

УДК 539.3

Осесимметрична мішана задача термопружності для багат шарової основи

І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко

Запорізький національний університет,

Запоріжжя, 69063. E-mail: velichkoig@gmail.com, tig81@mail.ru

Анотація. Запропоновано спосіб визначення термо-напружено-деформівного стану багат шарової основи, в круговій області границі якої якої відома температура, а інша частина межі теплоізолювана. Прикладені навантаження викликають осесимметричну деформацію основи. Розв'язок шукається за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля, а задоволення умов сумісності деформацій загальної границі сусідніх шарів забезпечується використанням методу функцій податливості. Отримано інтегральне рівняння Фредгольма для визначення невідомої функції теплового потоку в області дії температури, після знаходження якого отримаємо основну граничну задачу, метод розв'язання якої відомий. Чисельний приклад наведено для три шарової основи. Побудовані графіки нормальних напружень для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів.

Ключові слова: термопружність, багат шарова основа, закон Дюамеля-Неймана, інтегральне рівняння.

1. Постановка проблеми та огляд публікацій

Під терміном "термопружна багат шарова основа" будемо розуміти пружну багат шарову основу, яка зазнає термопружної деформації. Багат шарова основа - це пакет, складений зі скінченої кількості шарів, який лежить на абсолютно жорсткому півпросторі. Кількість пружних шарів в основі дорівнює n . Шари нумеруються зверху вниз. Усі шари є однорідними, невагомими та ізотропними. Кожен шар характеризується товщиною h , двома пружними константами E, ν , коефіцієнтом теплопровідності k_T та коефіцієнтом теплового розширення α_T .

На частині верхньої межі, що обмежена колом, відома температура, інша частина цієї межі теплоізолювана (тобто тепловий потік дорівнює нулю). Прикладені до верхньої межі навантаження та задані температури такі, при яких основа зазнає осесимметричну деформацію. Ставиться задача про визначення напружень, переміщень і температури для усіх точок основи в рамках незв'язної термопружності.

Багат шаровими основами моделюються дорожні одяги, підлоги промислових будинків, аеродромні покриття і тому подібне. Під час розрахунку подібних конструкцій на міцність потрібно також враховувати, окрім механічних, і температурні ефекти.

Розв'язанню задач термопружності присвячені такі фундаментальні дослідження як, наприклад, [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Однак в цих роботах автори обмежуються випадком або півпростору, або шару. Деформація істотно багат шарових основ

під впливом температури досліджувалися різними методами в роботах українських вчених таких як Алтухов Є.В., Шевченко В.П. [7, 8], Процюк Б.В. [9, 10], Блажевський С.Г., Ленюк М.П. [11] та інших. Цій задачі присвячені й публікації іноземних вчених Chao Ching-Kong, Gao B., Bhowmick R., Das Bikash Ranjan, Carrera Erasmo, Hsueh C.H. [12, 13, 14, 15] та інших. У данній роботі для знаходження невідомих величин використовується метод функцій податливості, який зарекомендував себе як надійний спосіб отримання достовірних чисельних результатів для задач теорії пружності.

Розв'язок основної граничної задачі теорії термопружності для багат шарової основи з будь-якою скінченною кількістю шарів у випадку плоскої деформації було отримано авторами у публікації [16], а для просторового випадку - у статті [17]. Розв'язок мішаної граничної задачі для термопружної багат шарової основи у випадку плоскої деформації розглянуто у роботі [18]. У данній статті розглянуті методи перенесені на випадок осесиметричної деформації.

2. Основна частина

У кожному шарі основи введемо локальну циліндричну систему координат так, як показано на рисунку 1.

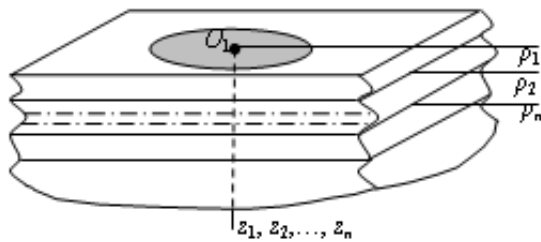


Рис. 1. Тришарова основа

Задача зводиться до розв'язання наступної системи диференціальних рівнянь для кожного з шарів [6]:

$$\Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial \rho}, \quad (1)$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\Delta T = 0. \quad (3)$$

Тут $u = u_\rho$, $w = u_z$ - компоненти вектора переміщення, $e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$ - об'ємна деформація, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Розв'язки повинні задовільняти умовам зчеплення шарів:

$$u_k(\rho; h_k) = u_{k+1}(\rho; 0), w_k(\rho; h_k) = w_{k+1}(\rho; 0),$$

$$\sigma_{zk}(\rho; h_k) = \sigma_{zk+1}(\rho; 0), \tau_{\rho zk}(\rho; h_k) = \tau_{\rho zk+1}(\rho; 0),$$

$$T_k(\rho; h_k) = T_{k+1}(\rho; 0), k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho; h_k) = k_{Tk+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(\rho; 0), k = \overline{1; n-1}.$$

Граничні умови мають вигляд:

$$T_1(\rho; 0) = f(\rho)$$

при $\rho \leq R$,

$$\frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho; 0) = 0$$

при $\rho > R$,

$$\sigma_{z1}(\rho; 0) = \sigma(\rho), \tau_{\rho z1}(\rho; 0) = \tau(\rho).$$

Тут R - радіус круга, в якому розподілена температура, $f(\rho)$, $\sigma(\rho)$, $\tau(\rho)$ - задані функції.

Потрібно визначити потік в колі, де відома температура. Після цього задача буде зведена до основної граничної задачі теорії термопружності. У роботі [17] за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є наведено спосіб розв'язання задачі у випадку просторової деформації. У випадку осесиметричної деформації формули спрощуються і вперше наводяться в данній статті.

3. Знаходження потоку всередині заданної області

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (1)-(3) будемо шукати за допомогою перетворення Ханкеля по змінній ρ (вважаємо, що всі функції задовільняють умовам існування інтегрального перетворення):

$$\bar{f}^\theta(p) = \int_0^{+\infty} \rho f(\rho) J_\theta(p\rho) d\rho,$$

де $p \in [0; +\infty)$ - параметр інтегрального перетворення. Оберненим до нього буде перетворення

$$f(\rho) = \int_0^{+\infty} p \bar{f}^\theta(p) J_\theta(p\rho) dp,$$

До рівняння (1) застосуємо перетворення Ханкеля першого порядку (тобто беремо $\theta = 1$), а до рівнянь (2), (3) - нульового порядку (у цьому випадку $\theta = 0$). Тоді у просторі трансформант Ханкеля рівняння (1)-(3) для кожного з шарів основи набувають вигляду [19]:

$$(1 - 2\nu) \frac{d^2 U}{dz^2} - 2(1 - \nu)p^2 U - p \frac{dW}{dz} = -2(1 + \nu)\alpha_T p \bar{T},$$

$$2(1 - \nu) \frac{d^2 W}{dz^2} - (1 - 2\nu)p^2 W + p \frac{dU}{dz} = 2(1 + \nu)\alpha_T \frac{d\bar{T}}{dz},$$

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - p^2 \bar{T} = 0,$$

де $U(p; z) = \bar{u}^1(p; z)$, $W(p; z) = \bar{w}^0(p; z)$, $\bar{T}(p; z) = \bar{T}^0(p; z)$ - трансформанти Ханкеля функцій переміщень та температури відповідно.

Уведемо допоміжні функції шару, пов'язані з трансформантами Ханкеля температурних та механічних величин на його верхній межі:

$$\alpha(p) = \bar{\sigma}_z(p; 0), \delta(p) = \bar{\tau}_{\rho z}(p; 0),$$

$$\beta(p) = \frac{Ep}{2(1+\nu)}W(p;0), \quad \gamma(p) = \frac{Ep}{2(1+\nu)}U(p;0).$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}(p;z)}{dz} \Big|_{z=0}, \quad \eta(p) = \bar{T}(p;0).$$

Тут $\bar{\sigma}_z(p;z) = \bar{\sigma}_z^0(p;z)$, $\bar{\tau}_{\rho z}(p;z) = \bar{\tau}_{\rho z}^1(p;z)$ - трансформанти Ханкеля.

Наведемо вирази для трансформант Ханкеля усіх величин, що визначають термо-напружено-деформівний стан шару, через допоміжні функції цього шару:

$$\begin{aligned} U(p;z) &= \frac{1+\nu}{2Ep(1-\nu)} \{pz \operatorname{sh} pz \alpha + 2[(1-2\nu) \operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \beta + \\ &+ 2[pz \operatorname{sh} pz + 2(1-\nu) \operatorname{ch} pz] \gamma + [(3-4\nu) \operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \delta - \\ &- E\alpha_T pz \operatorname{sh} pz \eta - E\alpha_T [pz \operatorname{ch} pz - \operatorname{sh} pz] \varepsilon\}, \\ W(p;z) &= \frac{1+\nu}{2Ep(1-\nu)} \{[(3-4\nu) \operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz] \alpha + 2[2(1-\nu) \operatorname{ch} pz - pz \operatorname{sh} pz] \beta + \\ &+ 2[(1-2\nu) \operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz] \gamma - pz \operatorname{sh} pz \delta + E\alpha_T [\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \eta + E\alpha_T pz \operatorname{sh} pz \varepsilon\}, \\ \bar{\sigma}_z(p;z) &= \frac{1}{2(1-\nu)} \{[2(1-\nu) \operatorname{ch} pz - pz \operatorname{sh} pz] \alpha + 2[\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz] \beta - 2pz \operatorname{sh} pz \gamma - \\ &- [(1-2\nu) \operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \delta + E\alpha_T pz \operatorname{sh} pz \eta + E\alpha_T [pz \operatorname{ch} pz - \operatorname{sh} pz] \varepsilon\}, \\ \bar{\tau}_{\rho z}(p;z) &= \frac{1}{2(1-\nu)} \{[pz \operatorname{ch} pz - (1-2\nu) \operatorname{sh} pz] \alpha + 2pz \operatorname{sh} pz \beta + 2[\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \gamma + \\ &+ [pz \operatorname{sh} pz + 2(1-\nu) \operatorname{ch} pz] \delta - E\alpha_T [\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz] \eta - E\alpha_T pz \operatorname{sh} pz \varepsilon\}, \\ \bar{T}(p;z) &= \operatorname{ch} pz \eta + \operatorname{sh} pz \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, задача звелась до знаходження шістки допоміжних функцій для кожного із шарів.

З умов спряження шарів одержуємо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1}{2(1-\nu_k)} \{[2(1-\nu_k) \operatorname{ch} ph_k - ph_k \operatorname{sh} ph_k] \alpha_k + 2[\operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k] \beta_k - \\ &- 2ph_k \operatorname{sh} ph_k \gamma_k - [(1-2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \delta_k + \\ &+ E_k \alpha_{Tk} ph_k \operatorname{sh} ph_k \eta_k + E_k \alpha_{Tk} [ph_k \operatorname{ch} ph_k - \operatorname{sh} ph_k] \varepsilon_k\}, \\ \beta_{k+1} &= \frac{E_{k+1}(1+\nu_k)}{4E_k(1+\nu_{k+1})(1-\nu_k)} \{[(3-4\nu_k) \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k] \alpha_k + \\ &+ 2[2(1-\nu_k) \operatorname{ch} ph_k - ph_k \operatorname{sh} ph_k] \beta_k + 2[(1-2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k] \gamma_k - \\ &- ph_k \operatorname{sh} ph_k \delta_k + E_k \alpha_{Tk} [\operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \eta_k + E_k \alpha_{Tk} ph_k \operatorname{sh} ph_k \varepsilon_k\}, \\ \gamma_{k+1} &= \frac{E_{k+1}(1+\nu_k)}{4E_k(1+\nu_{k+1})(1-\nu_k)} \{ph_k \operatorname{sh} ph_k \alpha_k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[(1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \beta_k + 2[ph_k \operatorname{sh} ph_k + 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k] \gamma_k + \\
& + [(3 - 4\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \delta_k - E_k \alpha_{Tk} ph_k \operatorname{sh} ph_k \eta_k - E_k \alpha_{Tk} [ph_k \operatorname{ch} ph_k - \operatorname{sh} ph_k] \varepsilon_k \}, \\
\delta_{k+1} &= \frac{1}{2(1 - \nu_k)} \{ [ph_k \operatorname{ch} ph_k - (1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k] \alpha_k + 2ph_k \operatorname{sh} ph_k \beta_k + \\
& + 2[\operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \gamma_k + [ph_k \operatorname{sh} ph_k + 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k] \delta_k - \\
& - E_k \alpha_{Tk} [\operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k] \eta_k - E_k \alpha_{Tk} ph_k \operatorname{sh} ph_k \varepsilon_k \}, \\
\eta_{k+1} &= \operatorname{ch} ph_k \eta_k + \operatorname{sh} ph_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{k_{Tk}}{k_{Tk+1}} [\operatorname{sh} ph_k \eta_k + \operatorname{ch} ph_k \varepsilon_k].
\end{aligned}$$

Отже, якщо нам відома шістька допоміжних функцій α , β , γ , δ , η , ε будь-якого шару, наприклад першого, то ми можемо визначити, користуючись вище наведеними формулами, допоміжні функції для будь-якого іншого шару.

Можна показати, що для кожного шару ці функції не є незалежними, а пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\bar{\beta}_k = \tilde{A}_k \bar{\alpha}_k + \tilde{D}_k \eta_k, \quad \varepsilon_k = -r_k \eta_k. \quad (5)$$

Тут уведено наступні позначення: $\bar{\alpha}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \delta_k \end{pmatrix}$, $\bar{\beta}_k = \begin{pmatrix} \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$. Елементи матриць \tilde{A}_k , \tilde{D}_k і функція r_k у цих виразах називаються функціями податливості і їх можна обчислити за рекурентними співвідношеннями, метод отримання яких описано у [17]:

$$\tilde{A}_k = \left(\tilde{A}_{k+1} N_k - Q_k \right)^{-1} \left(L_k - \tilde{A}_{k+1} M_k \right), \quad r_k = \frac{r_{k+1} k_{Tk+1} \operatorname{ch} ph_k + k_{Tk} \operatorname{sh} ph_k}{r_{k+1} k_{Tk+1} \operatorname{sh} ph_k + k_{Tk} \operatorname{ch} ph_k},$$

$$\tilde{D}_k = \left(\tilde{A}_{k+1} N_k - Q_k \right)^{-1} \left[V_k - \tilde{A}_{k+1} J_k - \tilde{D}_{k+1} (\operatorname{ch} ph_k - r_k \operatorname{sh} ph_k) \right].$$

Тут

$$\begin{aligned}
N_k &= \frac{1}{1 - \nu_k} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k & -ph_k \operatorname{sh} ph_k \\ ph_k \operatorname{sh} ph_k & \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k \end{pmatrix}, \\
Q_k &= 2\Lambda_k \begin{pmatrix} 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k - ph_k \operatorname{sh} ph_k & (1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k \\ (1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k & ph_k \operatorname{sh} ph_k + 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k \end{pmatrix}, \\
L_k &= \Lambda_k \begin{pmatrix} (3 - 4\nu_k) \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k & -ph_k \operatorname{sh} ph_k \\ ph_k \operatorname{sh} ph_k & (3 - 4\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k \end{pmatrix}, \\
M_k &= \frac{1}{2(1 - \nu_k)} \begin{pmatrix} -ph_k \operatorname{sh} ph_k + 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k & -(1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k \\ -(1 - 2\nu_k) \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k & ph_k \operatorname{sh} ph_k + 2(1 - \nu_k) \operatorname{ch} ph_k \end{pmatrix}, \\
V_k &= \frac{E_{k+1}(1 + \nu_k) \alpha_{Tk}}{4(1 + \nu_{k+1})(1 - \nu_k)} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} ph_k + ph_k \operatorname{ch} ph_k - r_k ph_k \operatorname{sh} ph_k \\ -ph_k \operatorname{sh} ph_k - r_k (\operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k) \end{pmatrix}, \\
J_k &= \frac{E_k \alpha_{Tk}}{2(1 - \nu_k)} \begin{pmatrix} ph_k \operatorname{sh} ph_k - r_k (ph_k \operatorname{ch} ph_k - \operatorname{sh} ph_k) \\ -\operatorname{sh} ph_k - ph_k \operatorname{ch} ph_k + r_k ph_k \operatorname{sh} ph_k \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = \frac{E_{k+1}(1 + \nu_k)}{4E_k(1 + \nu_{k+1})(1 - \nu_k)}.
\end{aligned}$$

Обчислення починаються з функцій податливості нижнього пружного шару. Якщо він має скінчену товщину, то застосовуються формули

$$\tilde{A}_n = -Q_n^{-1}L_n, \tilde{D}_n = -Q_n^{-1}V_n, r_n = \operatorname{cth} ph_n.$$

При обчисленні по цим формулам можна покласти, що $E_{n+1} = 1$, $\nu_{n+1} = 0$, так як ці величини у процесі обчислення скоротяться. Якщо ж нижній шар є пружним півпростором, то

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} -(1 - \nu_n) & \frac{1-2\nu_n}{2} \\ \frac{1-2\nu_n}{2} & -(1 - \nu_n) \end{pmatrix}, \tilde{D}_n = -\frac{E_n \alpha_{Tn}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r_n = 1.$$

Методом математичної індукції можна довести, що $\lim_{p \rightarrow \infty} r_1(p) = 1$ і це дає змогу друге із співвідношень (5) записати у вигляді:

$$\eta_1(p) = -(1 - \tilde{d}_1(p))\varepsilon_1(p), \quad (6)$$

де функція $\tilde{d}_1(p)$ - так звана модифікована функція податливості першого шару багат шарової основи, яка задовільняє умові: $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{d}_1(p)e^{ph_1} = 0$. Її можна обчислити, якщо користуватися рекурентними формулами

$$\tilde{d}_k = \frac{\left(k_{Tk+1} - k_{Tk} + k_{Tk}\tilde{d}_{k+1}\right) e^{-ph_k}}{k_{Tk+1} \operatorname{ch} ph_k + k_{Tk} \operatorname{sh} ph_k (1 - \tilde{d}_{k+1})},$$

починаючи з функції $\tilde{d}_n(p) = \frac{e^{-ph_n}}{\operatorname{ch} ph_n}$.

Підставивши (6) в останнє рівняння (4), отримаємо вираз трансформанти температури першого шару:

$$\bar{T}_1(p; z) = -e^{-pz}\varepsilon_1(p) + \operatorname{ch} pz\tilde{d}_1(p)\varepsilon_1(p).$$

Це дає змогу записати вираз для температури в першому шарі:

$$T_1(\rho; z) = \int_0^{+\infty} p\bar{T}_1(p; z)J_0(p\rho)dp = \int_0^{+\infty} p \left(-e^{-pz}\varepsilon_1(p) + \operatorname{ch} pz\tilde{d}_1(p)\varepsilon_1(p)\right) J_0(p\rho)dp. \quad (7)$$

Із означення функції $\varepsilon_1(p)$ випливає, що

$$\varepsilon_1(p) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} s \left(\frac{\partial T_1(s; z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) J_0(ps)ds = \frac{1}{p} \int_0^R s\varphi(s)J_0(ps)ds.$$

Було враховано той факт, що при $\rho > R$ верхня межа багат шарової основи теплоізолювана, тобто $\frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho; z)|_{z=0} = 0$ та введено позначення $\varphi(\rho) = \frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho; z)|_{z=0}$, $0 \leq \rho \leq R$.

Для знаходження температури на верхній межі першого шару підставимо $z = 0$ в (7) і отримаємо інтегральне рівняння відносно невідомого потоку в області дії температури

$$T_1(\rho; 0) = f(\rho) = - \int_0^R s\varphi(s)W_{00}^0(\rho; s)ds + \int_0^R s\varphi(s)\lambda(\rho; s)ds, \quad (8)$$

де $W_{00}^0(\rho; s) = \int_0^\infty J_0(ps)J_0(p\rho)dp$ - інтеграл Вебера-Соніна, $\lambda(\rho; s) = \int_0^\infty \tilde{d}_1(p)J_0(ps)J_0(p\rho)dp$.

Перейдемо до нових змінних t та $\bar{\rho}$:

$$t = \frac{s}{R}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{R}.$$

Враховуючи те, що $W_{00}^0(R\bar{\rho}; Rt) = \frac{W_{00}^0(\bar{\rho}; t)}{R}$ та позначивши $\Phi(t) = R\varphi(Rt)$, $F(\bar{\rho}) = f(R\bar{\rho})$, зведемо рівняння (8) до вигляду:

$$- \int_0^1 t\Phi(t)W_{00}^0(\bar{\rho}; t)dt + R \int_0^1 t\Phi(t)\lambda(R\bar{\rho}; Rt)dt = F(\bar{\rho}). \quad (9)$$

Зазначимо, що функція $\lambda(R\bar{\rho}; Rt)$ є регулярною.

Наближений розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^l \frac{m_{2k}}{\sqrt{1-t^2}} P_{2k}(\sqrt{1-t^2}). \quad (10)$$

Тут m_{2k} - невідомі коефіцієнти, $P_{2k}(x)$ - поліноми Лежандра. Ці поліноми ортогональні на відрізку $(0; 1)$ з вагою 1 і для них виконуються такі спектральні співвідношення [20]:

$$\int_0^1 \frac{tP_{2s}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}} W_{00}^0(x; t)dt = \frac{\pi (2s-1)!!^2}{2 (2s)!!^2} P_{2s}(\sqrt{1-x^2}). \quad (11)$$

Підставимо вираз (10) в інтегральне рівняння (9) з урахуванням співвідношення (11) матимемо

$$\sum_{k=0}^l m_{2k} \frac{\pi (2k-1)!!^2}{(2k)!!^2} P_{2k}(\sqrt{1-\bar{\rho}^2}) = F(\bar{\rho}).$$

Для знаходження коефіцієнтів m_{2k} візьмемо $l+1$ значення $\bar{\rho}$ з інтервалу $(0; 1)$. Отримаємо систему

$$\sum_{k=0}^l m_{2k} A_{2ki} = \chi_i.$$

Було введено позначення:

$$A_{2ki} = \frac{(2k-1)!!^2}{(2k)!!^2} P_{2k} \left(\sqrt{1 - \bar{\rho}_i^2} \right), \quad \chi_i = \frac{2}{\pi} F(\bar{\rho}_i).$$

Розв'язавши останню систему лінійних рівнянь, наближено визначаємо невідому функцію потоку на ділянці $0 \leq \rho \leq R$ за формулою:

$$\varphi(s) = \frac{1}{R} \Phi \left(\frac{s}{R} \right) = \sum_{k=0}^l \frac{m_{2k}}{\sqrt{R^2 - s^2}} P_{2k} \left(\frac{\sqrt{R^2 - s^2}}{R} \right).$$

Таким чином, можна визначити допоміжні функції шару и обчислити трансформанти переміщень, напружень і температури у будь-якій точці основи.

4. Чисельний приклад

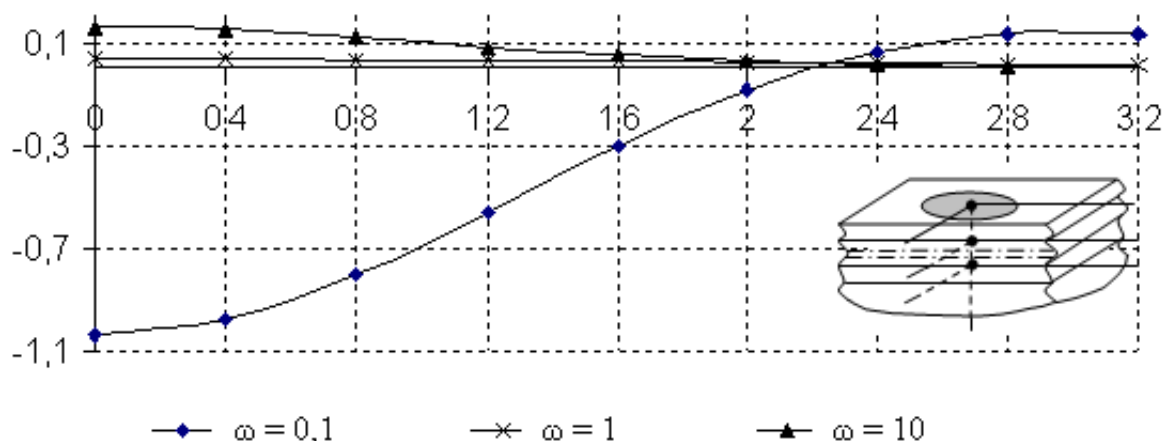
Розглянемо, як впливає зміна коефіцієнта теплового розширення середнього шару тришарової основи на розподіл нормальних напружень на загальній межі першого та другого шарів.

Розглянемо основу, яка складається з трьох шарів, що зчеплені з абсолютно жорстким півпростором. Усі лінійні розміри відносимо до радіусу кола, усередині якого задана температура. Усі шари основи мають однакову товщину $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, однакові модулі Юнга $E_1 = E_2 = E_3$, однакові коефіцієнти Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ та теплопровідності $k_{T1} = k_{T2} = k_{T3}$, і відрізняються лише коефіцієнтами теплового розширення $\alpha_{T1} = \alpha_{T3} = \omega \alpha_{T1}$. Усередині кола радіуса R задана температура, за його межами поверхня теплоізолювана. Зовнішніх сил не прикладено. Тобто граничні умови задачі мають вид:

$$T_1(\rho; 0) = T_0, \quad \rho \in D, \quad D : 0 \leq \rho \leq 1, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho; 0) = 0, \quad \rho \notin D,$$

$$\sigma_{z1}(\rho; 0) = \tau_{\rho z1}(\rho; 0) = 0.$$

На рисунку 2 наведено нормальні напруження $\frac{2(1+\nu_1)\sigma_z(\rho; 1)}{\alpha_{T1}T_0E_1}$ на спільній межі верхнього та середнього шарів. Розглянуто випадки, коли $\alpha_{T1} = \alpha_{T3}$ і $\alpha_{T2} = \omega \alpha_{T1}$ при $\omega = 0, 1; 1; 10$.

Рис. 2. Напруження $\frac{2(1+\nu_1)\sigma_z(\rho;1)}{\alpha T_1 T_0 E_1}$

Як можна побачити із графіків, найбільші нормальні напруження в області під зоною нагріву виникають тоді, коли коефіцієнт теплового розширення другого шару значно менший, ніж сусідніх шарів. І у цьому випадку нормальні напруження є стискаючими.

Перелік цитованих джерел

1. *Подстригач Я.С.* Термоупругость тел неоднородной структуры / Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
2. *Вигак В.М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями / Вигак В.М. — К.: Наук. думка, 1988. — 312 с.
3. *Григолюк Э.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. — К.: Наук. думка, 1979. — 364 с.
4. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости / Карнаухов В.Г. — К.: Наук. думка, 1982. — 258 с.
5. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости / Коваленко А.Д. — К.: Наук. думка, 1970. — 307 с.
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости / Витольд Новацкий; пер. с польск. В.И. Даниловской. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 364 с.
7. *Алтухов Е.В.* Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транслопных пластин / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. мех. (Киев). — 2003. — № 37. — С. 8-13.
8. *Алтухов Е.В.* Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транслопных термоупругих пластинах / Е.В. Алтухов, В.П. Шевченко // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 49-53.
9. *Процюк Б.В.* Метод функций Грина в осесимметричных задачах пружности та термопружности кусково-однородных ортотропных тел / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — 43, № 1. — С. 94-101.

10. *Процюк Б.В.* Тривимірні статичні та квазістатичні задачі термопружності для шаруватих тіл із плоско паралельними границями / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — 46, № 2. — С.96-106.
11. *Блажеєвський С.Г.* Термопружний стан багатошарових симетричних тіл / С.Г. Блажеєвський, М.П.Ленюк. — К.: Ін-т математики НАН України, 2000. — 130 с.
12. *Chao Ching-Kong.* Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries / Chao Ching-Kong, B. Gao // Int. J. Solids and Struct. — 2001. — 38, № 34-35. — P. 5975-5994.
13. *Bhowmick R.* Steady-state thermal stresses in an infinite elastic medium containing an annular crack / R. Bhowmick, Das Bikash Ranjan // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. — 1997. — 107, 1. — P. 71-87.
14. *Carrera Erasmo.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / Carrera Erasmo // Appl. Mech. Rev. — 2003. — 56, № 3. — P. 287-308.
15. *Hsueh C.H.* Thermal stresses in elastic multilayer systems / C.H. Hsueh // Thin Solid Films. — 2002. — Vol. 418, Is. 2. — P. 182-188.
16. *Величко І.Г.* Плоска термопружна деформація багатошарової основи / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. — 2004. — Вип. 8, т. 1. — № 6. — С. 154-161.
17. *Величко І.Г.* Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. — 2004. — Вип. 8, т. 2. — № 6/2. — С. 36-43.
18. *Ткаченко І.Г.* Двовимірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки і математики. — 2005. — Вип. 3. — С.70-78.
19. *Приварников А.К.* Двумерные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований: Метод. разработка / Приварников А.К. — Запорожье, 1990. — 85 с.
20. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Попов Г.Я. — К. - Одесса: Головное изд-во издат. объединения "Вища школа 1982. — 168 с.

Получена 01.03.2009