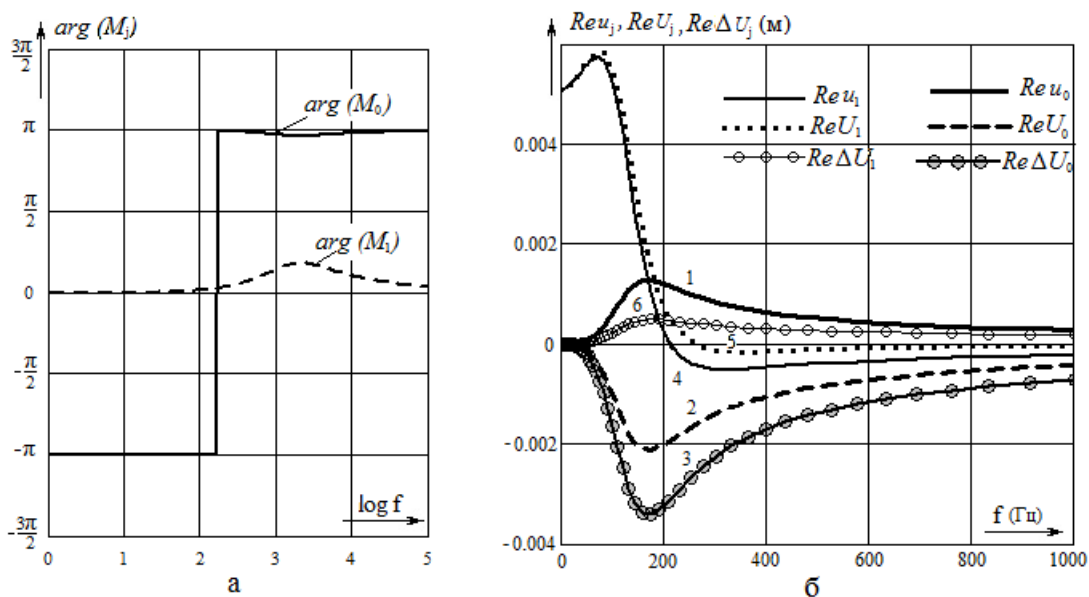


Рис. 3. (а) — Частотные зависимости разности фаз $arg(M_j)$ между перемещениями жидкости и упругого скелета среды для продольных волн 1-го ($j = 1$) и 2-го рода ($j = 0$). (б) — Частотные зависимости составляющих перемещений жидкости (U_j) и упругого скелета (u_j), и относительного перемещения жидкости (ΔU_j), соответствующих продольным волнам 1-го ($j = 1$) и 2-го рода ($j = 0$). Кривые 1,2,3 соответствуют волнам 2-го рода, 4,5,6 — волнам 1-го рода. Расчеты проведены при параметрах: $\gamma = 0.05$, $k_{pr} = 10^{-11} \text{ м}^2$, $m = 0.25$, $a = 0.2 \text{ м}$.

На рис.3а приведены частотные зависимости $arg[M_j(f)]$ разности фаз между перемещениями жидкости и упругого скелета среды. Из рис.3б видно, как характер зависимости $arg[M_j(f)]$ для продольных волн 1-го и 2-го рода влияет на относительные перемещения жидкой и твердой фаз среды и на их частотные характеристики. Результаты показывают, что на всем интервале допустимых частот составляющие перемещений $U_1(r)$ жидкости (кривая 5) и $u_1(r)$ упругого скелета (кривая 4), связанные с продольной волной 1-го рода, колеблются с малой разностью фаз $arg[M_j(f)] < 0.4$, поэтому также мало и относительное перемещение жидкости (кривая 6 на рис.3б). Аналогичные составляющие перемещений $U_0(r)$ (кривая 2 б) и $u_0(r)$ (кривая 1 б), связанные с продольной волной 2-го рода нахо-

дятся в противофазе, для них: $\arg[M_j(f)] \pm \pi$, и перемещения жидкости относительно упругого скелета ΔU_0 — максимально возможные (кривая 3 б).

Учитывая приведенные выше соотношения фаз компонент перемещений U_j, u_j , при определении относительной скорости движения жидкости в среде будем брать в расчет только составляющие, связанные с продольной волной 2-го рода:

$$W_0(r, \omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Delta U_0(r, \omega) e^{i\omega t} = i\omega \Delta U_0(r, \omega) e^{i\omega t}, \quad (37)$$

$$\Delta U_0 = U_0 - u_0 = (M_0 - 1)u_0. \quad (38)$$

Подставляя (38), (23), (12) в выражение (37) и отделяя вещественную часть, получим относительную скорость жидкой фазы:

$$\operatorname{Re} W_0(r, \omega, t) = -\omega |\Delta U_0(r, \omega)| \sin(\chi_0 + \omega t), \quad (39)$$

$$\chi_0(r, \omega) = \arg \Delta U_0(r, \omega). \quad (40)$$

Из (39) очевидно, что в течение периода колебаний $T = 2\pi/\omega$ скорость движения жидкости изменяет направление. Согласно закону Дарси, фильтрация в пористой среде имеет место, если скорость движения жидкости и градиент порового давления имеют разные знаки. Поэтому приток жидкости к скважине происходит на временном отрезке $\Delta\tau \in T$, в течение которого скорость отрицательна (т.к. направлена против радиальной оси), а градиент порового давления положительный, т.е. при условии:

$$\operatorname{Re} W_0(r, \omega, t) < 0, \quad \operatorname{Re} \operatorname{grad} p_0^{\text{din}}(r, \omega) e^{i\omega t} > 0. \quad (41)$$

Используя (12), (15)–(17), находим:

$$\operatorname{Re} \operatorname{grad} p_0^{\text{din}}(r) e^{i\omega t} = m^{-1} |\bar{k}_0^2 T_0 \cdot u_0(r, \omega)| \cos(\phi_0 + \omega t), \quad (42)$$

$$\phi_0(r, \omega) = \arg \frac{\partial}{\partial r} p_0^{\text{din}}(r, \omega). \quad (43)$$

Условия (41) эквивалентны системе неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\chi_0 + \omega t) &> 0, \\ \cos(\phi_0 + \omega t) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Решая систему (44), получим временной интервал, составляющий часть периода T колебаний, в течение которого происходит приток жидкости к скважине:

$$t \in (\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1 = (2\pi - \chi_0)/\omega, \quad \tau_2 = \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0 \right) / \omega. \quad (45)$$

Найдем количество жидкости, притекающей к скважине через цилиндрическую поверхность высоты h и радиуса r за период T (дебит за период). Для этого

находим произведение площади цилиндрической поверхности на интеграл относительной скорости фильтрации жидкости $\text{Re } W_0$ на временном интервале (45):

$$Q_{din}^{(T)}(r, \omega) = 2\pi r h \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{Re } W_0(r, \omega, t) dt. \quad (46)$$

После вычисления интеграла (46) и некоторых преобразований, получим:

$$Q_{din}^{(T)}(r, \omega) = -(2\pi r h) p_1 \left(\frac{a}{2\mu} \right) |M_0 - 1| \left| \frac{SH_1}{D} \mathcal{H}^{(1)}(\bar{k}_0 r) \right| [1 + \sin(\chi_0 - \phi_0)]. \quad (47)$$

Введем величину $P_{st}^{(T)}(r, \omega)$, определяющую плотность объемного расхода жидкости притекающей к скважине через цилиндрическую поверхность высоты h радиуса r за период T динамического воздействия на поверхность скважины:

$$P_{din}^{(T)}(r, \omega) = Q_{din}^{(T)}(r, \omega) / (2\pi r h). \quad (48)$$

Аналогично найдем плотность объемного расхода жидкости за период, через указанную цилиндрическую поверхность, вызванного гидростатическим пластовым давлением $p^{st}(r)$ — (3):

$$P_{st}^{(T)}(r, \omega) = Q_{st}^{(T)}(r, \omega) / (2\pi r h), \quad Q_{st}^{(T)}(r, \omega) = Q_{st}(r) \cdot T, \quad (49)$$

где Q_{st} определяется выражением (4). Заметим, что величины $Q_{st}^{(T)}$ и $P_{st}^{(T)}$ в выражениях (49) зависят от циклической частоты $\omega = 2\pi f$ вследствие умножения независимой от частоты величины Q_{st} на период $T = 2\pi/\omega$ гармонического воздействия.

Для оценки влияния гармонического воздействия (7), на приток жидкости к скважине, были проведены расчеты частотных зависимостей функций $P_{din}^{(T)}(r, \omega)$, $P_{st}^{(T)}(r, \omega)$ для заданных расстояний r от оси скважины, радиуса скважины, коэффициентов затухания, проницаемости и пористости. На рис. 4 приведены результаты расчетов таких зависимостей (для частот выбран логарифмический масштаб).

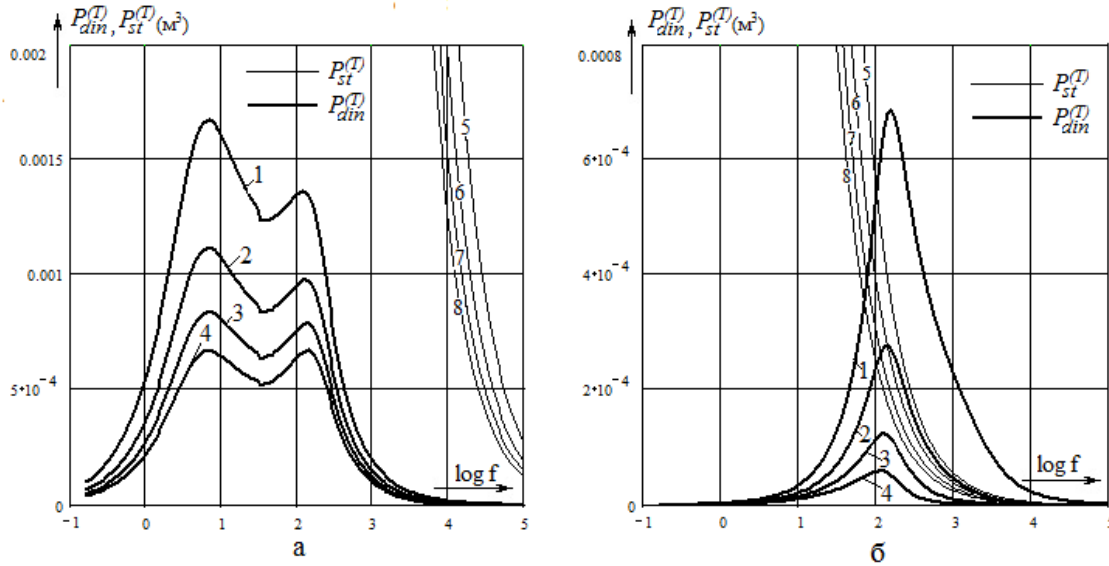


Рис. 4. Частотные зависимости плотности расхода жидкости через цилиндрическую поверхность высоты $h = 1$ м радиуса r за период динамического воздействия на поверхность скважины. $P_{din}^{(T)}$, $P_{st}^{(T)}$ — динамическая и статическая составляющие плотности расхода жидкости за период. Кривым 1,5; 2,6; 3,7; 4,8 соответствуют радиусы цилиндрических поверхностей $r = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ м. В случае (а) коэффициент проницаемости $k_{pr} = 5 \cdot 10^{-9}$ м², в случае (б) — $k_{pr} = 10^{-11}$ м². Остальные параметры в обоих случаях одинаковы: $a = 0.2$ м; $\gamma = 0.05$, $m = 0.25$.

Из графиков видно, что частотные характеристики величины $P_{din}^{(T)}(r, f)$ имеют резонансный характер и существенно зависят от коэффициента проницаемости среды. Для случая (а) имеются два максимума: на частотах $f \approx 6,7$ Гц и $f \approx 132,4$ Гц, для случая (б) — один максимум: на частоте $f \approx 159$ Гц. Статическая составляющая плотности объемного расхода жидкости за период, как видно из выражения (49), прямо пропорциональна коэффициенту проницаемости среды и обратно пропорциональна частоте динамического воздействия. Благодаря этому в случае (а), когда коэффициент проницаемости среды на два порядка больше, чем в случае (б), при фиксированной частоте. Вклады статических составляющих также отличаются на порядки: $P_{st(a)}^{(T)}(r, f) \gg P_{st(b)}^{(T)}(r, f)$. При этом при значении коэффициента проницаемости в случае (а), в диапазоне частот проявления динамической составляющей плотности дебита за период, его вклад несравненно ниже дебита от фильтрации за счет гидростатического пластового давления $P_{din(a)}^{(T)}(r, f_{рез}) \ll P_{st(a)}^{(T)}(r, f_{рез})$. В таком случае динамическое воздействие на скважину, с целью повышения дебита, не имеет смысла. В случае (б), когда коэффициент проницаемости на два порядка меньше, чем в случае (а), динамическая и статическая составляющие плотностей дебита за период, в резонансной полосе частот, — одного порядка: $P_{din(b)}^{(T)}(r, f_{рез}) \sim P_{st(b)}^{(T)}(r, f_{рез})$, и тогда динамическое

воздействие на скважину существенно.

Полагая в выражении (47) $r = a$ и мощность пласта $h = 1$ м, получим дебит скважины за период динамического воздействия. На рис.5 приведены частотные зависимости дебита жидкости для трех различных комбинаций коэффициентов проницаемости, внутреннего трения и радиуса скважины. Полный дебит жидкости $Q^{(T)}$ за период T (кривые 3,6,9) состоит из суммы дебита $Q_{st}^{(T)}$ — (49), вызванного градиентом гидростатического давления в пласте (кривые 1,4,7), и дебита $Q_{din}^{(T)}$ (47) — результата динамического воздействия (кривые 2,5,8).

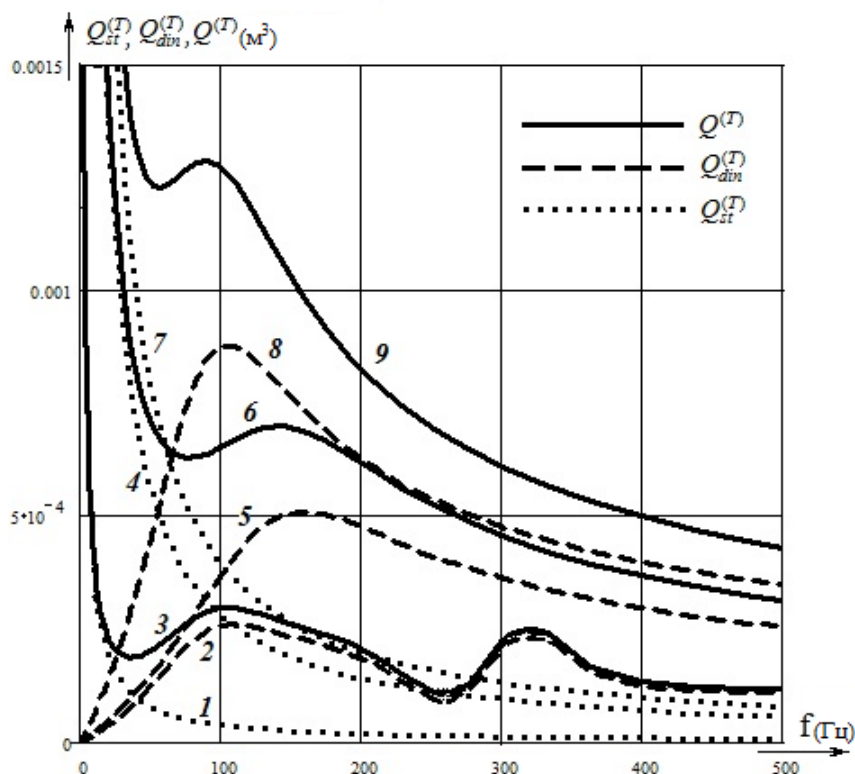


Рис. 5. Частотные зависимости дебита жидкости в скважину радиуса a из кругового пласта мощностью $h = 1$ м за период динамического воздействия на ее поверхность. $Q_{st}^{(T)}(a, f)$, $Q_{din}^{(T)}(a, f)$, $Q^{(T)}(a, f)$ — статическая, динамическая и полная составляющие дебита. Кривые 1,2,3 соответствуют параметрам: $\gamma = 0.1$, $k_{pr} = 10^{-12}$ м², $a = 0.3$ м; кривые 4,5,6 — $\gamma = 0.01$, $k_{pr} = 10^{-11}$ м², $a = 0.3$ м; кривые 7,8,9 — $\gamma = 0.01$, $k_{pr} = 5 \cdot 10^{-12}$ м², $a = 0.2$ м. Для всех случаев коэффициент пористости: $m = 0.25$.

Из графиков видно, что динамическое воздействие на скважину повышает приток жидкости из пласта. При этом существуют такие локальные частотные максимумы гармонического воздействия, при которых дебит жидкости существенно повышается.

6. Определение пьезопроводности среды

Согласно фильтрационной модели В.Н.Щелкачева связь между скоростью фильтрации и градиентом порового давления описывается законом Дарси

$$V = -\frac{k_{pr}}{\theta_0} \text{grad } p, \quad (50)$$

а волна давления удовлетворяет классическому уравнению теплопроводности [6], в котором вместо температуры стоит давление, а вместо коэффициента теплопроводности — коэффициент пьезопроводности \varkappa , характеризующий скорость передачи давления в среде [5,14]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (51)$$

$$\varkappa = \frac{k_{pr} K}{m \theta_0}, \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K_s} + \frac{1}{|K_0|}, \quad (52)$$

Значения K_s и K_0 , входящие в (52) нетрудно выразить через заданные параметры (31), (32) пористо-упругой среды согласно соотношениям, записанным в пункте 2:

$$K_s = \lambda + 2\mu/3, \quad K_0 = R/(m - Q/K_r), \quad K_r = K_s/[1 - m(1 + Q/R)]. \quad (53)$$

Согласно данной модели, при динамических воздействиях на среду, расстояния, пройденные фильтрационной волной давления за время t и соответственно ее средняя скорость, определяются величинами [1,5]:

$$l \sim 2\sqrt{\varkappa t}, \quad \bar{c} \sim 2\sqrt{\varkappa/t}. \quad (54)$$

Полагая в (54) время равным периоду гармонического воздействия, получим соответственно длину и фазовую скорость волны давления:

$$\lambda \sim 2\sqrt{\varkappa T} = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{f}}, \quad \bar{c}_p = \lambda/T = 2\sqrt{\varkappa f}. \quad (55)$$

Как было показано выше, согласно теории М.Био, скорость распространения волны давления, вызывающей движение жидкости в среде, отождествляется со скоростью продольной волны второго рода:

$$\bar{c}_0(f) = 2\pi f / \bar{k}_0 = \sqrt{H/[\rho z_0(f)]}. \quad (56)$$

При этом была введена корректирующая функция (28), учитывающая отклонение от выполнения закона Дарси для частот $f > f_1 = 31\text{Гц}$ (при заданных параметрах среды (31), (32)). Таким образом, ограничением по частоте для использования теории М. Био является лишь нарушение условий непрерывности среды: $f < f_2 = |\bar{c}_2/d| \sim 10^6\text{Гц}$ — (29). Расчет частотных зависимостей скоростей распространения волн давления согласно модели В. Н. Щелкачева $\bar{c}_p(f)$ — (55) и модели М. Био $\bar{c}_0(f)$ — (56), в диапазоне частот $10^{-4}\text{Гц} - 10^6\text{Гц}$, показал их совпадение с относительной ошибкой не превышающей 5.5%.

Однако, согласно модели В. Н. Щелкачева, область применения закона Дарси, положенного в её основу, ограничена критическим числом Рейнольдса, которое для движения жидкости через пористые среды имеет значение [14,15]:

$$\mathbb{R}_{\text{кр}} = \frac{10}{m^{2.3}} (\rho_f V \sqrt{k_{pr}} / \theta_0)_{\text{кр}} = 1 \div 12, \quad (57)$$

В силу этого при гармонических воздействиях на среду, определяя частотные зависимости скорости фильтрации V — (50), решая соответствующую краевую задачу для уравнений (50), (51), из критерия Рейнольдса следует найти допустимую область частот. Это, как правило, низкие частоты. Так при экспериментально-теоретическом определении коэффициента пьезопроводности методом самопрослушивания скважин в рамках такой модели среды используются частоты порядка $10^{-4}\text{Гц} - 10^{-2}\text{Гц}$ [1,7].

Заключение

В настоящей статье показано, что теория М. Био применима вплоть до частот порядка 10^6Гц . Поэтому приведенные выше методы расчета частотных и пространственных зависимостей волн давления и плотностей потока жидкости через цилиндрические поверхности можно использовать в широком спектре частот динамических воздействий на среду. Такой подход позволяет определять оптимальные для дебита режимы частотных воздействий на пласты, а также применять его в целях определения фильтрационных и акустических свойств пористо-упругих насыщенных жидкостью сред.

Список цитируемых источников

1. *Гаврилов А. Г.* Исследование окрестности скважины методом высокочастотных фильтрационных волн давления / А. Г. Гаврилов, А. Н. Марданшин, М. Н. Овчинников, А. В. Штанин // Нефтегазовое дело. Электронный научный журнал: <http://www.ogbus.ru> — 2007. — С. 1–10.
2. *Городецкая Н. С.* Волны на границе пористо-упругого полупространства. I. Свободная граница / Н. С. Городецкая // Акустичний вісник. — 2005. — Том 8, N 1-2. — С. 28–41.
3. *Донцов В. Е.* Распространение волн давления в пористой среде, насыщенной жидкостью / В. Е. Донцов, В. В. Кузнецов, В. Е. Накоряков // ЖПМТФ. — 1988. — 167, — N 1. — С. 120–130.

4. Дыбленко В. П. Повышение продуктивности и реанимация скважин с применением виброволнового воздействия. / В. П. Дыбленко, Р. Н. Камалов, Р. Я. Шарифуллин, И. А. Туфанов — М.: Недра, 2000. — 381 с.
5. Ентов В. М. Теория фильтрации / В. М. Ентов // Соросовский образовательный журнал — 1998. — N 2 — С. 121–128.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
7. Овчинников М. Н. Интерпретация результатов исследований пластов методом фильтрационных волн давления / М. Н. Овчинников — Казань: ЗАО «Новое знание», 2003. — 84 с.
8. Сеймов В. М. Колебания и волны в слоистых средах. / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий — К.: Наук. думка, 1990. — 224 с.
9. Сницер А. Р. Дисперсия скорости поверхностных волн Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде / А. Р. Сницер // Динамические системы. — 2009. — Вып. 27 — С. 93–105.
10. Сницер А. Р. Влияние диссипативных характеристик пористо-упругой среды на дисперсию волн Био / А. Р. Сницер // Материалы XX-ой Международной научной школы им. акад. С. А. Христиановича / Симф.: ТНУ, 2010. — С. 322–326.
11. Сницер А. Р. Изменение порового давления жидкости в среде Био при динамических воздействиях / А. Р. Сницер // Материалы XXI Международной научной школы им. акад. С. А. Христиановича / Симф.: ТНУ, 2011. — С. 325–328.
12. Трофимчук А. Н. Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред. / А. Н. Трофимчук, А. М. Гомилко, О. А. Савицкий — К.: Наук. думка, 2003. — 232 с.
13. Христианович С. А. Механика сплошной среды / С. А. Христианович — М.: Наука, 1981. — 484 с.
14. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. М., Нефть и газ, 1995. — ч.1–586с., ч.2–493с.
15. Яблонский В. С. Краткий курс технической гидромеханики / В. С. Яблонский — М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1961. — 356 с.
16. Badiou M. From geology to geoacoustics Evaluation of Biot-Stoll sound speed and attenuation for shallow water acoustics / M. Badiou, A. H.-D. Cheng, Y. Mu // J. Acoust. Soc. Amer. — 1998. — 103, N 1. — P. 309–320.
17. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid i. low-frequency ii. higher frequency range / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — 28, N 2. — P. 168–191.
18. Halpern M. R. Response of poroelastic half-space to steady-state harmonic surface tractions / M. R. Halpern, P. Christiano // Int. J. Numer and Anal. Meth. Geotech. — 1986. — 10, N 6. — P. 609–632.
19. Plona T. J. Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequencies / T. J. Plona // Appl. Phys. Let. — 1980. — 36. — P. 259–261.
20. Yamamoto T. Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom / T. Yamamoto // J. Acoust. Soc. Amer. — 1983. — 73, N 5. — P. 1587–1596.

Получена 21.11.2011