Динамические системы, вып. 26 (2009), 43–50

УДК 517.98

К вопросу о доминантной эргодической теореме в классах Зигмунда измеримых функций на полуоси

М.А. Муратов, Ю.С. Пашкова

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: mustafa_muratov@mail.ru*

Аннотация. В настоящей работе доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в классах Зигмунда измеримых функций на положительной полуоси. Классы Зигмунда являются пространствами Орлича, построенными по функциям Орлича специального вида. При исследовании используется техника симметричных пространств измеримых функций на пространстве с бесконечной мерой.

Ключевые слова: доминантная эргодическая теорема, пространства Орлича, классы Зигмунда.

1. Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [5], [10] — [12], [15] — [17]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема, которая рассматривалась Г.Харди и Д.Литлвудом [9] для трансляций, Н.Винером [16] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [7] для положительных сжатий.

В работах [2] — [4] и [6] рассматривались аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0,1]$ и на полуоси $[0,+\infty)$.

В данной статье доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в классах Зигмунда измеримых функций на полуоси.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [1], [6], [8], [13], [14].

2. Предварительные сведения

Пусть μ – мера Лебега на полупрямой $[0,\,\infty)$ и $S(0,\,\infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0,\,\infty)$.

Определение 1. Функцией распределения функции f называют функцию n_f, определяемую для любого $\tau \in (0, +\infty)$ равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : \ |f(t)| > \tau\}.$$

Будем называть функции f и g равноизмеримыми [1], если $n_{|f|}(\tau) = n_{|g|}(\tau)$.

В дальнейшем будем рассматривать множество $S_0(0, +\infty)$ тех функций из $S(0, +\infty)$, для которых функция распределения $n_f(\tau)$ не равна тождественно $+\infty$.

Определение 2. Перестановкой функции f в убывающем порядке или убывающей перестановкой функции f называют функцию f^*, определяемую равенством:

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : \ n_{|f|}(\tau) \leqslant t\}.$$

Определение 3. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f\|_E \leqslant \|g\|_E$.

$S2^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f\|_E = \|g\|_E$.

Любое симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ является промежуточным между пространствами $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$ (см., например,[1], теорема 4.1).

Для каждой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*\,d\mu, \ t \in (0, +\infty).$$

$f^{**}(t)$ — непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция, $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$, для $u > f^*(\infty)$ имеет место равенство $f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u$ и $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$.

Если E симметричное пространство, функция f принадлежит $L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$, то $f \in E$.

Обозначим

$$H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : \ f^{**} \in E\}$$

и положим $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$.

Пространство $(H(E), \|\cdot\|_{H(E)})$ является симметричным и имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset H(E) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Определение 4. Положительный линейный оператор

$$T : \ L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) \longrightarrow L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$$

называется положительным $(L_1 - L_\infty)$ - сжатием или абсолютным сжатием, если

1^o. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;

2^o. $\|T\|_{L_1 \to L_1} \leqslant 1$, $\|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \leqslant 1$.

Обозначим множество всех абсолютных сжатий через $\mathcal{PC}$ (см. [6]).

Если E — симметричное пространство, то для любого оператора $T \in \mathcal{PC}$ $T(H(E)) \subset H(E)$ и $\|Tf\|_{H(E)} \leqslant \|f\|_{H(E)}$.

Определение 5. Функция $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется функцией Орлича, если Φ — непрерывна слева, неубывающая, выпуклая, нетривиальная функция, для которой $\Phi(0) = 0$.

Если $\varphi(u)$ — левая производная функции $\Phi(u)$, то имеет место следующее представление:

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(x)\,dx, \quad 0 \leqslant u < \infty.$$

Определение 6. Пространством Орлича называется множество

$$L_\Phi = \left\{ f \in S_0(0, \infty) : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}.$$

Пространство $(L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ является симметричным пространством относительно нормы

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{ a > 0 : \int_0^\infty \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu \leqslant 1 \right\},$$

Заметим, что $f \in L_\Phi$ тогда и только тогда, когда $|f| \in L_\Phi$ и

$$\||f|\|_\Phi = \|f\|_\Phi.$$

Определение 7. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две функции Орлича. Говорят, что функция Φ_1 мажорирует функцию Φ_2 на бесконечности $(\Phi_1 \succ_\infty \Phi_2)$, если существуют такие положительные числа a, b, u_0, что для любого $u \geqslant u_0$ имеет место неравенство:

$$\Phi_2(u) \leqslant b\,\Phi_1(au).$$

Говорят, что функция Φ_1 мажорирует функцию Φ_2 в нуле $(\Phi_1 \succ_0 \Phi_2)$, если существуют такие положительные числа a, b, u_0, что это неравенство имеет место для любого числа $0 < u \leqslant u_0$.

Теорема 1. *([8], 2.2.1, 2.2.3). Следующие условия эквивалентны:*

(i). $L_{\Phi_1} \subseteq L_{\Phi_2}$;

(ii). Существует такое число $k > 0$, что $\|f\|_{\Phi_2} \leqslant k\|f\|_{\Phi_1}$;

(iii). $\Phi_1 \succ_0 \Phi_2$ и $\Phi_1 \succ_\infty \Phi_2$.

Пусть $\Phi(u)$ — функция Орлича. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi}(x) = x \int_0^x \frac{\varphi(u)}{u}\, du = x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du.$$

Функция $\widetilde{\Phi}(x)$ является функцией Орлича, $\Phi(x) \leqslant \widetilde{\Phi}(x)$ для любого $x > 0$ и $H(L_\Phi) = L_{\widetilde{\Phi}}$.

Пространство $H(L_\Phi) = L_{\widetilde{\Phi}}$ является банаховым, как относительно нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$, так и относительно нормы $\|\cdot\|_{L_{\widetilde{\Phi}}}$, нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$ и $\|\cdot\|_{L_{\widetilde{\Phi}}}$ эквивалентны и для любой функции $f \in H(L_\Phi)$, имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_\Phi} \leqslant \|f\|_{L_{\widetilde{\Phi}}} \leqslant \|f\|_{H(L_\Phi)}.$$

Для каждого оператора $T \in \mathcal{P}C$ обозначим:

$$B_T f = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Следующая теорема представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы для пространства Орлича L_Φ.

Теорема 2. *([4], теорема 6) Пусть $(L_\Phi, \|\cdot\|_{L_\Phi})$ пространство Орлича и $T \in \mathcal{P}C$. Тогда из $f \in L_{\widetilde{\Phi}}$ следует, что $B_T f \in L_\Phi$ и*

$$\|B_T f\|_{L_\Phi} \leqslant \|f\|_{H(L_\Phi)} = \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

3. Классы Зигмунда

Для каждого числа $k > 0$ определим функцию

$$\Phi_k(u) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } u \leqslant 1, \\ u(\log u)^k\,, & \text{если } 1 < u. \end{cases}$$

Определение 8. Говорят, что функция Орлича Φ удовлетворяет условию (Δ_2) в бесконечности, если найдутся такие $u_0 \in (0, \infty)$ и $l > 0$, что для любого $u \geqslant u_0$ выполняется неравенство:

$$\Phi(2u) < l\, \Phi(u).$$

Предложение 1. *При $k \geqslant 1$ функция $\Phi_k(u)$ является функцией Орлича, удовлетворяющей условию (Δ_2) в бесконечности.*

Доказательство. Так как при $k \geqslant 1$ и $u > 1$

$$[u(\log u)^k]' = (\log u)^k + k(\log u)^{k-1} > 0$$

и

$$[u(\log u)^k]'' = \frac{[k(\log u)^{k-1} + k(k-1)(\log u)^{k-2}}{u} > 0,$$

то $\Phi_k(u)$ — функция Орлича.

Для доказательства второй части утверждения, будем считать, что $u > 2$. Тогда

$$\Phi_k(2u) = 2u(\log(2u))^k = 2u(\log 2 + \log u)^k < 2u(\log u + \log u)^k =$$

$$= 2^{k+1}u(\log u)^k = 2^{k+2}\Phi_k(u).$$

Следовательно, функция $\Phi_k(u)$ удовлетворяет условию (Δ_2) в бесконечности.

$\square$

Определение 9. Пространство Орлича L_{Φ_k} при $k \geqslant 1$ называется классом Зигмунда и обозначается

$$L_{\Phi_k} = L\log^k L = L\ln^k L.$$

Замечание 1. Так как $L\log^k L$ — пространство Орлича, то $L\log^k L$ — симметричное пространство относительно нормы Орлича

$$\|f\|_{L_{\Phi_k}} = \|f\|_{\Phi_k} = \inf\left\{a > 0 : \int\limits_0^\infty \Phi_k\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu \leqslant 1\right\}.$$

Предложение 2. *Если* $1 \leqslant k < m$, *то* $L_{\Phi_m} = L\log^m L \subseteq L\log^k L = L_{\Phi_k}$ *и для любой функции* $f \in L_{\Phi_m}$ $\|f\|_{L_{\Phi_m}} \leqslant \|f\|_{L_{\Phi_k}}$.

Доказательство. Так как для любого $b > 0$, $0 < a < 1$, $u_0 = 1$ и любого $0 \leqslant u \leqslant u_0$

$$\Phi_k(u) = 0 = b\,\Phi_m(au),$$

то $\Phi_m \succ_0 \Phi_k$. С другой стороны, при $1 \leqslant k < m$ и любом $u \geqslant u_0 = 1$ имеет место неравенство

$$\Phi_k = u\,(\log u)^k \leqslant u\,(\log u)^m = \Phi_m,$$

поэтому $\Phi_m \succ_\infty \Phi_k$. Следовательно, в силу теоремы 1, $L\log^m L \subseteq L\log^k L$ и для любой функции $f \in L_{\Phi_m}$

$$\|f\|_{L_{\Phi_m}} \leqslant \|f\|_{L_{\Phi_k}}.$$

$\square$

Теорема 3. *Для любого* $k \geqslant 1$ *имеет место равенство:*

$$H(L\log^k L) = L\log^{k+1} L$$

Доказательство. Как отмечалось выше, $H(L_{\Phi_k}) = L_{\widetilde{\Phi}_k}$. Найдем функцию $\widetilde{\Phi}_k(x)$ для функции $\Phi_k(u)$.

Так как

$$\widetilde{\Phi}_k(x) = x \int\limits_0^x \frac{\Phi'_k(u)}{u}\, du,$$

и

$$\Phi'_k(u) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } u \leqslant 1, \\ (\log\, u)^k + k(\log\, u)^{k-1}\,, & \text{если } 1 < u, \end{cases}$$

то при $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $\widetilde{\Phi}_k(x) = 0$. При $x > 0$ имеем:

$$\widetilde{\Phi}_k(x) = x \int\limits_0^x \frac{\Phi'_k(u)}{u}\, du = x \int\limits_0^x \frac{(\log\, u)^k + k(\log\, u)^{k-1}}{u}\, du =$$

$$= x \int\limits_0^x [(\log\, u)^k + k(\log\, u)^{k-1}]\, d(\log u) =$$

$$= x \left[\frac{(\log\, x)^{k+1}}{k+1} + (\log\, x)^k\right] = \frac{x}{k+1}(\log\, x)^{k+1} + x(\log\, x)^k.$$

Пусть $f \in L_{\widetilde{\Phi}_k}$. Следовательно, существует такое $a > 0$, что

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{\Phi}_k\left(\frac{|f|}{a}\right) d\,\mu < \infty.$$

Рассмотрим множества

$$E_a(f) = \{x : |f|(x) \leqslant a\}, \quad F_a(f) = \{x : |f| > a\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{E_a(f)} \widetilde{\Phi}_k\left(\frac{|f|}{a}\right) d\,\mu = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{F_a(f)} \widetilde{\Phi}_k\left(\frac{|f|}{a}\right) d\,\mu = \int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{\frac{|f|}{a}}{k+1}\left(\log\frac{|f|}{a}\right)^{k+1} + \frac{|f|}{a}\left(\log\frac{|f|}{a}\right)^k\right] < \infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{\frac{|f|}{a}}{k+1}\left(\log\frac{|f|}{a}\right)^{k+1}\right] < \infty,$$

и потому,

$$\int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{|f|}{a} \left(\log \frac{|f|}{a} \right)^{k+1} \right] < \infty,$$

т.е. $f \in L_{\Phi_{k+1}}$.

Обратно, пусть $f \in L_{\Phi_{k+1}}$. Тогда существует такое $a > 0$, что

$$\int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{|f|}{a} \left(\log \frac{|f|}{a} \right)^{k+1} \right] < \infty,$$

откуда

$$\int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{|f|}{a} \left(\log \frac{|f|}{a} \right)^{k} \right] < \infty,$$

и наконец,

$$\int\limits_{F_a(f)} \left[\frac{\frac{|f|}{a}}{k+1} \left(\log \frac{|f|}{a} \right)^{k+1} + \frac{|f|}{a} \left(\log \frac{|f|}{a} \right)^{k} \right] < \infty,$$

т.е.

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{\Phi}_k \left(\frac{|f|}{a} \right) d\,\mu < \infty.$$

Поэтому, $f \in L_{\widetilde{\Phi}_k}$.

Таким образом,

$$H(L \log^k L) = H(L_{\Phi_k}) = L_{\widetilde{\Phi}_k} = L_{\Phi_{k+1}} = L \log^{k+1} L.$$

$\square$

Замечание 2. Пространство $H(L\log^k L) = L\log^{k+1} L$ является банаховым относительно норм $\|f\|_{L_{\Phi_{k+1}}}$, $\|f\|_{H(L_{\Phi_k})}$ и $\|f\|_{L_{\widetilde{\Phi}_k}}$, при этом все эти нормы эквивалентны.

Следующая теорема является аналогом доминантной эргодической теоремы в классах Зигмунда.

Теорема 4. *Пусть* $f \in L\log^{k+1} L$ *и* $T \in \mathcal{PC}$. *Тогда* $B_T f \in L_{\Phi_k}$ *и*

$$\|B_T f\|_{L_{\Phi_k}} \leqslant \|f\|_{H(L_{\Phi_k})} = \|f^{**}\|_{L_{\Phi_k}} \leqslant C\, \|f^{**}\|_{L_{\Phi_{k+1}}}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство. Пусть $f \in L\log^{k+1} L$ и $T \in \mathcal{PC}$. Так как $H(L\log^k L) = L\log^{k+1} L$ (теорема 3), то в силу теоремы 2, $f \in L\log^k L$ и

$$\|B_T f\|_{L_{\Phi_k}} \leqslant \|f\|_{H(L_{\Phi_k})} = \|f^{**}\|_{L_{\Phi_k}}.$$

Последнее неравенство следует из предложения 2 и теоремы 1.

$\square$

Список цитируемых источников

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
2. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.
3. *Муратов М. А., Рубштейн Б. А.* Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.
4. *Муратов М. А., Пашкова Ю. С.* Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.
5. *Birkhoff G. D.* Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.
6. *Braverman M, Rubshtein B, Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.
7. *Dunford N., Schwarts J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.
8. *Edgar G.A., Sucheston L.* Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.
9. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A maximal theorem with function-theoretik application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.
10. *Hopf E.* On the ergodic theorem for positive linear operators // J. Reinc. Ang. Math. — 1960. — No. 205. — P. 101–106.
11. *Hopf E.* The general temporally descrete Markov process // J. Rat. Meca. Anal. — 1954. — No. 3. — P. 13–45.
12. *Kakutani S.* Iteration of linear operations in complex Banach spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 295–300.
13. *Krengel U.* Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.
14. *Lindenstrauss J. and Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.
15. *von Neumann J.* Proof of the qlasiergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1932. — No. 18. — P. 70–82.
16. *Weiner N.* The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.
17. *Yosida K.* Mean ergodic theorem in Banach Spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 292–294.

Получена 13.06.2009