

УДК 531.3+534.1

Построение и анализ устойчивости резонансных режимов движения однодискового ротора на нелинейно-упругих опорах

Н. В. Перепелкин, Ю. В. Михлин

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт
Харьков 61002. E-mail: *muv@kpi.kharkov.ua*

Аннотация. Рассмотрены режимы резонансных вынужденных колебаний однодискового ротора с массивными нелинейно-упругими опорами. Используются методы теории нелинейных нормальных форм колебаний, Раушера и гармонического баланса. Получены режимы движения с циклически симметричными и центрально-симметричными траекториями. При анализе режимов первого типа число степеней свободы системы может быть уменьшено вдвое.

Ключевые слова: однодисковый ротор, вынужденные колебания, нелинейные нормальные формы колебаний, устойчивость форм колебаний.

1. Введение

Анализ нелинейных моделей технических систем представляет значительный интерес с точки зрения адекватного описания происходящих в таких системах процессов. Однако, сколько-нибудь значительное число степеней свободы модели делает весьма трудоемким применение большинства методов теории нелинейных колебаний, поэтому чаще всего исследователи ограничиваются рассмотрением относительно простых моделей.

Широко известны классические работы по роторной динамике А. Тондла [21], Ф. М. Диментберга [5], Е. Л. Николаи [9], В. В. Болотина [2]. Динамику роторов, имеющих упругие опоры, рассматривали В. А. Гробов [4], А. П. Филиппов и Е. Г. Голоскоков [3], А. С. Кельзон [6, 7], И. А. Пасынкова [10, 11], J. Genta [15], А. Muszynska [16] и др. В работе [4] рассматриваются модели роторных систем с линейно-упругими массивными опорами, а также системы с нелинейно-упругими безмассовыми опорами с кубической нелинейностью (типа Дуффинга). В статье [6] изучается вопрос об аппроксимации нелинейной характеристики подшипника степенным рядом, что прямо приводит к концепции опор типа Дуффинга. Исследования поведения роторов с нелинейно-упругими опорами можно найти в работах [10, 11, 15] и др. Динамика симметричного ротора с опорами типа Дуффинга исследовалась при помощи асимптотических методов в работе [14].

В работе [13] рассматриваются вынужденные колебания, происходящие в роторной системе, математическая модель которой представлена приведенными ниже уравнениями (1). В указанной работе при помощи методов нелинейных нормальных форм колебаний и гармонического баланса получены амплитудные кривые для главных координат динамической системы в окрестности первой критической скорости.

В настоящей работе демонстрируется ряд особенностей, связанных с существованием и устойчивостью околорезонансных режимов в роторной системе с нелинейными опорами.

2. Математическая модель однодискового ротора с массивными нелинейно-упругими опорами

Рассматривается модель однодискового ротора, диск которого обладает статической неуравновешенностью и расположен на валу длиной l несимметрично относительно опор (рис. 1,а). Опоры ротора являются массивными, нелинейно-упругими с кубической нелинейностью (восстанавливающая сила P в опоре и перемещение вала в опоре x связаны соотношением вида $P = k_1x + k_2x^3$). Вал и опоры приняты изотропно-упругими. Кроме поступательных перемещений x, y , положение диска определяется угловыми перемещениями θ_1, θ_2 (рис. 1,б). Положение опор определяется их перемещениями x_1, y_1, x_2, y_2 .

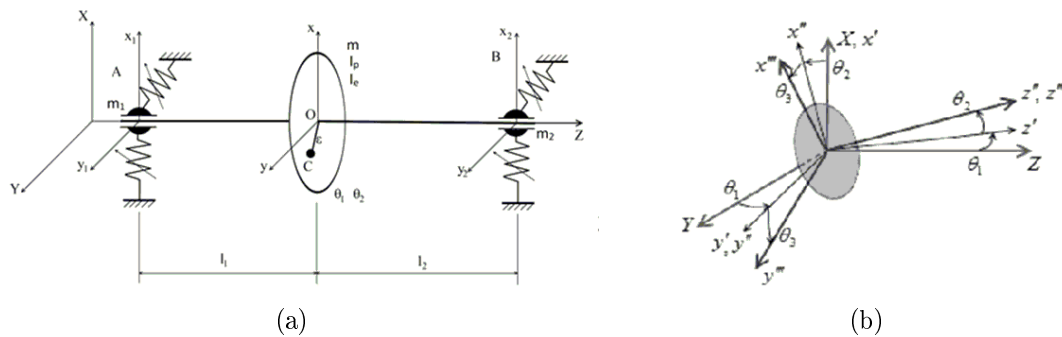


Рис. 1. Расчетная схема рассматриваемого ротора

Уравнения вынужденных колебаний данной системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + \rho_1\dot{x} + c_{11}(x - h_1x_2 - h_2x_1) + c_{12}(\theta_2 - (x_2 - x_1)/l) &= \varepsilon\Omega^2m \cos \Omega t, \\
 m\ddot{y} + \rho_1\dot{y} + c_{11}(y - h_1y_2 - h_2y_1) + c_{12}(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) &= \varepsilon\Omega^2m \sin \Omega t, \\
 I_e\ddot{\theta}_1 + \rho_2\dot{\theta}_1 + I_p\Omega\dot{\theta}_2 - c_{21}(y - h_1y_2 - h_2y_1) - c_{22}(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) &= 0, \\
 I_e\ddot{\theta}_2 + \rho_2\dot{\theta}_2 - I_p\Omega\dot{\theta}_1 + c_{21}(x - h_1x_2 - h_2x_1) + c_{22}(\theta_2 - (x_2 - x_1)/l) &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + \beta \dot{x}_1 + s_1 (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) + s_2 \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + c_x^{(1)} x_1 + c_x^{(2)} x_1^3 &= 0, \\
m_1 \ddot{y}_1 + \beta \dot{y}_1 + s_1 (y - h_1 y_2 - h_2 y_1) + s_2 \left(-\theta_1 - \frac{y_2 - y_1}{l} \right) + c_y^{(1)} y_1 + c_y^{(2)} y_1^3 &= 0, \\
m_2 \ddot{x}_2 + \beta \dot{x}_2 + s_3 (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) + s_4 \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + k_x^{(1)} x_2 + k_x^{(2)} x_2^3 &= 0, \\
m_2 \ddot{y}_2 + \beta \dot{y}_2 + s_3 (y - h_1 y_2 - h_2 y_1) + s_4 \left(-\theta_1 - \frac{y_2 - y_1}{l} \right) + k_y^{(1)} y_2 + k_y^{(2)} y_2^3 &= 0,
\end{aligned}$$

где m, I_p, I_e — масса и моменты инерции диска, m_1, m_2 — массы опор, $c_{11} = 3EJ \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^3 l_2^3}$, $c_{12} = c_{21} = 3EJl \frac{l_1 - l_2}{l_1^2 l_2^2}$, $c_{22} = 3EJ \frac{l}{l_1 l_2}$ — статические коэффициенты жесткости вала [3], ε — эксцентриситет диска, Ω — частота вращения ротора; β, ρ_1, ρ_2 — коэффициенты демпфирования перемещений опор и диска, $c_x^{(1)}, c_y^{(1)}$ и $k_x^{(1)}, k_y^{(1)}$ — коэффициенты, характеризующие линейную часть восстанавливающих сил в опорах (для левой и правой опор соответственно), $c_x^{(2)}, c_y^{(2)}$ и $k_x^{(2)}, k_y^{(2)}$ — аналогичные коэффициенты, определяющие нелинейные компоненты восстанавливающих сил, $s_1 = c_{12}/l - c_{11}h_2$, $s_2 = c_{22}/l - c_{12}h_2$, $s_3 = -c_{12}/l - c_{11}h_1$, $s_4 = -c_{22}/l - c_{12}h_1$, $h_1 = l_1/l$, $h_2 = l_2/l$. Вывод уравнений (1) как уравнений Лагранжа второго рода можно найти в работах [4, 14, 17].

Анализ стационарных колебаний будем вести с применением двух математических методов: гармонического баланса и нелинейных нормальных форм колебаний (ННФ). Метод гармонического баланса применялся непосредственно к исходным уравнениям (1), причем для обобщенных перемещений системы (1) строились тригонометрические разложения такого вида:

$$x_i = A_{1i} \cos(\Omega t) + B_{1i} \sin(\Omega t) + A_{3i} \cos(3\Omega t) + B_{3i} \sin(3\Omega t), \quad i = \overline{1, 8}$$

Для применения метода нелинейных нормальных форм колебаний система (1) вначале приводится при помощи линейной замены переменных к главным координатам \bar{q} . В силу изотропии упругого поля рассматриваемая система обладает парными собственными частотами и является, таким образом, системой с внутренними резонансами. Вследствие этого при приближении частоты внешнего воздействия к резонансному значению среди главных координат \bar{q} можно выделить две (т.н. активные переменные), амплитуды колебаний которых существенно превышают амплитуды колебаний других переменных. Для определенности активные главные координаты обозначаются символами q_1, q_2 , а соответствующие обобщенные скорости — s_1, s_2 .

Для применения итерационной процедуры метода нормальных форм колебаний достаточно знать приближенные тригонометрические разложения активных переменных как функций времени (это могут быть, например, решения соответ-

ствующей консервативной системы):

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + \\ &+ B_2 \sin(2\Omega t) + A_3 \cos(3\Omega t) + B_3 \sin(3\Omega t) + \dots, \quad q_2 = \dots \\ s_1 &= B_1 \Omega \cos(\Omega t) - A_1 \Omega \sin(\Omega t) + 2B_2 \Omega \cos(2\Omega t) - \\ &- 2A_2 \Omega \sin(2\Omega t) + 3B_3 \Omega \cos(3\Omega t) - 3A_3 \Omega \sin(3\Omega t) + \dots, \quad s_2 = \dots \end{aligned} \quad (2)$$

После ряда преобразований получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \cos(\Omega t) &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 s_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 s_2 + \alpha_5 q_1^2 + \alpha_6 s_1^2 + \dots, \\ \sin(\Omega t) &= \beta_1 q_1 + \beta_2 s_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 s_2 + \beta_5 q_1^2 + \beta_6 s_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Используя разложения (3), можно преобразовать неавтономную систему уравнений в главных координатах в эквивалентную автономную. В этом состоит основная идея метода Раушера [8, 18]. В эквивалентной автономной системе можно выделить зависимости между фазовыми переменными системы вида $q_i = q_i(q_1, s_1, q_2, s_2)$, $s_i = s_i(q_1, s_1, q_2, s_2)$, которые являются нелинейными нормальными формами колебаний Шоу-Пьера [19, 20]. Здесь активные переменные q_1, q_2 и s_1, s_2 выбираются в качестве новых независимых переменных. Зная нормальные формы колебаний, построенные для эквивалентной автономной системы, можно приближенно описать резонансные колебания исходной неавтономной динамической системы.

Для построения ННФ эквивалентная система уравнений в главных координатах трансформируется в систему уравнений в частных производных с помощью преобразования

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dt}.$$

Решение получаемых уравнений в частных производных может быть найдено в форме степенных рядов:

$$\begin{cases} q_n = a_{1,0,0,0}^{(n)} q_1 + a_{0,1,0,0}^{(n)} s_1 + a_{0,0,1,0}^{(n)} q_2 + a_{0,0,0,1}^{(n)} s_2 + a_{2,0,0,0}^{(n)} q_1^2 + \dots \\ s_n = b_{1,0,0,0}^{(n)} q_1 + b_{0,1,0,0}^{(n)} s_1 + b_{0,0,1,0}^{(n)} q_2 + b_{0,0,0,1}^{(n)} s_2 + b_{2,0,0,0}^{(n)} q_1^2 + \dots \end{cases}, \quad n = \overline{3, N} \quad (4)$$

Зная зависимости (4), можно свести неавтономную систему уравнений в главных координатах с N степенями свободы к системе с двумя степенями свободы, оставив из N уравнений второго порядка только те два, которые содержат \dot{q}_1 и \dot{q}_2 , и исключая все прочие переменные с помощью зависимостей (4). Используя эти уравнения, можно уточнить представления (2) и выполнить новую итерацию, если точность полученного решения недостаточна. Более подробно реализация итерационной процедуры построения нелинейных нормальных форм вынужденных колебаний описана в работах [1, 12, 13].

3. Стационарные колебания в роторной системе

Из предположения, что упругое поле, создаваемое валом и опорами в системе (1), является изотропным, следует, что $c_x^{(1)} = c_y^{(1)}, c_x^{(2)} = c_y^{(2)}, k_x^{(1)} = k_y^{(1)}, k_x^{(2)} = k_y^{(2)}$.

Пусть параметры системы принимают следующие значения: $m_1 = m_2 = 2\text{кг}$, $m = 12\text{кг}$, $I_e = 0.1225\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_p = 0.24\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $\varepsilon = 0.00003\text{м}$, $l = 0.8\text{м}$, $l_1 = 0.24\text{м}$, $c_x^{(1)} = c_y^{(1)} = k_x^{(1)} = k_y^{(1)} = 7 \cdot 10^5\text{Н/м}$, $c_x^{(2)} = c_y^{(2)} = k_x^{(2)} = k_y^{(2)} = 8 \cdot 10^{10}\text{Н/м}^3$, $E = 2.1 \cdot 10^{11}\text{Па}$, $\beta = 60\text{Н}\cdot\text{с/м}$, $\rho_1 = 5\text{Н}\cdot\text{с/м}$, $\rho_2 = 5\text{Н}\cdot\text{с}$, $J = 3.976 \cdot 10^{-8}\text{м}^4$.

Применяя описанные выше процедуру расчета ННФ, можно получить в окрестности первого резонанса амплитудные кривые, изображенные на рис. 2, где представлены амплитуды первой и третьей гармоник перемещений центра диска O . Амплитуды перемещений диска и опор в двух перпендикулярных направлениях, соответствующих осям OX и OY , оказываются равными.

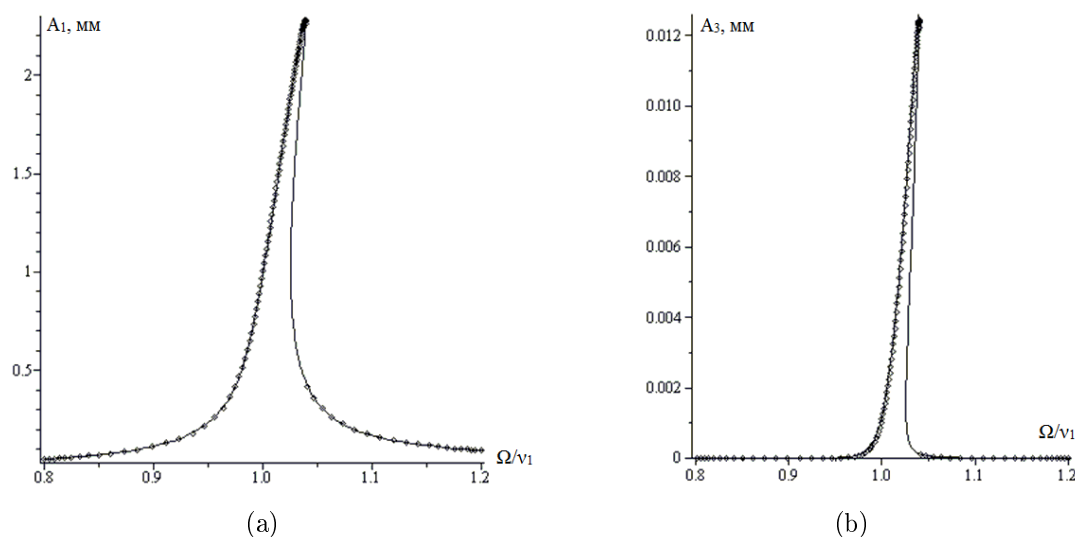


Рис. 2. Амплитудные кривые первой (а) и третьей (б) гармоник поступательных перемещений центра диска O (линия - решение, полученное с применением метода гармонического баланса, точки - решение, полученное на основе метода нелинейных нормальных форм колебаний) (ν_1 -первая собственная частота колебаний неподвижного ротора).

Форма полученных АЧХ является вполне ожидаемой, учитывая принятый характер нелинейности опор. Однако, анализ устойчивости полученных стационарных решений путем расчета мультипликаторов (исследуется решение, полученное методом гармонического баланса) демонстрирует неожиданные результаты (рис. 3).

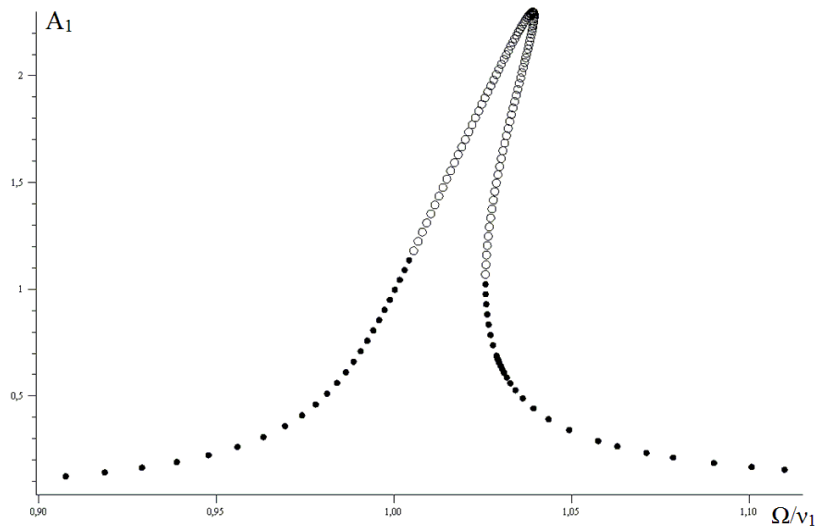


Рис. 3. Результат анализа устойчивости решений, соответствующих рисунку 2. Точками показаны устойчивые решения, окружностями - неустойчивые.

Как видно из рисунка, существует определенный диапазон частот, в котором найденные режимы оказываются неустойчивыми. Дополнительное исследование показывает, что от обнаруженной амплитудной кривой ответвляется дополнительная пара решений, которые обнаруживаются как методом гармонического баланса, так и методом нормальных форм колебаний (рис. 4,а). Исследование устойчивости полученных режимов дает результаты, представленные на рис. 4,б.

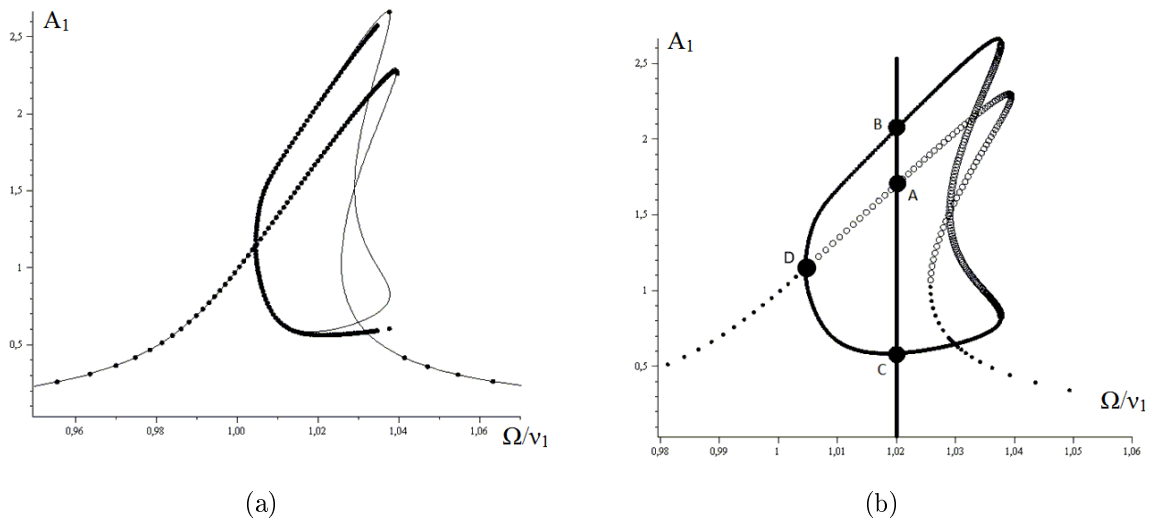


Рис. 4. Уточненная АЧХ для первой гармоники перемещения x диска. а) - решения на основе методов гармонического баланса (линия) и метода ННФ (точки), б) - результат анализа устойчивости по Ляпунову полученных решений (точки - устойчивые решения, окружности - неустойчивые).

Рассмотрим обнаруживаемые режимы. Произвольно выберем какое-либо значение частоты вращения Ω , при котором существуют три обнаруженных режима колебаний (пусть, например, $\Omega/\nu_1 = 1.02$ (ν_1 -первая собственная частота колебаний неподвижного ротора)). Заданному значению частоты вращения соответствуют режимы, условно обозначенные буквами А, В и С (см. рис. 4,б).

Пространственное представление прецессирующего ротора, соответствующее режиму А, изображено на рис. 5, там же изображены траектории, которые описывают центр диска (точка 1), а также левая и правая опоры (точки 2 и 3 соответственно).

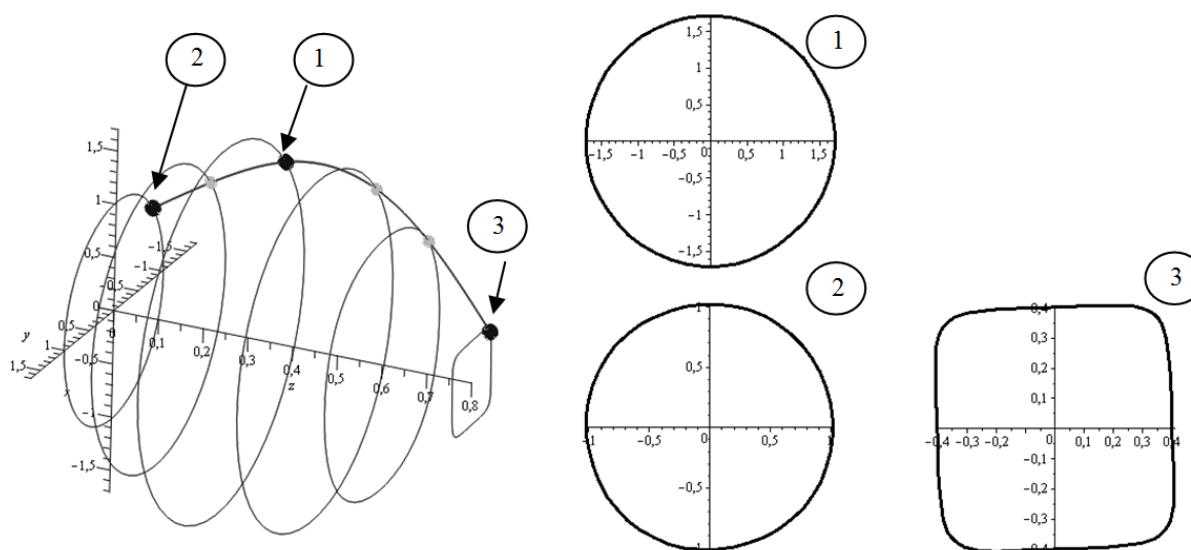


Рис. 5. Пространственное представление прецессирующего вала в режиме А, а также траектории перемещений диска, левой и правой опор (точки 1, 2, 3 соответственно), полученные на основе аналитических решений (единица измерения перемещений — мм).

Форма траекторий, изображенных на рис. 5, является типичной для всех режимов, изображенных на рис. 2 - траектории как центра диска, так и опор представляют собой циклически симметричные линии. Однако, при выбранном ранее значении частоты вращения режим А оказывается неустойчивым, что подтверждается результатами численного моделирования.

Свойствами циклической симметрии не обладают, однако, траектории, соответствующие режимам В и С (рис. 6 и 7 соответственно), они являются центрально-симметричными. На каждом из данных режимов центр диска описывает траекторию, близкую к эллипсу. При этом в режиме В амплитуды колебаний в направлении оси ОХ существенно превышают амплитуды перемещений в направлении оси ОУ, для режима С все с точностью до наоборот. Каждый из данных режимов является устойчивым, результаты соответствующих проверочных расчетов также приведены на рис. 6 и 7.

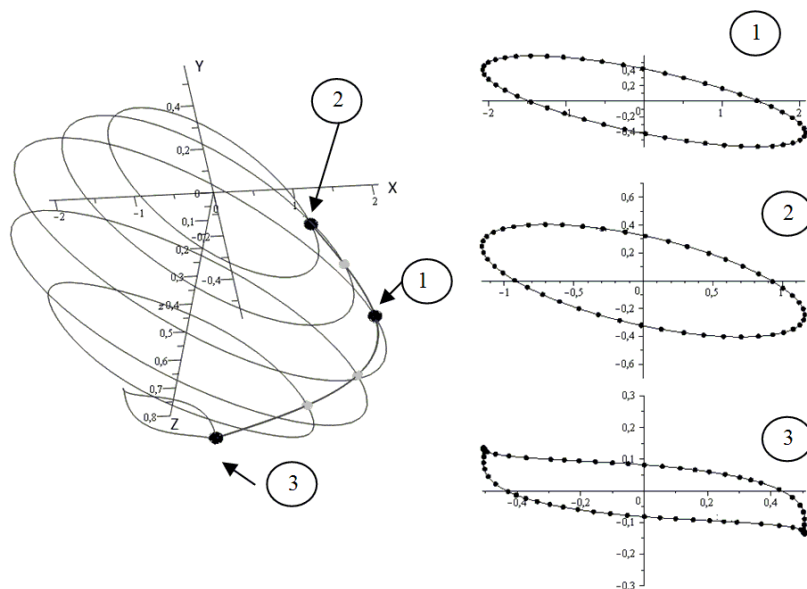


Рис. 6. Пространственное представление прецессирующего вала в режиме В, а также траектории перемещений диска, левой и правой опор (точки 1, 2, 3 соответственно) (единица измерения перемещений — мм). Здесь точки отвечают аналитическим решениям, линии — проверочному численному расчету.

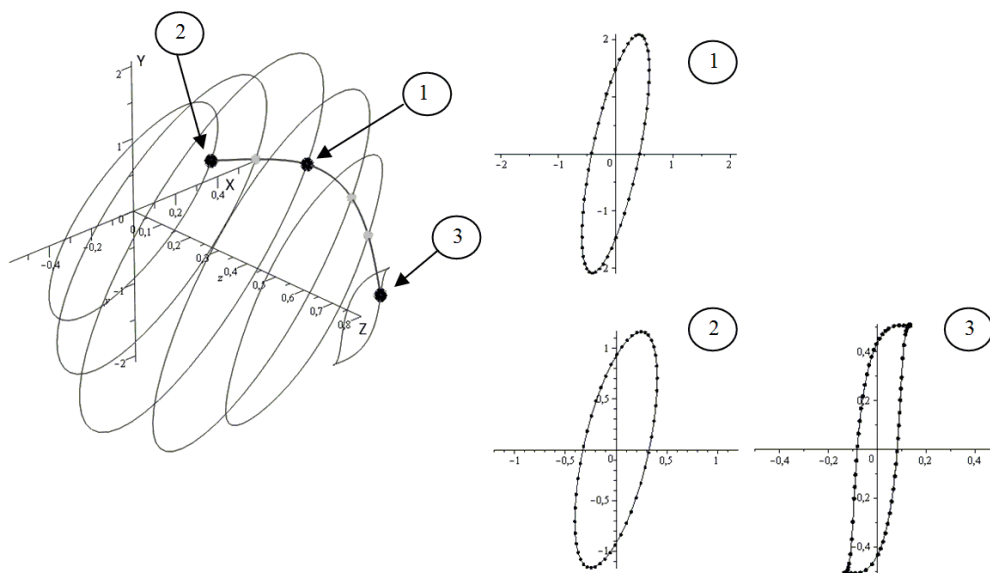


Рис. 7. Пространственное представление прецессирующего вала в режиме С, а также траектории перемещений диска, левой и правой опор (точки 1, 2, 3 соответственно) (единица измерения перемещений — мм). Точки отвечают аналитическому решению, линии — проверочному численному расчету.

На рисунке 8 изображена диаграмма Кэмпбелла роторной системы при указанных ранее значениях параметров. Точке D на рис. 4, в которой происходит ветвление решений, соответствует значение частоты вращения, равное первой критической скорости ротора.

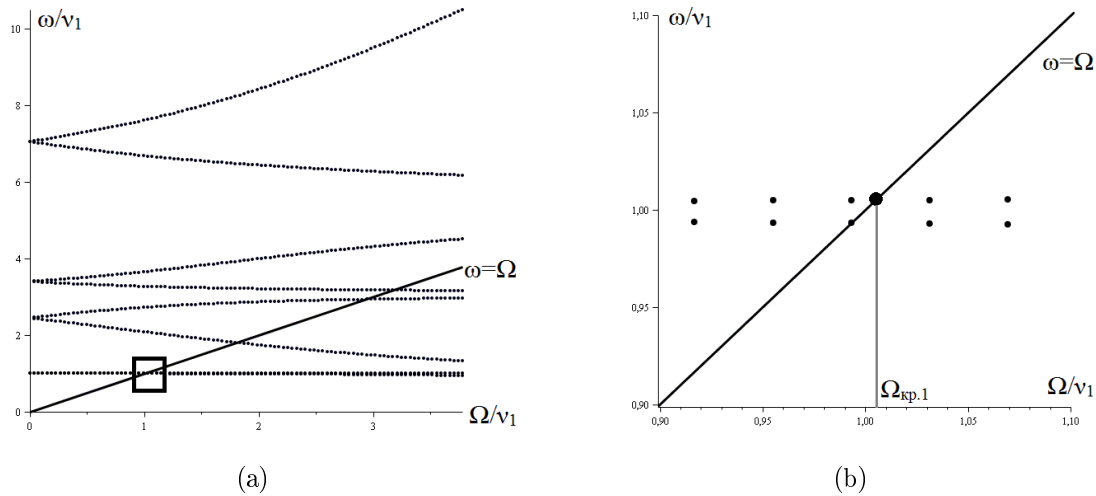


Рис. 8. Диаграмма Кэмпбелла роторной системы. Определение первой критической скорости прямой прецессии. (ω — угловые скорости прецессии линейного ротора)

4. Использование математической модели с половинным числом переменных

Как следует из результатов предыдущего параграфа, уравнения движения роторной системы, изображенной на рис. 1, позволяют обнаружить два качественно различных вида решений: первый тип решений соответствует режимам с циклически симметричными траекториями перемещений диска и опор (режим А), второй тип решений описывает режимы движения, при которых траектории диска и опор являются линиями с центральной симметрией (режимы В,С). Отличительная черта режима А — циклическая симметрия траекторий в конфигурационном пространстве — позволяет находить режимы такого типа, используя более простую математическую модель.

Теперь, вводя обозначения $\bar{f} = \{x, \theta_1, x_1, x_2\}^T$, $\bar{f}^* = \{y, \theta_2, y_1, y_2\}^T$, можно убедиться, проводя соответствующие преобразования в системе (1), что данная система уравнений инвариантна относительно замены вида $\bar{f}(t) \rightarrow \bar{f}^*(t + T/4)$, $\bar{f}^*(t) \rightarrow -\bar{f}(t + T/4)$ при одновременной замене $t \rightarrow t + T/4$ ($T = 2\pi/\Omega$ — период вращений ротора). Равенство $\bar{f}(t) = \bar{f}^*(t + T/4)$, $\bar{f}^*(t) = -\bar{f}(t + T/4)$ для режима А подтверждается также аналитическими решениями и представлением соответствующих траекторий на рис. 5. Таким образом, условия симметрии позволяют для нахождения режимов типа А использовать более

простую модель, число переменных в которой уменьшено ровно наполовину:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}(t) + \rho_1\dot{x}(t) + c_{11}(x(t) - h_1x_2(t) - h_2x_1(t)) + \\
 & + c_{12}\left(-\theta_1(t + \pi/2\Omega) - \frac{x_2(t) - x_1(t)}{l}\right) = \varepsilon\Omega^2m \cos \Omega t, \\
 & I_e\ddot{\theta}_1(t) + \rho_2\dot{\theta}_1(t) - I_p\Omega\dot{\theta}_1(t + \pi/2\Omega) \\
 & - c_{21}(-x(t + \pi/2\Omega) + h_1x_2(t + \pi/2\Omega) + h_2x_1(t + \pi/2\Omega)) - \\
 & - c_{22}\left(-\theta_1(t) - \frac{-x_2(t + \pi/2\Omega) + x_1(t + \pi/2\Omega)}{l}\right) = 0, \\
 & m_1\ddot{x}_1(t) + \beta\dot{x}_1(t) + s_1(x(t) - h_1x_2(t) - h_2x_1(t)) + \\
 & + s_2\left(-\theta_1(t + \pi/2\Omega) - \frac{x_2(t) - x_1(t)}{l}\right) + c_x^{(1)}x_1(t) + c_x^{(2)}x_1^3(t) = 0, \\
 & m_2\ddot{x}_2(t) + \beta\dot{x}_2(t) + s_3(x(t) - h_1x_2(t) - h_2x_1(t)) + \\
 & + s_4\left(-\theta_1(t + \pi/2\Omega) - \frac{x_2(t) - x_1(t)}{l}\right) + k_x^{(1)}x_2(t) + k_x^{(2)}x_2^3(t) = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что данный вариант записи редуцированной системы с половинным числом переменных не является единственным.

Метод гармонического баланса можно применять к уравнениям (5) непосредственно. Применение метода нелинейных нормальных форм колебаний также возможно после ряда оговорок. Во-первых, в описанном выше варианте метод ННФ требует наличия уравнений в главных координатах. Однако в режиме А главные координаты также можно разбить на две группы подобно приведенным выше векторам \bar{f} и \bar{f}^* , а это в свою очередь позволяет получить четыре уравнения в главных координатах, подобных уравнениям (5). Во-вторых, среди оставленных четырех переменных активной будет лишь одна главная координата (например, q_1), а значит, формы Шуу-Пьера необходимо искать в виде зависимостей $q_i = q_i(q_1, s_1)$, $s_i = s_i(q_1, s_1)$, где $s_1 = \dot{q}_1$, что значительно облегчает вычислительную сторону задачи. В-третьих, в нулевом приближении можно принять, что изображающая точка системы в процессе движения описывает на плоскости (q_1, s_1) траекторию, близкую к каноническому эллипсу вида $q_1 = A \cos(\Omega t + \psi)$, $s_1 = -\Omega A \sin(\Omega t + \psi)$, что позволяет установить следующие зависимости: $q_1(t + \pi/2\Omega) = -A \sin(\Omega t + \psi) = s_1(t)/\Omega$, $s_1(t + \pi/2\Omega) = -\Omega A \cos(\Omega t + \psi) = -\Omega q_1(t)$. Таким образом, при помощи этих зависимостей при построении нормальных форм колебаний необходимо выполнить замену активных переменных в уравнениях движения редуцированной системы, и лишь после этого приступить к составлению уравнений в частных производных. Членам вида $q_i(t + T/4)$, $s_i(t + T/4)$ при формировании уравнений в частных производных ставятся в соответствие выражения $q_i = q_i(s_1/\Omega, -\Omega q_1)$, $s_i = s_i(s_1/\Omega, -\Omega q_1)$. В остальном процедура ничем не отличается от описанной ранее.

Проверочный расчет показывает, что АЧХ, построенные в окрестности резонанса $\Omega \approx \Omega_{1\text{кр}}$ при помощи метода гармонического баланса, применяемого как

к полной системе уравнений, так и к укороченной, не отличаются.

5. Выводы

Рассмотрение математической модели однодискового ротора с изотропно-упругим валом и нелинейными изотропно-упругими опорами позволяет установить, что уравнения вынужденных колебаний ротора под действием собственной неуравновешенности в диапазоне частот, близком к первой критической скорости, допускают решения, соответствующие качественно различным режимам движения. Наряду с режимами синхронной прецессии, при которых траектории диска и опор являются циклически симметричными (при малой нелинейности - близкими к круговым), можно обнаружить такие синхронные режимы, при которых траектории становятся центрально-симметричными (при малой нелинейности - близкими к эллиптическим). Существование подобных режимов подтверждается как при помощи аналитических методов исследования, так и применением численного моделирования.

Как показано в работе, для определения режимов движения с циклически симметричными траекториями можно использовать уравнения движения, сформулированные относительно четырех обобщенных перемещений, а не восьми.

Список цитируемых источников

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. — М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. — 704 с.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961. — 360 с.
3. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. — К.: Наукова думка, 1977.
4. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. — М.: Изд-во АН СССР, 1961.
5. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Кельзон А. С., Журавлев Ю. Н., Январев Н. В. Расчет и конструирование роторных машин. — Л.: Машиностроение, 1977. — 287 с.
7. Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И. Динамика роторов в упругих опорах. — М.: Наука, 1982.
8. Михлин Ю. В. Резонансные режимы нелинейных систем, близких к консервативным // Прикладная математика и механика — 1974. — Т. 38, № 3. — С. 425–429.
9. Николаи Е. Л. Теория гироскопов. — М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
10. Пасынкова И. А. Бифуркации прецессионного движения неуравновешенного ротора // Прикладная математика и механика — 2006. — Вып. 4. — С. 605–616.
11. Пасынкова И. А., Лебедева И. М. Установившиеся вращения ротора в нелинейных упругих опорах без учета сопротивления // Вестн. С.-Петербург. ун-та — 1998. — Серия 1, Вып. 3 — С. 101–106.

12. *Перепелкин Н. В., Михлин Ю. В.* Анализ вынужденных форм колебаний однодискового ротора на нелинейно-упругих опорах // *Механика твердого тела* —2010. — Т. 40. — С. 221–232.
13. *Перепелкин Н. В., Михлин Ю. В.* Нелинейные нормальные формы вынужденных колебаний однодискового ротора на массивных нелинейно-упругих опорах // *Методы решения прикладных задач механики деформированного твердого тела* —2011. — Вып. 12. — С. 270–278.
14. *Avramov K. V.* Asymptotic analysis of forced vibrations of a one-disc rotor on a nonlinear flexible base // *Proceedings of the IMechE, Part C: Journal of Mech. Engineering Science* —2010. — Vol. 224. — p. 1593–1604.
15. *Genta G.* *Dynamics of Rotating Systems.* — Berlin: Springer, 2005. — 660 p.
16. *Muszynska A.* *Rotordynamics.* — Boca Raton: Taylor&Francis, 2005. — 1054 p.
17. *Panda K. C., Dutt J. K.* Optimum support characteristics for rotor-shaft system with preloaded rolling element bearings // *Journal of Sound and Vibration* —2003. — Vol. 260. — p. 731–755.
18. *Rauscher M.* Steady oscillations of system with nonlinear and unsymmetrical elasticity // *Journal of Applied Mechanics* —1938. — Vol. 5.
19. *Shaw S. and Pierre C.* Nonlinear normal modes and invariant manifolds // *J. of Sound and Vibration* —1991. — Vol. 150. — p. 170–173.
20. *Shaw S. and Pierre C.* Normal modes for nonlinear vibratory systems // *J. of Sound and Vibration* —1993. — Vol. 164. — p. 85–124.
21. *Tondl A.* *Some problems of rotor dynamics.* — London: Chapman and Hall, 1965.

Получена 04.10.2011