Динамические системы, вып. 27 (2009), 151–160

УДК 519.62

О реализации алгоритма исследования устойчивости разностного уравнения на языке компьютерной алгебры MAXIMA

А.В. Шульгин, О.В. Анашкин

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: alex.shulgin@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости нелинейного разностного уравнения с запаздыванием. Существенной особеностью задачи является ее неавтономность, т.е. коэффициенты разностного уравнения зависят от номера итерации. Исследование проводится путем построения так называемой возмущенной функции Ляпунова. Алгоритм построения функции реализован на языке компьютерной алгебры MAXIMA. Получены легко проверяемые условия устойчивости скалярного нелинейного уравнения в форме явной зависимости от коэффициентов уравнения и величины запаздывания.

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, критерий устойчивости, функция Ляпунова, система компьютерной алгебры MAXIMA.

1. Введение

Разностные уравнения с запаздыванием, активно изучаемые в последние два десятилетия [1–9], являются по сути обычными разностными уравнениями высокого порядка или сравнительно легко сводятся к последним [6]. Но переход от уравнения с запаздыванием к соответствующему уравнению без запаздывания всегда предполагает фиксацию величины запаздывания. Это усложняет изучение зависимости свойств решений от величины запаздывания. Поэтому для уравнений с запаздыванием нужно развивать специальные методы.

Для исследования устойчивости разностных уравнений широко применяется метод функций Ляпунова (см., например, работы [1]–[5], [8, 9] и литературу в них). Однако эадача поиска подходящей функции Ляпунова часто связана с большим объемом аналитических выкладок. В настоящей статье для преодоления этой проблемы используются средства компьютерной алгебры. Дано описание реализации алгоритма построения обобщенной функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теорем об устойчивости для неавтономного разностного уравнения с запаздыванием, записанного в специальной форме, охватывающей все типы зависимости от запаздывания [2, 3].

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность применяемого алгоритма, в статье получен критерий устойчивости для скалярного квадратичного уравнения с почти-периодическими коэффициентами.

2. Теоремы об усточивости

Пусть $\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел, $J[a,b] \subset \mathbb{Z}$ — множество целых чисел на сегменте $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим $\mathfrak{M}_p$ пространство отображений множества $J[-p,0]$ в $\mathbb{R}^n$. Любое такое отображение определяется заданием вещественной $n \times (p+1)$-матрицы $\varphi = (\varphi(-p), \ldots, \varphi(0))$. Введем в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ норму $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : s \in J[-p,0]\}$, где $|\cdot|$ есть какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$. Для данной последовательности $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$, $k \mapsto x(k)$, обозначим $x[k]$ элемент пространства $\mathfrak{M}_p$, определенный как отрезок последовательности x: $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -p, \ldots, 0$.

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение вида

$$\Delta x(k) = f(k, x[k]), \quad k = \sigma, \sigma+1, \ldots, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, функция $f : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^n$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определена в области $\mathfrak{B}^p_H = \{\|\varphi\| < H\} \subset \mathfrak{M}_p$ и существуют постоянные $M > 0$ и $d_0 > 1$ такие, что

$$|f(k,\varphi)| \le M\|\varphi\|^{d_0}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathfrak{B}^p_H. \tag{2}$$

Пусть заданы натуральное $q \ge p$ и действительное $R \ge 1$. Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{A}^q_R = \{\varphi \in \mathfrak{M}_q : \|\varphi\| \le R|\varphi(0)|\}$. Достаточные условия устойчивости нулевого решения разностного уравнения (1) формулируются в виде свойств функции Ляпунова $v : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_q \to \mathbb{R}$, определенной на пространстве $\mathfrak{M}_q$ для некоторого $q \ge p$.

Введем следующие обозначения:

$\Delta v|_{(1)}(\sigma,\varphi) = v(\sigma+1, x(\sigma,\varphi)[\sigma+1]) - v(\sigma,\varphi)$ — первая разность вперед функции v в силу уравнения (1);

e_x — функция-константа из $\mathfrak{M}_q$, тождественно равная $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. $e_x(s) = x$, $-q \le s \le 0$.

$\mathcal{K}$ — множество всех строго возрастающих непрерывных функций $a : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, уничтожающихся в нуле, $a(0) = 0$.

Теорема 1 ([2],[3]). *Предположим, что для некоторых $q \ge p$, $H > 0$ и $R > 1$ существуют функции $v, \Phi : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_q \to \mathbb{R}$ удовлетворяющие условиям:* 1) *существуют функции $a, b \in \mathcal{K}$ такие, что* a) $\Delta v|_{(1)}(\sigma,\varphi) \le \Phi(\sigma,\varphi,\mu)$, b) $a(|\varphi(0)|) \le v(\sigma,\varphi) \le b(\|\varphi\|)$ *для $\sigma \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathfrak{A}^q_R \cap \mathfrak{B}^q_H$;* 2) *существуют постоянные $M_0 > 0$ и $d > 1$ такие, что $|\Phi(\sigma,\varphi)| \le M_0\|\varphi\|^d$ и $|\Phi(\sigma,\varphi) - \Phi(\sigma,\psi)| \le M_0 r^{d-1}\|\varphi - \psi\|$ для $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}^q_R \cap \mathfrak{B}^q_r$, $0 < r < H$;* 3) *существуют постоянные $T \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $k_0 \in \mathbb{Z}$, $\varphi(0) \in B_H \subset \mathbb{R}^n$, и $N \ge T$*

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s, e_{\varphi(0)}) \le -2\delta|\varphi(0)|^d N.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 2 ([2]). *Предположим, что для некоторых* $q \geq p$, $\beta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ *и* $R > 1$ *существуют функции* $v(k,\varphi)$ *и* $\Phi(k,\varphi)$ *такие, что для* $k \geq \sigma$ *и* $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_H^q$ *выполнены условия:* 1) $\Delta v|_{(1)}(k,\varphi) \geq \Phi(k,\varphi)$; 2) *для каждого* $k \geq \sigma$ *и* $\eta \in (0,\beta)$ *существует* $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_\eta^q$ *такое, что* $v(k,\varphi) > 0$, 3) *существует функция* $b \in \mathcal{K}$ *такая, что* $v(k,\varphi) \leq b(\|\varphi\|)$; 4) *функция* $\Phi(k,\varphi)$ *удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 1; 5) *существуют постоянные* $T \in \mathbb{N}$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых* $k_0 \geq \sigma$, $\varphi(0) \in B_\beta \subset \mathbb{R}^n$, *и* $N \geq T$

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s, e_{\varphi(0)}) \geq 2\delta|\varphi(0)|^d N.$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) *неустойчиво.*

3. Индекс устойчивости квадратичного уравнения с почти-периодическими коэффициентами

Рассмотрим квадратичное уравнение

$$\Delta x(k) = a(k)x^2(k) + b(k)x(k)x(k-h) + c(k)x^2(k-h) \tag{3}$$

с постоянным запаздыванием $h \geq 0$. Коэффициенты уравнения являются вещественными функциями вида

$$a(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \exp(i\nu k), \quad b(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} b_\nu \exp(i\nu k), \quad c(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} c_\nu \exp(i\nu k), \tag{4}$$

где $i^2 = -1$, a_ν, b_ν, c_ν являются комплексными, причем числа $a_{-\nu}$ и a_ν комплексно сопряжены, то же верно и в отношении b_ν, c_ν. Множество $\mathcal{N}$ обладает свойствами: $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = -\mathcal{N}$, $0 \in \mathcal{N}$, множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N} + \mathcal{N}$ не содержат отличных от нуля чисел, кратных 2π.

Для числовой функции $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$, $(t,\varphi) \mapsto \Phi(t,\varphi)$ обозначим

$$\widehat{\Phi}(x) = \mathcal{M}_k\{\Phi\}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k, e_x)$$

среднее значение функции Φ по k на $\mathbb{Z}_+$ при постоянном значении второго аргумента, если указанный предел существует. Среднее $\widehat{\Phi}$ есть числовая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, или константа, если Φ зависит только от k. Нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{M}_k\{\exp(i\nu k)\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu/2\pi \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5}$$

Если среднее $\mathcal{M}_k\{a(k) + b(k) + c(k)\}$ суммы коэффициентов уравнения (3) отлично от нуля, то на основании теоремы 2 легко показать, что уравнение (3) имеет неустойчивое нулевое решение.

Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения имеет нулевое среднее: $\widehat{a} = \widehat{b} = \widehat{c} = 0$.

Желая получить условия, при которых нулевое решение уравнения (3) асимптотисески устойчиво, возьмем за основу конструкции подходящей вспомогательной функции квадратичную функцию $V_0 = x^2/2$.

Далее будем использовать экономичные обозначения:

$$x' \equiv x(k+1), \quad x \equiv x(k), \quad x_h \equiv x(k-h).$$

Вычисляя первую разность функции V_0 в силу уравнения (3), получим

$$\Delta V_0\big|_{(3)} = x\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} = ax^3 + bx^2x_h + cxx_h^2 + \frac{(\Delta x)^2}{2} = \Phi_0(k, x[k]) + \frac{(\Delta x)^2}{2}. \quad (6)$$

Среднее $\widehat{\Phi}_0(x_0) = 0$. Чтобы уничтожить в (6) слагаемое $\Phi_0(k, x[k])$ с нулевым средним, построим возмущенную функцию

$$V_1(k, x[k]) = V_0(x(k)) + u(k, x[k]),$$

где возмущение $u(k, x[k])$ имеет такую же структуру как и $\Phi_0(k, x[k])$, $u(k, x[k]) = U_a x^3 + U_b x^2 x_h + U_c x x_h^2$, а коэффициенты U_a, U_b, U_c удовлетворяет условиям:

$$\Delta U_a = -a, \quad \Delta U_b = -b, \quad \Delta U_c = -c. \quad (7)$$

Возьмем $U_a(k) = -A(k)$, $U_b(k) = -B(k)$, $U_c(k) = -C(k)$, где $A(k) = \sum\limits_{s=0}^{k-1} a(s)$. Функции $B(k)$ и $C(k)$ определяются аналогично.

При таком выборе коэффициентов возмущения $u(k, x[k])$

$$\Delta V_1\big|_{(3)} = \frac{(\Delta x)^2}{2} - A'\Delta(x^3) - B'\Delta(x^2 x_h) - C'\Delta(x x_h^2).$$

Выпишем выражения для первых разностей в правой части последней формулы, оставляя только одночлены наименьшей (4-й) степени:

$$\Delta(x^3) = 3x^2\Delta x + \ldots, \qquad \Delta(x^2 x_h) = 2xx_h\Delta x + x^2\Delta x_h + \ldots. \quad (8)$$

Благодаря (7), главный член $\Phi_1(k, x[k])$ приращения функции V_1 уже будет однородным многочленом четвертой степени относительно x, x_h

$$\Phi_1(k, x[k]) = \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left[3A'x^2\Delta x + B'(2xx_h\Delta x + x^2\Delta x_h) + C'(2xx_h\Delta x_h + x_h^2\Delta x)\right].$$

Отсюда с учетом (8) получим

$$\mathcal{M}_k\{\Phi_1(k, e_{x_0})\} = x_0^4\mathcal{I} = x_0^4\mathcal{M}_k\Bigg\{\Bigg[\frac{(a+b+c)^2}{2} -$$

$$- (3A' + 2B' + C')(a + b + c) - (2C' + B')(a_h + b_h + c_h)\Big]\Big]\Big\}. \quad (9)$$

Из теорем 1, 2 следует, что характер устойчивости нулевого решения уравнения (3) определяется знаком *индекса устойчивости* $\mathcal{I}$: при $\mathcal{I} < 0$ нулевое решение асимптотически устойчиво, при $\mathcal{I} > 0$ — неустойчиво.

Пусть функции a, b, c имеют вид (4), тогда можно получить явную формулу зависимости индекса устойчивости $\mathcal{I}$ от коэффициентов разложений (4) и запаздывания h. Для этого воспользуемся следующими формулами из [4]:

$$\mathcal{M}_k\{a(k)b(k)\} = \mathcal{M}_k\left\{\sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu e^{i\nu k}\sum_{\nu\in\mathcal{N}} b_\nu e^{i\nu k}\right\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu b_{-\nu}. \quad (10)$$

$$\mathcal{M}_k\{a^2(k)\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu a_{-\nu} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} |a_\nu|^2 = 2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu|^2. \quad (11)$$

С помощью этих формул получим следующие соотношения

$$\mathcal{M}_k\{A(k+1)a(k)\} = \mathcal{M}_k\{a^2(k)\}/2 = \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu|^2. \quad (12)$$

$$\mathcal{M}_k\{A(k+1)a(k-h)\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu|^2\frac{\sin\nu(h+1/2)}{\sin(\nu/2)}. \quad (13)$$

$$\mathcal{M}_k\{A(k+1)b(k-h)\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu b_{-\nu}\frac{e^{i\nu(h+1)}}{e^{i\nu}-1}. \quad (14)$$

С учетом соотношений (11) и (12), выражение для индекса устойчивости $\mathcal{I}$ можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{M}_k\left\{(a+b+c)^2/2\right\} - \\ &\quad - \mathcal{M}_k\{(3A'+2B'+C')(a+b+c)\} - \mathcal{M}_k\{(2C'+B')(a_h+b_h+c_h)\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{M}_k\left\{(a+b+c)^2\right\} - 3\mathcal{M}_k\{(A'+B'+C')(a+b+c)\} + \\ &\quad + \mathcal{M}_k\{(B'+2C')(a+b+c)\} - \mathcal{M}_k\{(B'+2C')(a_h+b_h+c_h)\} = \\ &= -\mathcal{M}_k\left\{(a+b+c)^2\right\} + \mathcal{M}_k\{B'(b-b_h)\} + 2\mathcal{M}_k\{C'(c-c_h)\} + \\ &\quad + \mathcal{M}_k\{(B'+2C')(a-a_h)\} + \mathcal{M}_k\{B'(c-c_h)\} + 2\mathcal{M}_k\{C'(b-b_h)\}.\end{aligned}$$

Используя формулы (10)–(14), окончательно получим

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu+b_\nu+c_\nu|^2 - \\ &\quad - 2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}(|b_\nu|^2+2|c_\nu|^2)\frac{\cos(\nu(h+1)/2)\sin(\nu h/2)}{\sin(\nu/2)} +\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\nu \in \mathcal{N}} [(a_{-\nu} + c_{-\nu})b_\nu + 2(a_{-\nu} + b_{-\nu})c_\nu] \, \frac{1 - e^{i\nu h}}{1 - e^{-i\nu}}. \quad (15)$$

Из этой формулы следует, что слагаемые, образующие правую часть уравнения (3), по-разному влияют на устойчивость. Важнейшую роль в стабилизации нулевого решения играет первое слагаемое, не зависящее от запаздывания. В указанных предположениях уравнение (3) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение при любом запаздывании и любых коэффициентах b и c, если $\sum_{\nu \in \mathcal{N}} |a_\nu|^2$ достаточно велика. Неустойчивость нулевого решения возникает только при наличии запаздывания h.

Процедура вывода формулы (15) весьма трудоемкая. В следующем разделе кратко описана программная реализация алгоритма вывода формулы для индекса устойчивости, позволяющая быстро исследовать устойчивость любого конкретного скалярного разностного уравнения с почти-периодическими коэффициентами.

4. Программная реализация

Создана реализация изложенного выше алгоритма исследования устойчивости, предназначенная для исследования уравнения (1) с правой частью вида

$$F(k, x[k]) = \sum_p F_p(k) X^p(k), \quad (16)$$

где $X(k) = (x(k), x(k-h), x(k-2h), \ldots)$, $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ — мультииндекс, p_s — целые неотрицательные числа, $X^p(k) = x^{p_0}(k) x^{p_1}(k-h) \ldots$; $F_p(k)$ — дискретные функции вида (4):

$$f(k) = \sum_{\omega \in \Omega} f_\omega \, e^{i\omega k}. \quad (17)$$

Предполагается, что все указанные суммы конечные.

Для реализации алгоритма была выбрана система компьютерной алгебры “MAXIMA” [10], распространяемая под свободной лицензией. Использование системы компьютерной алгебры позволяет исследовать системы с символьными (нечисловыми) параметрами и делать выводы об области устойчивости в зависимости от данных параметров.

Для представления функций из класса (17) использовались списки пар $< \omega, f_\omega >$:

$$(< \omega_1, f_{\omega_1} >, \ldots, < \omega_s, f_{\omega_s} >),$$

при этом паре слагаемых $f_\omega e^{i\omega k} + \overline{f_\omega} e^{-i\omega k}$ соответствует только *одна* пара $< \omega, f_\omega >$ в списочном представлении.

Нулевой функции соответствует пустой список: $0 \sim (\,)$, скалярной — список из одного элемента с нулевой частотой $\alpha \sim (< 0, \frac{\alpha}{2} >) \sim \frac{\alpha}{2} e^{0ik} + \frac{\alpha}{2} e^{-0ik} = \alpha$.

Нетрудно заметить, что сумму двух таких функций в виде списка можно получить из списков для слагаемых, если сложить коэффициенты при соответствующих частотах:

$$(<1,2>,<3,4>)+(<3,2>,<5,-1>)=(<1,2>,<3,6>,<5,-1>).$$

Для наиболее эффективного выполнения этой операции следует хранить списки отсортированными по первому элементу — *частоте*.

Для умножения функции на скаляр, достаточно домножить каждый коэффициент, оставив частоты без изменения:

$$(<1,2>,<3,4>)\times 2=(<1,4>,<3,8>).$$

Остается только определить операцию умножения двух функицй:

$$\left(f_1e^{i\omega_1 t}+\ldots+f_se^{i\omega_s t}\right)\times\left(g_1e^{i\nu_1 t}+\ldots+g_le^{i\nu_l t}\right).$$

Раскроем скобки слева:

$$\begin{aligned}
&f_1e^{i\omega_1 t}\times(<\nu_1,g_1>,\ldots,<\nu_l,g_l>)+\\
&+\ldots+\\
&f_se^{i\omega_s t}\times(<\nu_1,g_1>,\ldots,<\nu_l,g_l>)=\\
&(<\nu_1+\omega_1,f_1g_1>,\ldots,<\nu_l+\omega_1,f_1g_l>)+\\
&+\ldots+\\
&(<\nu_1+\omega_s,f_sg_1>,\ldots,<\nu_l+\omega_s,f_sg_l>).
\end{aligned}$$

Итак, мы определили основные операции над функциями вида (4), представленными в виде списков.

Аналогичным образом введем представление для функции вида (16) из правой части уравнения (1) в виде списков пар $<p,F_p(k)>$, где $F_p(k)$ представляет из себя список пар для соответствующей функции (4), а $p=(p_0,p_1,\ldots)$ — список произвольной (конечной) длины, содержащий индексы степеней соответствующих выражений $x(k-sh)$. Подобным описанному выше способом вводятся операции сложения, умножения на число и перемножения между собой для такого представления.

Следует подчеркнуть, что списочное представление используется программой исключительно для внутреннего хранения и обработки данных. Перед работой циклической части алгоритма производится автоматический анализ уравнений: по левой части выделяется переменная x, переменная времени (запаздывание, если оно есть, задается пользователем явно); из правой части уравнения выделяется линейная и нелинейная часть, анализируются и приводятся к виду списков соответствующие функции.

Алгоритм позволяет исследовать как нелинейные разностные уравнения, так и линейные в стандартной форме

$$\Delta x(k)=\varepsilon L(k,x[k]),\quad k=\sigma,\sigma+1,\ldots,$$

где ε — малый параметр, $L(k, x[k])$ — линейная относительно $x[k]$ функция с коэффициентами вида (4).

Работа циклической части алгоритма начинается с выбора начального приближения к функции Ляпунова для исходного уравнения. По-умолчанию выбирается выражение $V = x^2(k)$, однако пользователь может изменить этот выбор по своему усмотрению, передав требуемое выражение в качестве параметра при запуске алгоритма.

На каждом шаге работа алгоритма заключается в вычислении первой разности в силу исследуемого разностного уравнения для текущего приближения к функции Ляпунова V, выделении главного члена $\Phi(k, x[k])$ из полученного выражения и анализе его среднего значения. Главный член — сумма одночленов наименьшей степени относительно фазовых переменных x, x_h, ... В случае линейного уравнения отбираются слагаемые при минимальной степени малого параметра.

Среднее значение $\Phi(k, x[k])$ вычисляется по k при фиксированном значении фазовых переменных, т.е., $x[k] = e_{x_0}$. Благодаря (5), осциллирующие слагаемые (с ненулевой частотой в показателе экспоненты при ik) дают нулевой вклад, а все среднее состоит из суммы коэффициентов при экспонентах с нулевыми показателями. Если среднее значение оказывается ненулевым, то оно объявляется индексом устойчивости для исследуемого уравнения и работа алгоритма прекращается. В противном случае по главному члену Φ приращения функции V вычисляется, как это было показано выше, очередное возмущение функции Ляпунова U, которое уничтожает Φ при вычислении первой разности от следующего приближения к функции Ляпунова $V + U$, и процесс повторяется.

5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим квадратичное разностное уравнение

$$\Delta x(k) = a\cos(k)x^2(k) + b\cos(2k)x(k)x(k-h) + c\cos(3k)x^2(k-h), \tag{18}$$

где a, b и c — вещественные параметры. Формула индекса устойчивости для данного уравнения, рассчитанная с применением описанной программы, после несложных тригонометрических преобразований приобретает вид:

$$I = -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\left[1 + \frac{\cos(h+1)\sin h}{\sin 1}\right] - c^2\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos\frac{3}{2}(h+1)\sin\frac{3}{2}h}{\sin\frac{3}{2}}\right] \tag{19}$$

и полностью совпадает с общей формулой (15), полученной в разделе 3.

Аналогичная, но более сложная формула возникает, если в исходном уравнении взять функции $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ с более разнообразным набором частот. Например, если положить $a(k) = a_1\cos(\omega_1 k) + a_2\cos(\omega_2 k)$, $b(k) = 0$, $c(k) = c_1\cos(\omega_3 k) + c_2\cos(\omega_4 k)$, то в (19) первое слагаемое будет иметь вид $-(a_1^2 + a_2^2)/2$, как это и следует из (15).

Зафиксировав в I один из параметров, например $a = 1$, получим поверхность второго порядка в пространстве переменных b, c, I. В зависимости от величины запаздывания h, эта поверхность может оказаться эллиптическим параболоидом (коэффициенты при b^2 и c^2 одного знака) либо гиперболическим параболоидом (когда эти коэффициенты имеют разные знаки). Так, при $h = 1, 2, 3$, получаем гиперболический параболоид, следовательно, выбором параметров b, c можно добиться либо асимптотической устойчивости, либо неустойчивости.

Иная ситуация будет иметь место при $h = 4$: в этом случае оба коэффициента при b^2 и c^2 отрицательны, а значит, поверхность представляет собой эллиптический параболоид с высшей точкой в $b = c = 0$. Таким образом, при $h = 4$ имеет место асимптотическая устойчивость, если хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

При $h = 5$, получаем аналогичную картину, только теперь $b = c = 0$ — низшая точка поверхности, т.к. чаша параболоида в этом случае "смотрит вверх" благодаря знакам коэффициентов при b^2, c^2. Положив заново $a = 0$ можно получить неустойчивость при $|b| + |c| \neq 0$, однако выбор $|a| > 0$ приводит к появлению области устойчивости вблизи начала координат (b, c), т.к. "дно" чаши опускается под плоскость $I = 0$.

Исследование поверхностей, получающихся при значениях $h > 5$, не выявляет принципиально новых конфигураций, т.е. все их можно отнести к одному из описанных выше классов.

Вычисления, проведенные в диапазоне $h = 0 \div 35$, показывают, что нулевое решение уравнения (18) асимптотически устойчиво при $|a| + |b| + |c| \neq 0$, если $h = 0, 4, 6, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 34$.

Для контроля полученных результатов была проведена большая серия численных экспериментов, при которых проводились вычмсления решений уравнения (18) для случайно выбираемых массивов начальных данных из заданной окрестности нуля.

В результате экспериментов выяснилось, что предсказания индекса устойчивости отностельно поведения решений в точности соответствуют реальному поведению: при $I(h) < 0$, значение $x(k)$ стремится к нулю; при $I(h) > 0$ и малых начальных нормах значение $x(k)$ не входит в малую окрестность нуля, оставаясь по порядку сравнимым с начальными данными.

Также следует отметить, что в экспериментах четко прослеживается связь абсолютной величины индекса устойчивости $I(h)$ и скорости роста/убывания значения $x(k)$. При малой абсолютной величине индекса устойчивости, требовалось больше шагов для выявления поведения решения.

Помимо данного примера также были проведены эксперименты с другими уравнениями. Всюду было обнаружено соответствие поведения, предсказанного индексом устойчивости, и реального поведения решений.

6. Заключение

В работе используется метод исследования устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием, основанный на построении обобщенной функции Ляпунова. Вычислен индекс устойчивости для скалярного квадратичного уравнения с почти-периодическими коэффициентами и постоянным запаздыванием. Фактически получен критерий устойчивости, т.к. вывод об устойчивости не удается сделать только в исключительных случаях, когда выражение для индекса обращается в нуль. Проведен подробный анализ частного случая и численные эксперименты, показывающие полное совпадение теоретических выводов с реальным поведением решений.

Список цитируемых источников

1. *Анашкин О.В.* Достаточные условия устойчивости для одного класса разностных уравнений / О.В. Анашкин // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 46–52.
2. *Анашкин О.В.* Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, No. 7. – С. 976–978.
3. *Анашкин О.В.* Достаточные условия устойчивости для одного класса нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Ученые записки ТНУ, серия матем., мех., информатика и кибернетика. – 2006. – Т.19(58), No.2. – С. 12-19.
4. *Анашкин О.В.* Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин, Й. Диблик // Динамические системы. – 2007. – Вып. 23. – С. 113–122.
5. *Богданов А.Ю.* Исследование устойчивости почти-периодической дискретной системы на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных уравнений / А.Ю. Богданов // Матем. моделирование. – 2009. – Т.21, No.1. – С. 25–32.
6. *Anashkin O.V.* Some Remarks on Averaging for Difference Equations / O.V. Anashkin, E.G. Evstigneeva // Functional Differential Equations. – 2000. – Vol. 7, No. 1-2. – P. 29–38.
7. *Cheng S.S.* Alternate derivations of the stability region of a difference equation with two delays / Sui Sun Cheng, Shao Yuan Huang // Appl. Math. E-Notes. – 2009. – V.9. – P. 225–253.
8. *Diblik J.* Combination of Liapunov and retract methods in the investigation of the asymptotic behavior of solutions of systems of discrete equations / J. Diblik , I. Hlavickova // Dynam. Systems Appl. – 2009. – V.18, No. 3-4. – P.507–537.
9. *Zhang S.* A New Razumikhin Theorem for Delay Difference Equations / S. Zhang, M.-P. Chen // Computers and mathematics with applications. – 1998. – V. 36. – P. 405–412.
10. *Maxima project* – `http://maxima.sourceforge.net/`.

Получена 01.11.2009