

УДК 534.0, 531.39

Нелинейная динамика пружинного маятника

А.А. Клименко, Ю.В. Михлин

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”,
Харьков, 61002. *E-mail*: *muv@kpi.kharkov.ua*

Аннотация. С использованием асимптотических методов рассмотрена динамика пружинного маятника. В частности, метод многих масштабов позволяет с высокой точностью построить формы колебаний в квазилинейном случае. Методы теории нелинейных нормальных форм колебаний позволяют исследовать динамику маятника не только для малых, но и для больших амплитуд колебаний. Устойчивость форм колебаний изучается методом определителей Хилла, а также с использованием численно-аналитического критерия устойчивости.

Ключевые слова: пружинный маятник, нелинейные формы колебаний, устойчивость форм колебаний.

1. Введение

Маятниковые системы являются классическими моделями теоретической механики и нелинейной теории колебаний, исследование которых позволяет выделить многие важные нелинейные динамические эффекты [1], [4], [14]. Помимо этого, известны многочисленные применения таких систем в технике, в частности, в задачах виброгашения [2], [10]. Известно также использование маятниковых моделей для описания физических процессов [3], [7]. Несмотря на то, что движения маятниковых систем детально изучались в многочисленных работах, как в прошлом [8], так и в последнее время [16, 17], аналитические результаты получены только лишь для колебаний с относительно небольшими амплитудами. В настоящей работе новые асимптотические методы в сочетании с современными вычислительными процедурами используются для построения и анализа устойчивости нелинейных нормальных форм колебаний пружинного маятника (так называемого маятника Мандельштама) как для малых, так и для больших амплитуд колебаний. Проводится также анализ устойчивости форм колебаний.

2. Математическая постановка задачи и алгоритм ее решения

Модель пружинного маятника с двумя степенями свободы представлена на Рис.1. Рассматриваются свободные колебания системы. Маятник представляет собой массу m на линейной пружине длиной l в ненапряженном состоянии. Колебания системы описываются двумя обобщенными координатами ρ и φ .

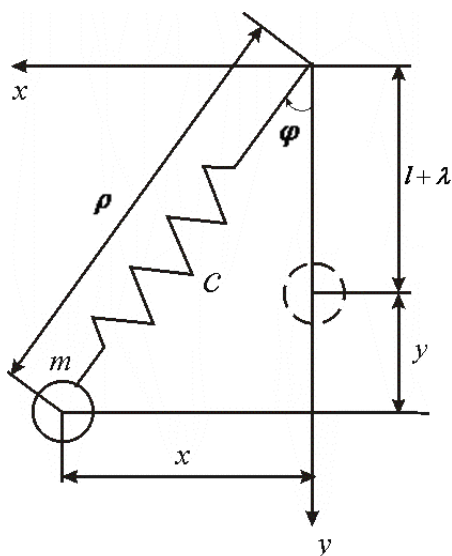


Рис. 1. Рассматриваемая механическая система.

Уравнения движения системы при отсутствии сил сопротивления имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{c}{m}(\rho - l) + g \cos \varphi, \\ \rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = -g\rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

После разложения функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в ряд Маклорена отбрасываются слагаемые, содержащие φ в степени выше третьей. Для случая малых углов отклонения и небольшого растяжения пружины сделаем преобразования вида $\varphi \rightarrow \mu\varphi$; $\rho - \rho_0 \rightarrow \mu z$, где μ — формальный малый параметр, а $\rho_0 = l + gm/c$ — статическое растяжение пружины в состоянии равновесия системы.

После этого уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} \ddot{z} + \frac{c}{m}z = \mu \left(\rho_0\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2}\varphi^2 \right) + \mu^2\dot{\varphi}^2 z; \\ \rho_0^2\ddot{\varphi} + g\rho_0\varphi = \mu (-2\rho_0 z\ddot{\varphi} - 2\rho_0\dot{\varphi}\dot{z} - gz\varphi) + \\ + \mu^2 \left(-z^2\ddot{\varphi} - 2z\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{g\rho_0}{6}\varphi^3 \right) + \mu^3 \frac{g}{6} z\varphi^3. \end{cases} \quad (2)$$

В данной системе можно выделить две формы колебаний:

- продольные колебания (повороты отсутствуют), $\varphi = 0$, $z = z(t)$;
- связанные колебания, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$.

2.1. Построение форм квазилинейных колебаний методом многих масштабов

Для построения второй формы колебаний при малых амплитудах колебаний используются ряды по малому параметру, $z = z_0 + \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \dots$, $\varphi = \varphi_0 +$

$\mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \dots$, а также метод многих масштабов [11], в соответствие с которым решение зависит от различных временных масштабов:

$$\begin{aligned} z(t, \mu) &= z(T_0, T_1, T_2, \dots; \mu); \\ \varphi(t, \mu) &= \varphi(T_0, T_1, T_2, \dots; \mu), \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_0 = t$, $T_1 = \mu t$, $T_2 = \mu^2 t, \dots$. После подстановки (3) в уравнения (2) получаем уравнения, определяющие движение системы по второй нелинейной форме колебаний.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z_0}{\partial T_0^2} + \mu \frac{\partial^2 z_1}{\partial T_0^2} + \frac{c}{m} z_0 + \mu \frac{c}{m} z_1 + 2\mu \frac{\partial^2 z_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu g \varphi_0^2 + \dots = 0; \\ \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0^2} + \mu \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + g \rho_0 \varphi_0 + \mu g \rho_0 \varphi_1 + 2\mu \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0 \partial T_1} + 2\mu \rho_0 z_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0^2} + \\ + 2\mu \rho_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \frac{\partial z_0}{\partial T_0} + \mu g z_0 \varphi_0 + \dots = 0. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю соответствующие коэффициенты при μ^0 и μ^1 , получаем следующие уравнения нулевого и первого приближений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z_0}{\partial T_0^2} + \frac{c}{m} z_0 = 0; \\ \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0^2} + g \rho_0 \varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z_1}{\partial T_0^2} + \frac{c}{m} z_1 + 2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \right)^2 + \frac{g}{2} \varphi_0^2 = 0; \\ \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + g \rho_0 \varphi_1 + 2 \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \rho_0 z_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T_0^2} + 2 \rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} + g z_0 \varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Общее решение уравнений (4) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_0 &= A_0(T_1, T_2, \dots) \cos \omega_1 T_0 + B_0(T_1, T_2, \dots) \sin \omega_1 T_0; \\ \varphi_0 &= C_0(T_1, T_2, \dots) \cos \omega_2 T_0 + D_0(T_1, T_2, \dots) \sin \omega_2 T_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\omega_1 = (c/m)^{1/2}$ и $\omega_2 = (g/\rho_0)^{1/2}$. В данном случае A_0, B_0, C_0, D_0 являются функциями медленных временных масштабов T_1, T_2, \dots и определяются в следующих приближениях.

Подставляя (6) в (5), получаем следующие уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_1}{\partial T_0^2} + \frac{c}{m} z_1 &= 2 \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \omega_1 \sin \omega_1 T_0 - 2 \frac{\partial B_0}{\partial T_1} \omega_1 \cos \omega_1 T_0 + \frac{g}{4} C_0^2 + \frac{g}{4} D_0^2 + \\ &+ \left(\frac{3}{4} g D_0^2 - \frac{3}{4} g C_0^2 \right) \cos 2\omega_2 T_0 - \frac{3}{2} g C_0 D_0 \sin 2\omega_2 T_0; \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + g \varphi_1 &= 2 \rho_0 \frac{\partial C_0}{\partial T_1} \omega_2 \sin \omega_2 T_0 - 2 \rho_0 \frac{\partial D_0}{\partial T_1} \omega_2 \cos \omega_2 T_0 + \left(\frac{\omega_2^2}{2} + \omega_1 \omega_2 \right) \times \\ &\times [(B_0 C_0 + A_0 D_0) \sin(\omega_1 + \omega_2) T_0 + (A_0 C_0 - B_0 D_0) \cos(\omega_1 + \omega_2) T_0] + \\ &+ \left(\frac{\omega_2^2}{2} - \omega_1 \omega_2 \right) [(A_0 C_0 + B_0 D_0) \cos(\omega_1 - \omega_2) T_0 + \\ &+ (B_0 C_0 - A_0 D_0) \sin(\omega_1 - \omega_2) T_0]. \end{aligned} \quad (7)$$

Слагаемые, содержащие $\sin \omega_{1,2} T_0$ и $\cos \omega_{1,2} T_0$ в правой части уравнения (7) служит источником секулярных членов для функций z_1 и φ_1 . В случае равномерного разложения подобного рода члены должны отсутствовать. Этого можно добиться, приравняв к нулю коэффициенты при $\sin \omega_{1,2} T_0$ и $\cos \omega_{1,2} T_0$ в правой части (7), в результате чего получаем:

$$\frac{\partial A_0}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial B_0}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial C_0}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial D_0}{\partial T_1} = 0. \quad (8)$$

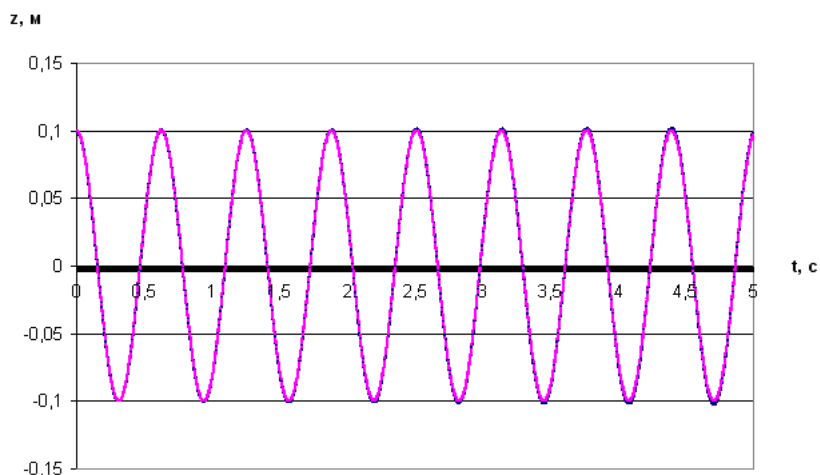
Из уравнений (8) находим, что $A_0 = A_0(T_2, T_3, \dots)$, $B_0 = B_0(T_2, T_3, \dots)$, $C_0 = C_0(T_2, T_3, \dots)$, $D_0 = D_0(T_2, T_3, \dots)$. Решение уравнений (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 \cos \omega_1 T_0 + B_1 \sin \omega_1 T_0 + \frac{g}{4} (C_0^2 + D_0^2) + \\ &+ \frac{g}{1 - 4\omega_2^2} \left(-\frac{3}{2} C_0 D_0 \sin 2\omega_2 T_0 + \frac{3}{4} (D_0^2 - C_0^2) \cos 2\omega_2 T_0 \right); \end{aligned}$$

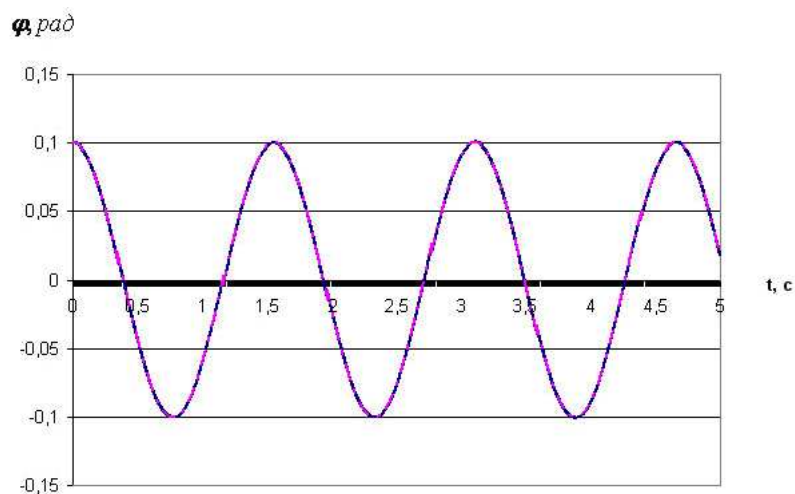
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 \cos \omega_2 T_0 + D_1 \sin \omega_2 T_0 + \\ &+ \frac{\omega_2 (\omega_1 + \frac{\omega_2}{2})}{g - \rho_0 (\omega_1 + \omega_2)^2} [(A_0 C_0 - B_0 D_0) \cos(\omega_1 + \omega_2) T_0 + (B_0 C_0 + A_0 D_0) \sin(\omega_1 + \omega_2) T_0] + \\ &+ \frac{\omega_2 (\omega_1 - \frac{\omega_2}{2})}{g - \rho_0 (\omega_1 - \omega_2)^2} [(B_0 D_0 - A_0 C_0) \cos(\omega_1 - \omega_2) T_0 + (A_0 D_0 - B_0 C_0) \sin(\omega_1 - \omega_2) T_0]. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления не выписаны для краткости изложения. На Рис.2а, Рис.2б показаны графики решений, полученных методом многих масштабов (пунктирная линия) и путем численного интегрирования с использованием схемы Рунге-Кутта (сплошная линия). На Рис.2а показано изменение во времени переменной

z , а на Рис.2б — переменной φ . Сравнение демонстрирует хорошую точность аналитического расчета для относительно небольших амплитуд колебаний и для довольно большого времени расчета (на рисунке показано изменение переменных только для небольших значений переменной t).



2,а



2,б

Рис. 2. Вторая форма колебаний, полученная методом многих масштабов и путем численного интегрирования.

2.2. Построение формы связанных колебаний в конфигурационном пространстве

Используем далее теорию нормальных форм колебаний нелинейных систем [5], [11], [15]. Нелинейные формы колебаний представляют собой обобщение нормальных колебаний линейных систем, при этом все позиционные координаты являются

функциями одной из них. Нелинейные формы колебаний можно построить в виде траекторий системы в конфигурационном пространстве, $z = z(\varphi)$. В таком случае нужно использовать следующие соотношения:

$$\dot{z} = z'\dot{\varphi}; \ddot{z} = z'\dot{\varphi}^2 + z''\ddot{\varphi},$$

где штрихом обозначено дифференцирование по φ . Вновь используем замену $z \rightarrow \mu z$. Кинетическую и потенциальную энергии теперь можно записать в следующем виде:

$$K = \frac{1}{2}\mu^2 m z'^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m \dot{\varphi}^2 (\mu z + \rho_0)^2 = \dot{\varphi}^2 (K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2) = \dot{\varphi}^2 \tilde{K}, \quad (9)$$

где $\tilde{K} = K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2$, $K_0 = \frac{1}{2}m\rho_0^2$, $K_1 = mz\rho_0$, $K_2 = \frac{1}{2}mz'^2 + \frac{1}{2}mz^2$.

$$V = \frac{1}{2}c(\mu z + \rho_0 - l)^2 - mg(\mu z + \rho_0) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = V_0 + \mu V_1 + \mu^2 V_2, \quad (10)$$

где $V_0 = \frac{1}{2}c\rho_0^2 + \frac{1}{2}cl^2 - c\rho_0 l - mg\rho_0 + mg\rho_0 \frac{\varphi^2}{2}$, $V_1 = cz\rho_0 - czl - mgz + mgz \frac{\varphi^2}{2}$, $V_2 = \frac{1}{2}cz^2$.

Из интеграла энергии можно получить выражение для $\dot{\varphi}^2$:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{K}{K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2} = \frac{h - (V_0 + \mu V_1 + \mu^2 V_2)}{K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2}, \quad (11)$$

а из второго уравнения движения (2) с учетом равенств (11) определяем

$$\ddot{\varphi} = \frac{-2\mu \dot{z} \dot{\varphi} (\mu z + \rho_0) - g\varphi (\mu z + \rho_0)}{(\mu z + \rho_0)^2} = -\frac{g\varphi}{\mu z + \rho_0} - \frac{2\mu z'}{\mu z + \rho_0} \cdot \frac{h - V}{\tilde{K}}. \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в первое уравнение (2), получаем после некоторых алгебраических преобразований уравнение для определения траектории нелинейной нормальной формы колебаний $z = z(\varphi)$ в конфигурационном пространстве:

$$(h - V)m((\mu z + \rho_0)(z'' - (z + \rho_0)) - 2\mu z'^2) + \tilde{K} \left((\mu z + \rho_0) \left(c(z + \rho_0 - l) - mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) m z' g \varphi \right) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет особенность на максимальной изоэнергетической поверхности $h = V$, где все скорости обращаются в нуль. Аналитическое продолжение решения на эту поверхность возможно, если выполняются следующие граничные условия [5], [11], [15]:

$$-m z' g \varphi \tilde{K} + c \tilde{K} (z + \rho_0 - l) (\mu z + \rho_0) - mg \tilde{K} (\mu z + \rho_0) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = 0, \quad (14)$$

которые реализуются при амплитудных значениях $\varphi = \varphi_0$, при этом $\dot{\varphi} = 0$.

Решение уравнения (14) разыскивается в виде ряда по степеням малого параметра,

$$z = z(\varphi) = z_0 + \mu z_1 + \dots, \quad (15)$$

где, в свою очередь, z_0 и z_1 представляются рядами по степеням φ , а именно:

$$z_0 = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + \dots; \quad (16)$$

$$z_1 = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 + \dots \quad (17)$$

Подставляя ряды (15)–(17) в уравнение (13) и граничные условия (14), и выделяя вначале слагаемые порядка μ^0 и μ , а затем, группируя слагаемые, стоящие при φ^0 , φ и φ^2 , получаем уравнения для определения коэффициентов рядов (16) и (17). В нулевом приближении по малому параметру, в частности, имеем:

$$\mu^0 : \varphi^0 : \begin{aligned} & 2a_2\rho_0 \left(h - \frac{1}{2}c\rho_0^2 - \frac{1}{2}cl^2 + c\rho_0l + mg\rho_0 \right) + \frac{1}{2}c\rho_0^3(a_0 + \rho_0 - l) - \\ & - \rho_0(a_0 + \rho_0) \left(h - \frac{1}{2}c\rho_0^2 - \frac{1}{2}cl^2 + c\rho_0l + mg\rho_0 \right) - \frac{1}{2}mg\rho_0^3 = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\varphi^1 : \begin{aligned} & 6a_3\rho_0 \left(h - \frac{1}{2}c\rho_0^2 - \frac{1}{2}cl^2 + c\rho_0l + mg\rho_0 \right) - \frac{1}{2}ma_1g\rho_0^2 + \\ & + \frac{1}{2}ca_1\rho_0^3 - a_1\rho_0 \left(h - \frac{1}{2}c\rho_0^2 - \frac{1}{2}cl^2 + c\rho_0l + mg\rho_0 \right) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varphi^2 : \begin{aligned} & \left(h - \frac{1}{2}c\rho_0^2 - \frac{1}{2}cl^2 + cl\rho_0 + mg\rho_0 \right) (12\rho_0a_4 - \rho_0a_2) + \\ & + \frac{1}{2}ca_2\rho_0^3 + \frac{1}{2}mg\rho_0^2(a_0 + \rho_0) - 2mga_2\rho_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия нулевого приближения по малому параметру получаются из равенств (15) при $\mu = 0$. Они имеют следующий вид:

$$mg \left(\frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - 1 \right) - \varphi \left(\frac{1}{2}a_1 + \varphi^2a_2 \right) \right) + \frac{1}{2}c\rho_0(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \rho_0 - l) = 0. \quad (21)$$

Полная энергия системы также раскладывается по малому параметру: $h = h_0 + \mu h_1$. На максимальной изоэнергетической поверхности, где кинетическая энергия обращается в нуль, получаем в нулевом приближении по малому параметру ($\mu = 0$):

$$h_0 = V_0 = \frac{1}{2}c\rho_0^2 + \frac{1}{2}cl^2 - cl\rho_0 - mg\rho_0 + \frac{1}{2}mg\rho_0\varphi_0^2. \quad (22)$$

Равенство (22) связывает энергию нулевого приближения $h = h_0$ и два амплитудных значения $\varphi = \varphi_0$. В рассматриваемой консервативной системе можно либо задавать энергию системы и из соотношения (23) находить амплитудные значения $\varphi = \varphi_0$, либо задавать одну из амплитуд и из (23) находить энергию $h = h_0$ и второе амплитудное значение. Уравнения (18)–(20) и два граничных условия (21) составляют систему для нахождения коэффициентов ряда (16).

Задавая значения параметров системы m , c и l , а также амплитуду колебаний (или энергию системы), из уравнений (18)–(21) можно определить коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , a_3 и a_4 . После получения нулевого приближения z_0 , аналогичным образом можно определить решение первого приближения z_1 в виде ряда по степеням φ . Соответствующее уравнение и граничные условия могут быть получены

из (13) и (14) путем выделения членов порядка μ . Здесь они для краткости не приводятся.

Траектория нормальной формы связанных колебаний в двух приближениях по малому параметру представлена на рис.3. Здесь сплошная кривая — траектория, полученная разложением решения в ряд Тейлора по степеням φ , а пунктирная кривая — проверочный численный расчет.

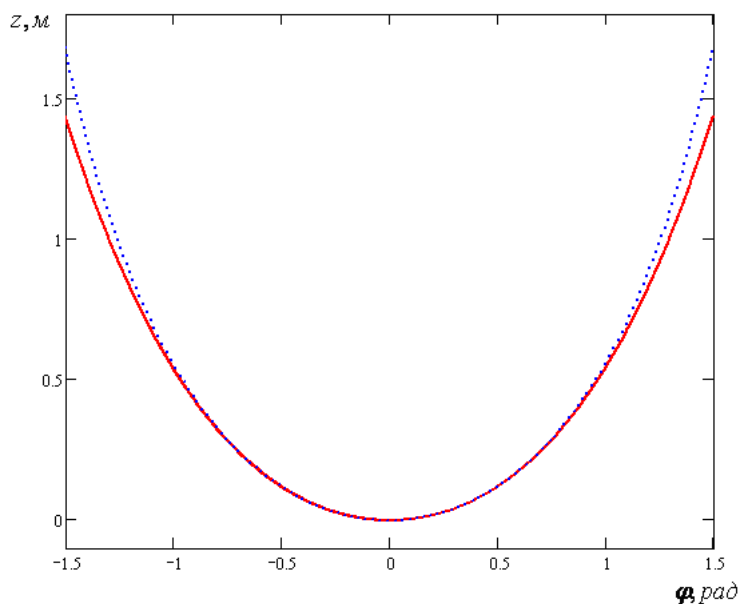


Рис. 3. Траектория нормальной формы связанных колебаний в конфигурационном пространстве.

2.3. Представление формы связанных колебаний в виде ряда по степеням $\cos \varphi$

Другим способом построения траектории формы связанных колебаний является разложения решения в ряд Тейлора по степеням $\cos \varphi$. Такое разложение наиболее эффективно преимущественно для достаточно больших значений угла отклонения массы от положения равновесия. В данном случае траектория представляется в виде:

$$z(\varphi) = z_0 + \mu z_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi + \mu(\beta_0 + \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi) + \dots \quad (23)$$

В отличие от разложений кинетической и потенциальной энергий (9) и (10), здесь не используются разложения тригонометрических функций в ряды по степеням φ . Представим выражения для энергий в таком виде:

$$K = \frac{1}{2} \mu^2 z'^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 (\mu z + \rho_0)^2 = \dot{\varphi}^2 (K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2) \dot{\varphi}^2 \tilde{K},$$

где $\tilde{K} = K_0 + \mu K_1 + \mu^2 K_2$, $K_0 = \frac{1}{2}m\rho_0^2$, $K_1 = mz\rho_0$, $K_2 = \frac{1}{2}mz'^2 + \frac{1}{2}mz^2$.

$$V = \frac{1}{2}c(\mu z + \rho_0 - l)^2 - mg(\mu z + \rho_0) \cos \varphi = V_0 + \mu V_1 + \mu^2 V_2.$$

Здесь $V_0 = \frac{1}{2}c\rho_0^2 + \frac{1}{2}cl^2 - c\rho_0l - mg\rho_0 \cos \varphi$, $V_1 = cz\rho_0 - czl - mgz \cos \varphi$, $V_2 = \frac{1}{2}cz^2$.

Уравнение для определения траекторий в конфигурационном пространстве в данном случае несколько отличается от уравнения (13) и записывается следующим образом:

$$(h - V)m((\mu z + \rho_0)(z'' - (z + \rho_0)) - 2\mu z'^2) + \tilde{K}((\mu z + \rho_0)(c(z + \rho_0 - l) - mg \cos \varphi) - mz'g \sin \varphi) = 0. \quad (24)$$

Граничные условия на максимальной изоэнергетической поверхности имеют следующий вид:

$$-mz'g\tilde{K} \sin \varphi + c\tilde{K}(z + \rho_0 - l)(\mu z + \rho_0) - mg\tilde{K}(\mu z + \rho_0) \cos \varphi = 0. \quad (25)$$

Уравнения для определения коэффициентов ряда (23) получаем, подставляя его в уравнение (24) и граничные условия (25) и выделяя вначале слагаемые порядка μ^0 и μ . Ограничиваясь тремя первыми членами в разложении (23), группируем свободные члены и слагаемые, стоящие при $\cos \varphi$. В нулевом приближении по малому параметру имеем:

$$\mu^0 : const : \quad cl^2(0.5\rho_0 - \alpha_2 + 0.5\alpha_0) + cl\rho_0(2\alpha_2 - \alpha_0 - 1.5\rho_0) + h(2\alpha_2 - \rho_0 - \alpha_0) + c\rho_0^2(\rho_0 + \alpha_0 - \alpha_2) + 0.5mg\rho_0\alpha_1 = 0; \quad (26)$$

$$\cos \varphi : mg\rho_0(3\alpha_2 - \alpha_0 - 1.5\rho_0) + \alpha_1(c\rho_0(1.5\rho_0 - 2l) + cl^2 - 2h) = 0. \quad (27)$$

Граничные условия нулевого приближения получаются из (25) при $\mu = 0$. Они записываются таким образом:

$$\cos \varphi((mg(2\alpha_2 - \rho_0) + c\rho_0\alpha_1) + (c\rho_0\alpha_2 - mg\alpha_1) \cos \varphi) + mg\alpha_1 + c\rho_0(\alpha_0 + \rho_0 - l) = 0; \quad (28)$$

Вычисления в равенстве (28) проводятся при амплитудных значениях $\varphi = \varphi_0$, при этом $\dot{\varphi} = 0$.

Полная энергия системы также раскладывается по малому параметру: $h = h_0 + \mu h_1$. Нулевое приближение здесь вычисляется по формуле:

$$h_0 = V_0 = \frac{1}{2}c\rho_0^2 + \frac{1}{2}cl^2 - c\rho_0l - mg\rho_0 \cos \varphi. \quad (29)$$

Задавая значения параметров системы, а также амплитуду колебаний (или энергию системы), из уравнений (26)–(28) можно определить коэффициенты α_0 , α_1 и α_2 ряда (23). После получения нулевого приближения z_0 , аналогичным образом

можно определить решение первого приближения по малому параметру μ . Эти вычисления здесь не приведены для краткости изложения.

На Рис.4 представлена форма связанных колебаний в конфигурационном пространстве, полученная разложением решения в ряд по степеням $\cos \varphi$ (кривая 1) и в результате численного расчета (кривая 2). Расчет проводился при $m = 0.05$, $l = 0.2$, $c = 5$, $\mu = 0.1$. Из рисунка видно, что расхождения в аналитическом и численном решениях невелики. Использование разложения в ряд Тейлора по степеням $\cos \varphi$ дает хороший результат как для малых значений угла, так и для больших.

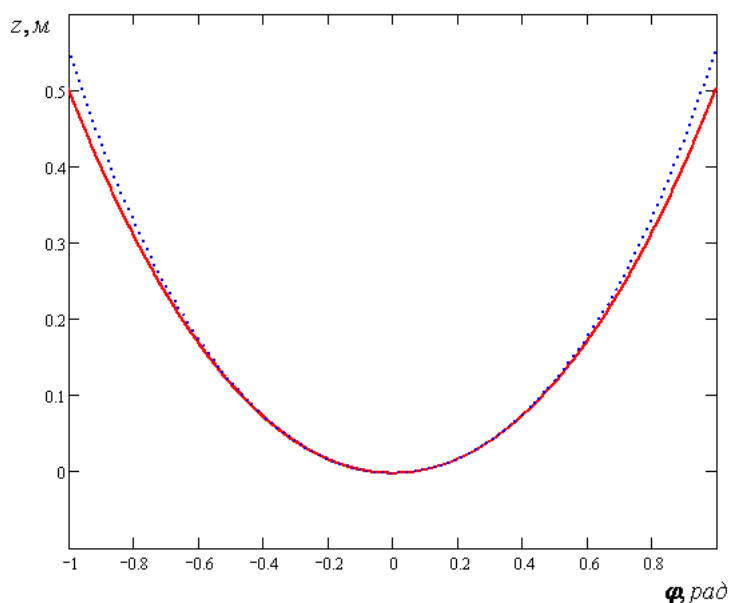


Рис. 4. Траектория нормальной формы связанных колебаний в конфигурационном пространстве.

3. Анализ устойчивости форм колебаний

3.1. Устойчивость формы вертикальных колебаний

Устойчивость формы вертикальных колебаний детально изучалась в литературе. Повторяя эти исследования, вначале проведем анализ устойчивости с использованием приведения уравнения в вариациях к виду уравнения Матье.

В системе координат OXY (Рис.1) уравнения движения маятника имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta = \frac{1 + \gamma + \eta}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - 1 \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma}{1 + \gamma}\xi = \xi \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \gamma + \eta)^2}} - \frac{1}{1 + \gamma} \right] \end{cases} \quad (30)$$

где $\eta = \frac{y}{l}$; $\xi = \frac{x}{l}$; $\gamma = \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{cl}$; $\tau\omega t = \sqrt{\frac{c}{m}}t$. Устойчивость вертикальных движений $\eta = \eta(t)$, $\xi = 0$ определяется вариациями в горизонтальном направлении, то есть, переменной ξ . Линеаризованное уравнение в вариациях имеет вид:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\gamma + \mu \cos \tau}{1 + \gamma + \mu \cos \tau} \xi = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) приводится к виду уравнения Матье, для чего выражение

$$(1 + \gamma + \mu \cos \tau)^{-1}$$

раскладывается в ряд по степеням $\cos \tau$, в ряде Фурье сохраняются два первых слагаемых, а также производится замена $\theta = \tau/2$. После этого уравнение (31) записывается таким образом:

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi \left[\frac{4\gamma}{1 + \gamma} + \frac{4\mu}{(1 + \gamma)^2} \cos 2\theta \right] = 0. \quad (32)$$

Полученное уравнение приводится к следующему стандартному виду:

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi(a + q \cos 2\theta) = 0,$$

где $a = 4\gamma/(1 + \gamma)$; $q = \mu/(4(1 + \gamma)^2)$. Границы областей устойчивости/неустойчивости для уравнения Матье хорошо известны [9]. Для уравнения (32) границы области главного параметрического резонанса выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{4\gamma}{1 + \gamma} &= 1 - \frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} - 8 \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^2 + 8 \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^3 - \frac{8}{3} \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^4 + \dots; \\ \frac{4\gamma}{1 + \gamma} &= 1 + \frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} - 8 \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^2 + 8 \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^3 - \frac{8}{3} \left(\frac{\mu}{4(1 + \gamma)^2} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Более точный метод исследования устойчивости предполагает использование уравнения Хилла. Если использовать уравнения движения (1), то отклонения от вертикальной формы колебаний определяются переменной φ , тогда линеаризованное уравнение в вариациях имеет вид:

$$\rho^2 \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + g\rho\varphi = 0. \quad (33)$$

С учетом того, что на вертикальной форме колебаний $\rho = \rho_0 + z$, причем $z = z_0 \cos(\omega t + \beta) = z_0 \cos \psi$, где $\psi = \omega t + \beta$, $\omega = (c/m)^{1/2}$, уравнение (33) после несложных преобразований может быть представлено следующим образом:

$$(1 - \gamma + z)^2 \frac{1}{2} \ddot{\nu} - \frac{2}{\gamma} z(1 - \gamma + z) \dot{\nu} \sin \psi + (1 - \gamma + z)\nu = 0. \quad (34)$$

Решения, соответствующие границам устойчивости, в соответствии с теорией Флоке-Ляпунова, нужно искать в виде T - и $2T$ -периодических решений, где T — период коэффициентов уравнения (34) [1], [12], [15]:

$$\varphi = a_0 + a_1 \cos \psi + a_2 \cos 2\psi + a_3 \cos 3\psi + \dots; \quad (35)$$

$$\varphi = a_0 + a_1 \cos \frac{\psi}{2} + a_2 \cos \psi + a_3 \cos \frac{3\psi}{2} + \dots \quad (36)$$

Подставляя разложения (35) и (36) поочередно в уравнение (34) и группируя члены при различных гармониках, получаем системы однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов Фурье, которые имеют ненулевые решения, если определители систем (определители Хилла), обращаются в нуль. Ограничиваясь определителями четвертого порядка, получаем в результате условия на коэффициенты системы, которые и определяют границы областей устойчивости и неустойчивости формы продольных колебаний маятника. На Рис. 5 представлены границы области основного параметрического резонанса, полученные с использованием уравнений Матье и Хилла, а также с помощью проверочного численного расчета. Очевидно, что метод определителей Хилла, дает более точный результат в нахождении границ областей устойчивости и неустойчивости продольных колебаний системы.

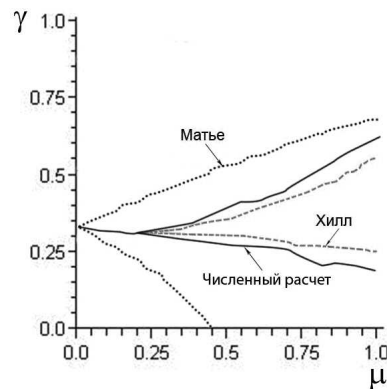


Рис. 5. Границы областей устойчивости/неустойчивости продольных колебаний системы.

3.2. Анализ устойчивости нормальной формы связанных колебаний системы

Устойчивость формы связанных колебаний исследована с использованием численно-аналитического критерия, который является следствием классического определения устойчивости и который обоснован в работах [13], [12]. При этом текущие значения возмущений сравниваются с начальными значениями. Необходимое условие устойчивости движения имеет вид:

$$\sqrt{(\Delta z(t))^2 + (\Delta \varphi(t))^2} \leq \theta \sqrt{(\Delta z(0))^2 + (\Delta \varphi(0))^2}, \quad (37)$$

где $\Delta z(t) = z(t) - z_0$, $\Delta \varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_0$, $\Delta z(0) = \frac{z_0}{k}$, $\Delta \varphi(0) = \frac{\varphi_0}{k}$. Здесь z_0 и φ_0 — начальные значения растяжения пружины и угла отклонения от положения равновесия. Имеется определенный произвол в выборе постоянных θ и k , что обсуждается в работах [13], [12]. Принимаем $\theta = 10$, $k = 100$. Нарушение условия (37) на этапе интегрирования системы указывает на неустойчивость движения. Числовой расчет выполняется в точках некоторой сетки в пространстве параметров системы. Он проводится до тех пор, пока границы областей устойчивости/неустойчивости в выбранном масштабе сетки в пространстве параметров системы не стабилизируются. Границы областей устойчивости для второй формы колебаний построены на Рис.6 на плоскости параметров $\omega^2 = (\omega_1/\omega_2)^2$ и A (амплитуда угловых колебаний). Для определения начальных значений растяжения пружины, которые используются в критерии (37), в случае малых колебаний был использован расчет формы связанных колебаний, представленной в виде разложения в ряд Тейлора по степеням φ ; для больших значений A было использовано разложение формы в ряд по степеням $\cos \varphi$, так как линеаризованная модель для этого непригодна. На Рис.6 показаны границы областей устойчивости/неустойчивости этой формы колебаний.

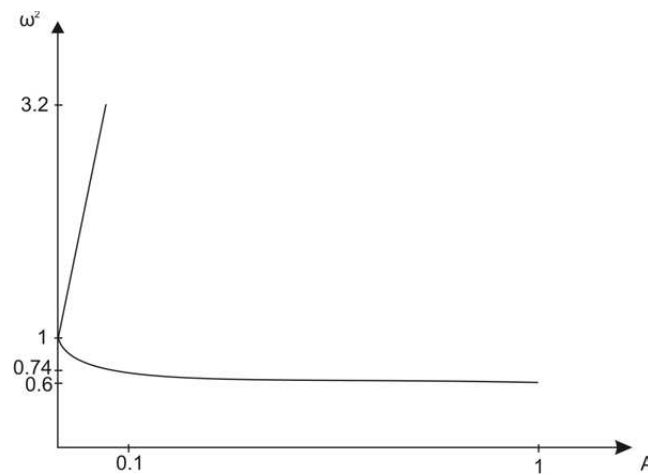


Рис. 6. Граница области устойчивости/неустойчивости формы связанных колебаний.

Неустойчивые движения наблюдаются внутри области, образованной указанными границами, а за пределами границ — устойчивые. Нетрудно заметить, что с увеличением амплитуды угловых колебаний область неустойчивых колебаний расширяется, при этом внутри области форма связанных колебаний теряет устойчивость, что влечет за собой переход к другим формам колебаний. Эти решения ответвляются от формы смешанных колебаний там, где форма смешанных колебаний теряет устойчивость. При ветвлении появляется пара новых форм движений. Траектории этих форм колебаний изображены на Рис.7 для $(\omega_1/\omega_2)^2 = 0.2$ и $A = 0.3$ рад.

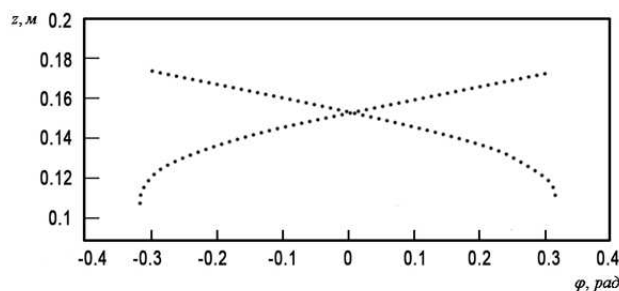


Рис. 7. Траектории движений системы в области неустойчивости формы связанных колебаний.

4. Выводы

В работе проведено аналитическое исследование нелинейных нормальных форм колебаний пружинного маятника с использованием нескольких асимптотических методов. Точность аналитического решения проверена численными процедурами. Удалось построить с хорошей точностью связанную форму колебаний не только для малых, но и для больших углов отклонения маятника. С использованием аналитических и численных процедур также построены границы областей устойчивости нормальных форм колебаний на плоскости параметров системы.

Список цитируемых источников

1. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем / О. Блакьер. — Москва: Мир, 1969. — 400 с.
2. *Вибрации в технике.* — Т. 6 /Под ред. Фролова К.В. — Москва: Машиностроение, 1995. — 456 с.
3. *Витт А.А.* Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем / А.А. Витт, Г.С. Горелик. // Журн. Техн. Физики. — 1933. — Т. 3. — №2-3 — С. 294–307.
4. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. — Москва: Гостехтеориздат, 1956. — 492 с.
5. *Маневич Л.И.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем / Л.И. Маневич, Ю.В. Михлин, В.Н. Пилипчук. — Москва: Наука, 1989. — 216 с.
6. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений / А.Х. Найфэ. — Москва: Мир, 1984. — 536 с.
7. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах / Э. Скотт. — М.: Советское Радио, 1977.
8. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний / В.М. Старжинский. — Москва: Наука, 1977. — 256 с.
9. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. — М.: Мир, 1968. — 432 с.
10. *Cuvalci O.* Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory / O. Cuvalci, A. Ertas. // Trans. ASME. Journal of Vibrations and Acoustics. — 1996. — 118. — P. 558–566.

11. *Mikhlin Yu.* Normal vibrations of a general class of conservative oscillators / Yu. Mikhlin. // *Nonlinear Dynamics*. — 1996. — V. 11. — P. 1–16.
12. *Mikhlin Yu.V.* Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions / Yu. Mikhlin, G. Manucharyan. // *Meccanica*. — 2006. — V. 41. — P. 253–267.
13. *Mikhlin Yu.V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions / Yu. Mikhlin, T. Shmatko, G. Manucharyan. // *Computers and Structures*. — 2004. — V. 82. — P. 2733–2742.
14. *Nayfeh A.H.* *Nonlinear oscillations* / A.H. Nayfeh, D.T. Mook. — New York: Wiley, 1979. — 704 p.
15. *Vakakis A.F.* Normal modes and localization in nonlinear systems / A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Yu.V. Mikhlin, V.N. Pilipchuk, A.A. Zevin. // New York: Wiley Interscience, 1996. — 552 pp.
16. *Wang F.* Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system / F. Wang, A. Bajaj, K. Kamiya. // *Nonlinear Dynamics*. — 2005. — V. 42, № 3. — P. 233–265.
17. *Warminski J.* Regular and chaotic motions of an autoparametric real pendulum system with the use of a MR damper / J. Warminski, K. Kecik. // *Modeling, simulation and control of nonlinear engineering dynamical systems* / Editor J. Awrejcewicz. Springer. — 2009. — P. 267–276.

Получена 12.11.2009