

УДК 539.3

Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. II. Энергетические характеристики излучения¹

А. Р. Сницер

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
НИИ Проблем геодинамики, Крымский научный центр НАН Украины,
Симферополь 95007. E-mail: *snitser_arnold@yahoo.com*

Аннотация. В статье получено распределение мощности излучения по типам волн при нормальном гармоническом воздействии на поверхность цилиндрической полости в бесконечной упругой среде. Рассмотрены различные случаи нагружения поверхности полости. Исследованы зависимости абсолютного и относительного энергетического вкладов всех типов волн от волновых размеров полости и области нагрузки. Показано, что изменение распределения различных вкладов в излучение связано с дифракционными явлениями, обусловленными соотношением диаметра полости и ширины кольца нагружения с длиной упругих волн в среде.

Ключевые слова: дифракция, мощность излучения, энергия излучения, упругие волны, цилиндрическая полость, скважина, гармоническое воздействие.

Введение

Проблемы вибрационного просвечивания Земли, исследование вибровоздействий на скважины с целью эффективной передачи энергии упругих колебаний в среду, многие задачи геологии и сейсмологии являются значительным стимулом изучения зависимости энергетических характеристик излучения от свойств источника и его расположения. Закономерности энергии излучения упругих волн в полупространстве обстоятельно исследовались в работах [1, 9].

Настоящая статья посвящается исследованию закономерностей энергетических характеристик излучения упругих волн в среде, содержащей цилиндрическую скважину. Работа является продолжением публикации [7], в которой рассмотрена задача об излучении упругих волн при нормальном гармоническом кольцевом нагружении поверхности цилиндрической полости в бесконечной упругой среде.

¹Основные результаты работы доложены на VI Международном конгрессе промышленной и прикладной математики (ICIAM 07) в Цюрихе (Швейцария), в июле 2007 года [11].

В [7] была получена и проанализирована структура поля перемещений и напряжений на поверхности полости и в дальней зоне, изучена направленность излучения в зависимости от параметров источника и свойств среды. Различные аспекты этой задачи рассматривались также в работах [5, 6, 12]. В данной статье найдены энергетические характеристики источника и проанализирован вклад в излучение различных типов волн. Рассматриваются два случая. В первом исследуется равномерное нагружение поверхности полости по кольцевой области $|z| \leq h$, когда в граничном условии $\sigma_{rr}(a, z) = 2\mu f(z)$, $f(z) = f_0 = \text{const}$ при $|z| \leq h$ и $f(z) \equiv 0$ при $|z| > h$. Во втором случае, начиная с некоторой ширины кольца нагружения $|h| = b$, сохраняется неизменным вектор погонной силы, распределенной по поверхности $0 \leq |z| \leq b$ так, что $\int_{-h}^h \sigma_{rr}(a, z) dz = Q = \text{const}$ при $0 \leq |h| \leq b$. На основе полученных в [7] асимптотически выражений НДС в дальней зоне ($R \gg a$) найдено распределение энергии излучения по типам волн. Проведен анализ аналитических выражений и численные расчеты зависимостей абсолютных и относительных энергетических вкладов всех типов волн от отношения ширины кольцевой области и диаметра полости к длине упругих волн в среде в широком диапазоне линейного размера h . Проведенный анализ позволяет идентифицировать дифракционные волны, которые преобладают при $h \rightarrow 0$ и исчезают при $h \rightarrow \infty$ [3].

1. Средний за период поток мощности, излучаемый в упругую среду

Как известно, вектор мгновенной плотности потока мощности упругих возмущений определяется выражением [1, 4]

$$\vec{P} = -\hat{T} \cdot d\vec{U}/dt, \quad (1.1)$$

где \hat{T} — тензор напряжений, \vec{U} — вектор перемещений. Среднее значение вектора \vec{P} за период $T = 2\pi/\omega$ можно получить, вычислив интеграл

$$\vec{P}_{cp} = -\frac{1}{T} \int_0^T (\text{Re}\hat{T} \cdot \text{Re} d\vec{U}/dt) dt. \quad (1.2)$$

При выбранной нами временной зависимости вида $\exp(i\omega t)$, интеграл (1.2) дает

$$\vec{P}_{cp} = -\frac{i\omega}{4} (\hat{T}^* \cdot \vec{U} - \hat{T} \cdot \vec{U}^*), \quad (1.3)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В случае рассматриваемой здесь осесимметричной деформации \hat{T} и \vec{U} в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ \tau_{zr} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \vec{U} = U_r \vec{e}_r + U_z \vec{e}_z, \quad (1.4)$$

тогда (1.3) в проекциях на оси координат дает²:

$$\bar{P}_r = \frac{i\omega}{4}(\sigma_r U_r^* + \tau_{rz} U_z^* - \sigma_r^* U_r - \tau_{rz}^* U_z), \quad (1.5)$$

$$\bar{P}_\varphi = 0, \quad \bar{P}_z = \frac{i\omega}{4}(\tau_{zr} U_r^* + \sigma_z U_z^* - \tau_{zr}^* U_r - \sigma_z^* U_z). \quad (1.6)$$

В силу граничных условий данной задачи [7] выражение для компоненты (1.5) на поверхности полости $r = a$ принимает вид:

$$\bar{P}_r(a, z) = \frac{i\omega}{4}(\sigma_r U_r^* - \sigma_r^* U_r) = \begin{cases} \mu\omega f(z) \text{Im } U_r(a, z), & |z| \leq h; \\ 0, & |z| > h. \end{cases} \quad (1.7)$$

Интегрируя составляющую $\bar{P}_r(a, z)$ по поверхности кольцевой области нагружения $r = a$, $|z| \leq h$, получим средний за период поток мощности излучаемый в среду:

$$\bar{W} = \int_S \bar{P}_r(a, z) dz = 2\pi a \mu \omega \int_{-h}^h f(z) \text{Im } U_r(a, z) dz. \quad (1.8)$$

В статье [7] получено выражение (3.15), позволяющее определить $\text{Im } U_r(a, z)$ на кольцевой поверхности полости $|z| \leq h$. Напомним, что это выражение содержит слагаемые, представляющие три основных типа колебаний поверхности. Первое слагаемое соответствует колебаниям, связанным с поверхностной волной (ПВ) Био, 2-е — колебаниям, аналогичным смещениям поверхности симметрично нагруженной бесконечной цилиндрической полости, излучающей при этом только продольные волны [3], 3-е и 4-е интегральные слагаемые отвечают колебаниям поверхности, связанным с излучением объемных неразделимых продольных и поперечных волн. Подставляя $\text{Im } U_r(a, z)$ в (1.8) и интегрируя, получим сумму слагаемых, каждое из которых соответствует определенному волновому вкладу в поток мощности излучения

$$\bar{W} = \bar{W}^{Bio} + \bar{W}^{orig} + \bar{W}_1. \quad (1.9)$$

Разделив (1.9) на длину окружности полости $2\pi a$, найдем среднюю за период погонную мощность, излучаемую единицей длины кольцевой поверхности. В итоге для вклада в излучение поверхностной волны Био получим

$$\frac{\bar{W}^{Bio}}{2\pi a} = (4\mu f_0 h)^2 \frac{\omega k_2^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{\xi_0 \Delta'_0(\xi_0)} \left[\frac{\sin(\xi_0 h)}{\xi_0 h} \right]^2 \right\}. \quad (1.10)$$

Вклад «отдельной» продольной волны³ — P_{orig} имеет вид:

$$\frac{\bar{W}^{orig}}{2\pi a} = (4\mu f_0^2 \omega k_2^2) h \text{Im} \left[-\frac{1}{\xi \Delta_0(\xi)} \right] \Big|_{\xi=0}. \quad (1.11)$$

²Черта над компонентами вектора обозначает усредненные за период значения.

³Эта волна соответствует вычету в точке $\xi = 0$, найденному при контурных преобразованиях интеграла, определяющего радиальную составляющую вектора перемещения на поверхности кольца нагружения [7].

Для вклада в излучение энергии неразделенных продольных и поперечных волн получим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{W}_1}{2\pi a} = (4\mu f_0 h)^2 \frac{\omega}{2\mu} \frac{k_2^2}{\pi} \left[\int_0^{k_1} \frac{(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)}{\xi \Delta_0^+ \Delta_0^-} \left[\frac{\sin(\xi h)}{\xi h} \right]^2 d\xi + \right. \\ \left. + \int_{k_1}^{k_2} \frac{\alpha_2 V_2}{\xi \tilde{\Delta}_0^+ \tilde{\Delta}_0^-} \left[\frac{\sin(\xi h)}{\xi h} \right]^2 d\xi \right]. \quad (1.12) \end{aligned}$$

В (1.10)–(1.12): $f(z) = f_0 = \text{const}$ — выбранный профиль функции нагружения цилиндрической полости по кольцу $|z| \leq h$; $\Delta_0(\xi)$ — дисперсионное соотношение Био, имеющее вещественный корень ξ_0 [8,10]; все прочие величины, входящие в подынтегральное выражение (1.12), определены в третьем разделе публикации [7].

2. Анализ распределения мощности излучения по типам волн в зависимости от характера нагрузки

Особый интерес представляет анализ распределения средней за период мощности, излучаемой в упругую среду, в зависимости от ширины кольца нагружения поверхности полости. Так в предельных случаях: сосредоточенного воздействия на поверхность полости ($h \rightarrow 0$) вдоль окружности радиуса $r = a$ и при воздействии по всей поверхности бесконечной цилиндрической полости ($h \rightarrow \infty$), происходят качественные изменения распределения энергии излучения источника, представленного в общем случае выражением (1.9).

Для рассмотрения указанных предельных случаев следует оговорить характер зависимости коэффициента $4\mu f_0 h$ в выражениях (1.10), (1.12) от входящих в него величин. Представим указанный коэффициент в виде:

$$F = 4\mu f_0 h = (2\mu f_0)(2h \cdot 2\pi a)/2\pi a, \quad (2.1)$$

откуда очевидно, что (2.1) представляет погонную силу, действующую на кольцевую поверхность полости ширины $2h$ вдоль единицы длины окружности $r = a$. Рассмотрим два возможных варианта нагрузки: а) постоянное напряжение на кольцевой поверхности приложения гармонической нагрузки; б) постоянная сила гармонического воздействия, распределенная по кольцевой поверхности и не зависящая от величины площади приложения нагрузки.

Проанализируем распределение энергии излучения по типам волн при устремлении ширины кольца нагружения полости к нулю в указанных случаях.

а) Если в граничном условии на поверхности кольцевой области полости $\sigma_r(a, z) = 2\mu f(z)$, $|z| \leq h$ считать $f(z) = f_0 = \text{const}$, то погонная сила нагрузки F , пропорциональная ширине кольца, исчезает при $h = 0$. В данном тривиальном случае, фактически при исчезновении нагрузки, энергетический вклад в излучение всех типов волн, определяемых согласно (1.10)–(1.12), естественно отсутствует.

б) Если в (2.1) положить $F = \text{const}$, то при изменении ширины кольца нагружения будет изменяться и напряжение: $\sigma_r(a, z) = 2\mu f_0 = F/2h$. В случае сосредоточенной нагрузки при $h \rightarrow 0$ напряжение будет неограниченно возрастать: $\sigma_r(a, z) \rightarrow \infty$, а сила будет оставаться постоянной и совершать работу по возбуждению волн в среде. В таком случае для вкладов в мощность излучения ПВ Био и объемных неразделимых P - и S -волн из (1.10), (1.12) получим

$$\frac{\overline{W}^{Bio}}{2\pi a} = F^2 \frac{\omega k_2^2}{2\mu} \frac{1}{\xi_0 \Delta'_0(\xi_0)}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\overline{W}_1}{2\pi a} = F^2 \frac{\omega k_2^2}{2\mu \pi} \left[\int_0^{k_1} \frac{(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2)}{\xi \Delta_0^+ \Delta_0^-} d\xi + \int_{k_1}^{k_2} \frac{\alpha_2 V_2}{\xi \tilde{\Delta}_0^+ \tilde{\Delta}_0^-} d\xi \right]. \quad (2.3)$$

Однако, при $h \rightarrow 0$ нельзя из выражения (1.11) находить энергетический вклад «отдельной» P -волны в мощность излучения, считая воздействием сохраняющим главный вектор силы постоянным: $\lim_{h \rightarrow 0} 4\mu f_0 h = \text{const}$. Действительно, если ввести в (1.11) коэффициент (2.1) и потребовать чтобы он оставался постоянным, то из полученного выражения

$$\frac{\overline{W}^{orig}}{2\pi a} = F^2 \frac{\omega k_2^2}{2\mu} \left[\frac{1}{2h} \right] \text{Im} \left[-\frac{1}{\xi \Delta_0(\xi)} \right] \Big|_{\xi=0} \quad (2.4)$$

следует неограниченный рост энергетического вклада «отдельной» P -волны в мощность излучения. Отметим, что вклад (2.4) был получен интегрированием той части $\text{Im}U_r(a, z)$ в (1.8), которая существует только при условии отличной от нуля ширины кольца нагружения, предполагает постоянство напряжения на границе, и соответствует вычету в точке $\xi = 0$, учтенному при контурных преобразованиях в комплексной плоскости интеграла, определяющего радиальную компоненту перемещения на поверхности полости $r = a$, $|z| < h$ [7]

$$U_r^{orig}(a, z) = -\frac{2k_2^2 f_0}{\xi \Delta_0(\xi)} \Big|_{\xi=0}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, в вышеупомянутом случае а) при $h \rightarrow 0$ согласно (1.11) $\overline{W}^{orig} \rightarrow 0$. В случае сосредоточенного воздействия продольная волна P_{orig} вообще отсутствует вместе с энергетическим вкладом \overline{W}^{orig} . Это нетрудно показать, полагая в граничном условии задачи в качестве профиля функции нагружения сосредоточенную нагрузку $f(z) = \delta(z)$. Тогда $\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) e^{-i\xi z} dz = 1$ и, как следует из (2.7) [7], для радиальной компоненты вектора перемещений на поверхности полости мы имеем

$$U_r(a, z) = \frac{-k_2^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi z}}{\xi \Delta_0(\xi)} d\xi. \quad (2.6)$$

Если провести контурные преобразования интеграла (2.6) в комплексной плоскости, как это сделано в [7], мы получим лишь слагаемые, отвечающие за излучение неразделимых объемных P - и S -волн и ПВ Био, а слагаемое типа (2.5), отвечающее за «отдельную» P -волну здесь отсутствует⁴. Таким образом, в случае сосредоточенной нагрузки полная мощность излучения источника состоит из суммы вкладов ПВ Био — (2.2) и объемных неразделимых P - и S -волн — (2.3).

С целью оценки достоверности полученных здесь результатов выполним в выражениях (2.2) и (2.3) предельный переход при $a \rightarrow \infty$, считая, что все погонные величины относятся к длине полуокружности. В результате из (2.2) и (2.3) мы получим среднюю погонную мощность излучения ПВ Рэлея и неразделимых P - и S -волн в задаче о нормальном гармоническом нагружении бесконечной полосы ширины $2h$ на поверхности упругого полупространства [1]. В частности, вклад (2.2), в данном предельном случае дает среднюю за период мощность излучения волны Рэлея [1]:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\overline{W}^{Bio}}{2\pi a} = -Q^2 \omega k_2^2 \frac{\sqrt{\xi_R^2 - k_1^2}}{\mu \Delta'_R(\xi_R)}. \quad (2.7)$$

В другом предельном случае, когда $h \rightarrow \infty$, т.е. при нагружении полости по всей ее поверхности, возможность предельного перехода непосредственно из выражений (1.10)–(1.12) не очевидна, т.к. они содержат преобразование Фурье от нагрузки заданной на поверхности конечных размеров: $|z| \leq h$, $r = a$. В этом случае, как было показано в [7], вычисляя преобразование Фурье нагрузки $f_0 = \text{const}$ на бесконечном промежутке $z \in (-\infty, +\infty)$, из общего решения мы получим лишь одну радиальную компоненту вектора перемещений, отличную от нуля и не зависящую от переменной z :

$$U_r(r) = \frac{2f_0 H_1^{(2)}(k_1 r)}{k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a)} = -\frac{2k_2^2 f_0}{\xi \Delta_0(\xi)|_{\xi=0}} \frac{H_1^{(2)}(k_1 r)}{H_1^{(2)}(k_1 a)}. \quad (2.8)$$

Этот результат соответствует задаче о нормальном гармоническом нагружении поверхности цилиндрической полости в бесконечной, упругой среде, рассмотренной в монографии В. Новацкого [3]. Значение радиальной компоненты вектора перемещений (2.8) на поверхности полости $r = a$, $z \in (-\infty, +\infty)$ совпадает с выражением (2.5), справедливым для $z \in (-h, h)$. Поэтому вычисленные согласно (1.7) радиальные компоненты средней за период плотности потока мощности излучения P -волн для случая радиального нагружения полости по всей ее поверхности и по кольцевой поверхности конечной ширины совпадают и определяются выражением

$$\overline{P}_r^{orig}(|z| \leq h) = \overline{P}_r^{(P)}(|z| < \infty) = 2\mu f_0^2 \omega k_2^2 \text{Im} \left[-\frac{1}{\xi \Delta_0(\xi)} \right] \Big|_{\xi=0}. \quad (2.9)$$

⁴Т.к. в интеграле (2.6) $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \Delta_0(\xi) \neq 0$.

Из (2.9) видно, что $\overline{P}_{r(|z|\leq h)}^{orig}$ не зависит от h и, следовательно, согласно (1.11) средняя за период погонная мощность излучения «отдельной» продольной волны P_{orig} возрастает пропорционально ширине кольца нагружения и при $h \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. В дальнейшем, на основе численных результатов будет показано, что с ростом ширины кольца нагружения абсолютные и относительные энергетические вклады в излучение поверхностной волны Био и неразделимых объемных P - и S -волн убывают, а при достаточно больших h практически исчезают. Таким образом, решение данной задачи при $h \rightarrow \infty$ и в аспекте энергетических вкладов в излучение различных типов волн приближается к решению задачи В. Новацкого [3].

3. Разделение излучаемого потока мощности по типам волн

На практике часто необходимо передавать в упругую среду энергию, связанную с определенным типом упругих волн — продольных, поперечных, или генерировать поверхностные волны. Так для воздействия на нефтеносные пласты и в ряде геофизических экспериментов полезной является только мощность P -волн. В области акустоэлектроники важна энергия поверхностных волн. Поэтому важным является управлять распределением излучаемой источником энергии по типам волн. Оценим такое распределение энергии в нашей задаче. Анализ структуры выражения (1.9), определяющего вклады различных волн в излучение, показывает, что отделенной является мощность излучения поверхностных волн Био \overline{W}^{Bio} и мощность «отдельной» продольной волны \overline{W}^{orig} , мощность же излучения \overline{W}_1 — (1.12), связанная с P - и S -волнами, не разделяется по типам волн. Однако, благодаря анализу напряженно-деформированного состояния среды в дальней зоне, удается оценить в отдельности вклад P - и S -волн в мощность излучения. Как было показано в [7], в системе координат (R, φ, ϑ) асимптотические представления напряжений σ_{RR} и $\tau_{R\vartheta}$ в дальней зоне пропорциональны компонентам вектора перемещений U_R и U_ϑ соответственно. При этом радиальные перемещения и напряжения U_R, σ_{RR} распространяются со скоростью продольных волн, в то время как окружные перемещения и напряжения $U_\vartheta, \tau_{R\vartheta}$ — со скоростью поперечных упругих волн. Следуя описаному выше способу расчета средней за период плотности потока мощности и учитывая волновые характеристики компонент НДС, оценим \overline{P}_R в дальней зоне. Приведенная в [7] асимптотическая оценка НДС при $R \gg a$ и справедливая для $|z| > h$, позволяет в случае сосредоточенной нагрузки получить в области $0 < |\vartheta| < \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ разделение компоненты \overline{P}_R на сумму вкладов в излучение P - и S -волн в отдельности:

$$\overline{P}_R = \overline{P}_R^{(P)} + \overline{P}_R^{(S)}, \quad \overline{P}_R^{(P)} = \frac{i\omega}{4}(\sigma_{RR}U_R^* - \sigma_{RR}^*U_R), \quad \overline{P}_R^{(S)} = \frac{i\omega}{4}(\tau_{R\vartheta}U_\vartheta^* - \tau_{R\vartheta}^*U_\vartheta). \quad (3.1)$$

В данном случае «отдельная» продольная волна P_{orig} отсутствует, а ПВ Био не дает вклада в излучение в дальней зоне, т.к. экспоненциально убывает по координате R . Интегрируя полученную разделенную плотность потока мощности в

дальней зоне по замкнутой поверхности, охватывающей источник, мы находим вклады P - и S -волн в мощность излучения \overline{W}_1 :

$$\overline{W}_1 = \overline{W}^{(P)} + \overline{W}^{(S)}, \quad \overline{W}^{(P)} = 2 \int_S \overline{P}_R^{(P)} dS, \quad \overline{W}^{(S)} = 2 \int_S \overline{P}_R^{(S)} dS. \quad (3.2)$$

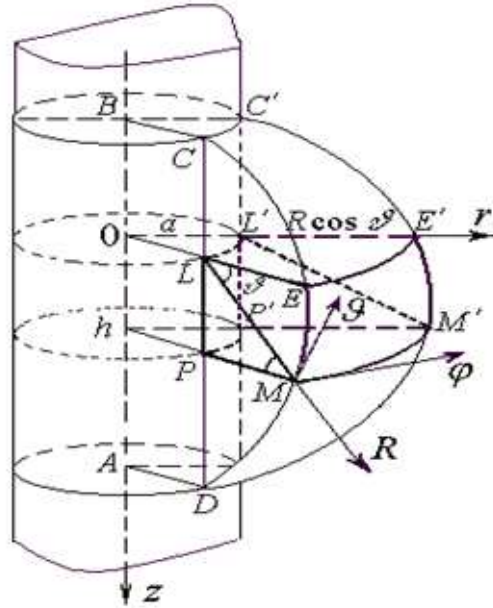


Рис. 1. Интегрирование плотности потока мощности объемных волн в дальней зоне $R \gg a$ по поверхности S , образованной вращением сечения $ABCEd$ вокруг оси z .

Для вычисления интегралов (3.2) строим в дальней зоне поверхность, образованную вращением сечения $ABCEd$ вокруг оси z . Сечение состоит из прямоугольника $ABCD$, со сторонами $BC = a$ и $CD = 2R$, и полукруга $CEMD$ радиуса R ; $dS = (Rd\vartheta)[(R \cos \vartheta + a)d\varphi]$ — элементарная площадка поверхности (Рис.1). Вычисляя интегралы (3.2) по сферической поверхности S ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), получим:

$$\overline{W}^{(P)} = 2\pi\omega\mu k_2^2 k_1^{-1} \int_0^{\pi/2} |\gamma_1(\vartheta)|^2 d\vartheta, \quad \overline{W}^{(S)} = 2\pi\omega\mu k_2 \int_0^{\pi/2} |\gamma_2(\vartheta)|^2 d\vartheta, \quad (3.3)$$

где $\gamma_1(\vartheta)$ и $\gamma_2(\vartheta)$ определены в [7]. В итоге, из (1.9) и (3.2) следует полное распределение мощности излучения источника по типам волн в случае сосредоточенной нагрузки:

$$\overline{W} = \overline{W}^{Bio} + \overline{W}^{(P)} + \overline{W}^{(S)}, \quad (3.4)$$

где каждый из вкладов определяется согласно (2.2), (3.3). Соответствующее относительное распределение мощности излучения по типам волн принимает вид:

$$w^{Bio} + w^{(P)} + w^{(S)} = 1, \quad (3.5)$$

где $w^{(*)} = \overline{W}^{(*)} / \overline{W}$.

Для анализа структуры компоненты \overline{P}_R в дальней зоне в случае нагрузки распределенной по кольцу ширины $2h > 0$ проведена асимптотическая оценка компонент перемещений и напряжений, в области $|z| \leq h$. В этом случае главные члены асимптотики связаны с полюсом, отвечающим за «отдельную» продольную волну, а соответствующая плотность потока мощности имеет вид:

$$\overline{P}_R^{orig}(R, \vartheta) = \frac{4f_0^2 \omega \mu}{\pi} \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{\cos^2 \vartheta}{(a + R \cos \vartheta)} \left| k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a) \right|^{-2} \quad (3.6)$$

Для определения потока мощности излучения через сферическую поверхность S в данном случае следует плотность потока $\overline{P}_R^{orig}(R, \vartheta)$ в области $|z| \leq h$ интегрировать по части поверхности S_1 ($0 < |\vartheta| \leq \arcsin(h/R)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), а плотность потока мощности полученную в [7] для области $|z| > h$ — по части поверхности S_2 ($\arcsin(h/R) \leq |\vartheta| \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$\overline{W}^{(S_1+S_2)} = \overline{W}^{(orig)} + \overline{W}^{(P)} + \overline{W}^{(S)}, \quad (3.7)$$

$$\overline{W}^{(orig)} = \int_{S_1} \overline{P}_R^{orig}(R, \vartheta) dS = \frac{16f_0^2 \omega \mu (k_2^2/k_1^2) h}{\left| k_2^2 k_1^{-1} H_0^{(2)}(k_1 a) - 2a^{-1} H_1^{(2)}(k_1 a) \right|^2}, \quad (3.8)$$

$$\overline{W}^{(P)} = \int_{S_2} \overline{P}_R^{(P)}(R, \vartheta) dS = 2\pi \omega \mu k_2^2 k_1^{-1} \int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} |\gamma_1(\vartheta)|^2 d\vartheta, \quad (3.9)$$

$$\overline{W}^{(S)} = \int_{S_2} \overline{P}_R^{(S)}(R, \vartheta) dS = 2\pi \omega \mu k_2 \int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} |\gamma_2(\vartheta)|^2 d\vartheta. \quad (3.10)$$

В случае нагрузки распределенной по кольцу ширины $2h > 0$ окончательное выражение для распределения мощности излучения по типам волн принимает вид:

$$\overline{W} = \overline{W}^{Bio} + \overline{W}^{orig} + \overline{W}^{(P)} + \overline{W}^{(S)}, \quad (3.11)$$

где каждый из вкладов определяется согласно (1.10), (3.8)–(3.10). Соответствующее относительное распределение мощности излучения по типам волн определяется равенством:

$$w^{Bio} + w^{orig} + w^{(P)} + w^{(S)} = 1. \quad (3.12)$$

4. Зависимости излучаемой мощности источника от его параметров и свойств среды. Результаты численных расчетов

Приведем результаты расчетов зависимостей распределения мощности излучения по типам волн при гармоническом радиальном воздействии на поверхность цилиндрической полости в бесконечной упругой среде от характера нагрузки, размеров области нагружения и свойств среды. Зависимости вкладов погонной мощности каждого типа волн в случае сосредоточенного воздействия рассчитывались в соответствии с формулами (2.2), (3.3)–(3.5), а в случае воздействия по кольцу ширины $2h > 0$ — согласно формулам (1.10), (3.8)–(3.12).

Для проведения расчетов были введены безразмерные величины: $\Omega = k_2 a$ — безразмерная частота⁵; $2H = 2h/a$ — относительная ширина кольца нагружения полости; $\varepsilon = a/R$ — параметр характеризующий «дальность» точки наблюдения волнового поля⁶.

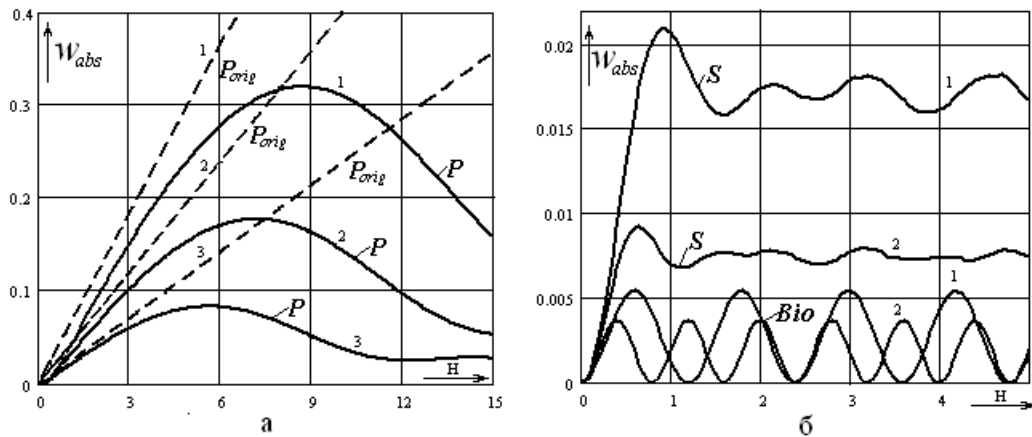


Рис. 2. Зависимость абсолютных энергетических вкладов в излучение: **а** — неотделимых P -волн и «отдельной» продольной волны — P_{orig} ; **б** — сдвиговой S -волны и поверхностной волны Био от ширины кольца нагружения. Линии 1–3 соответствуют частотам $\Omega = 2.6$; 3.8; 6.2. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, параметр дальности $\varepsilon = 0.005$.

Отметим, что с изменением ширины кольца нагружения изменяются не только относительные значения энергетических вкладов в излучение каждого типа волн, но и их абсолютные значения. При этом значение коэффициента $F^2\omega/\mu$ не влияет на распределение относительных энергетических вкладов в излучение. При расчете абсолютных вкладов энергии в излучение значение этого коэффициента, зависящее от h , следует учитывать будет ли на границе полости полагаться постоянным напряжением — случай а), или величина силы — случай б). При расчетах

⁵Безразмерная частота характеризует отношение окружного размера полости к длине поперечных волн в упругой среде: $\Omega = 2\pi a/\lambda_2$.

⁶Отношение радиуса полости к радиальной координате R точки наблюдения $M(R, \varphi, \vartheta)$.

предполагающих сохранение на границе полости неизменной величины силы, мы будем вычислять все энергетические вклады в излучение как функции, при коэффициенте $F^2\omega/\mu = \text{const}$. В расчетах предполагающих постоянным напряжением на границе полости — $\sigma_{rr}(a, z) = 2\mu f_0 = \text{const}$ — случай а), все энергетические вклады рассчитаны как функции при коэффициенте $16f_0^2 a^2 \omega \mu = \text{const}$ ⁷. Все вычисляемые вклады зависят от Ω , H , ε и коэффициента Пуассона ν .

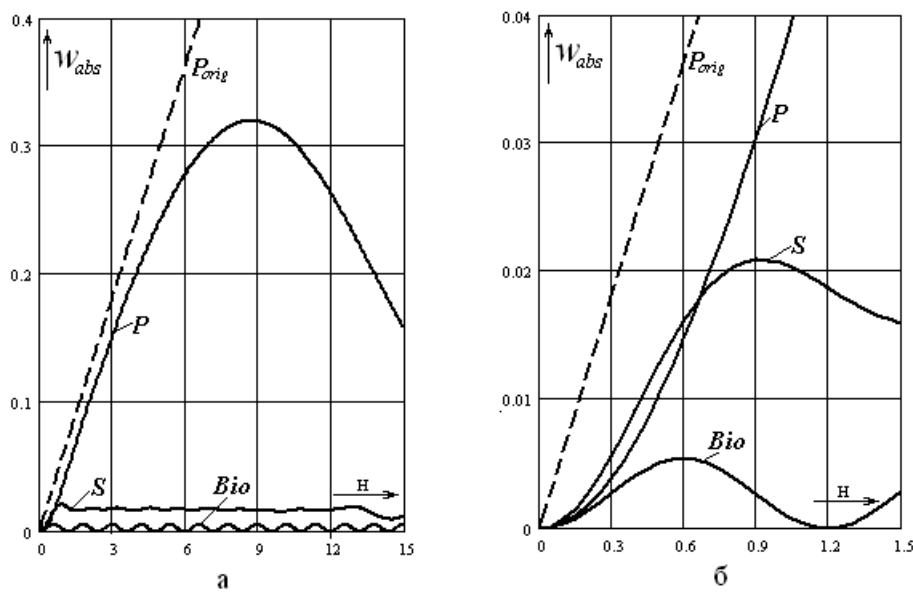


Рис. 3. Зависимость абсолютных энергетических вкладов в излучение неотделимых P - и S -волн, “отдельной” продольной волны — P_{orig} и поверхностной волны Био от ширины кольца нагружения. Частота $\Omega = 2.6$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, параметр дальности $\varepsilon = 0.005$. а — абсолютные значения энергетических вкладов всех типов волн для $H \in [0, 15]$, б — то же в окрестности $H = 0$.

Приведем вначале результаты расчетов для случая а) — **постоянство нормального напряжения на границе полости**. На рис.2 приведены зависимости абсолютных вкладов в мощность излучения продольных волн P и P_{orig} — (а), поперечных S -волн и поверхностных волн Био — (б) от линейного размера H источника волн для различных частот Ω . Линии 1,2,3 соответствуют частотам $\Omega = 2.6; 3.8; 6.2$. Из рис.2а видно, что абсолютные значения вклада P_{orig} линейно возрастают с увеличением H , в то время как вклады P -волн имеют максимумы, которые сдвигаются в область меньших H с увеличением частоты Ω . Отметим, что для каждой заданной частоты скорость возрастания энергетического вклада продольной волны P_{orig} постоянна, и начиная уже с нулевой ширины H превышает скорость возрастания энергетического вклада P -волны, убывающей с ростом H до нуля и при некотором $w_{\max}^{(P)}$ становится отрицательной. Этот факт далее объ-

⁷В этом случае расчетная функция будет отличаться от случая б) дополнительным множителем H^2 .

ясняет поведение относительного энергетического вклада продольной волны P_{orig} , как функции H , когда $H \rightarrow 0$. Абсолютный энергетический вклад $w_{abs}^{(Bio)}(H)$ осциллирует с постоянной амплитудой, а вклад поперечной S -волны возрастает до некоторого значения, около которого затем незначительно изменяется (рис.2б), причем величина этих вкладов уменьшается с ростом частоты Ω , что видно при сравнении линий 1,2. На рис.3а представлены зависимости от H абсолютных энергетических вкладов всех типов волн на отрезке $H \in [0, 15]$, а на рис.3б – те же зависимости на малом отрезке $H \in [0, 1.5]$, откуда видно поведение в окрестности $H = 0$. Зависимости на рис.3а показывают, что с ростом ширины кольца нагружения растет абсолютная суммарная мощность излучения, причем основной вклад вносят продольные волны P и P_{orig} .

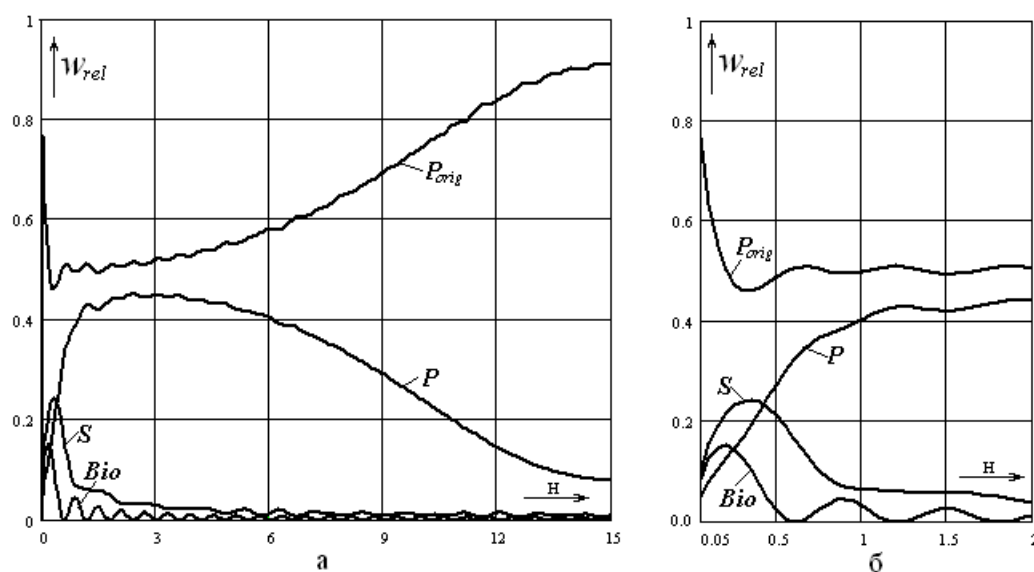


Рис. 4. Зависимость относительных энергетических вкладов в излучение неотделимых P - и S -волн, “отдельной” продольной волны — P_{orig} и поверхностной волны Био от ширины кольца нагружения при $\Omega = 5$; $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$. **а** — относительные значения энергетических вкладов всех типов волн для $H \in [0, 15]$, **б** — то же на малом отрезке $H \in [0.05, 2]$. В точке $H = 0$ относительные энергетические вклады не определены.

На рис.4 представлены зависимости относительных вкладов в излучение всех типов волн от H при заданных параметрах: $\Omega = 5$, $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$. Из графиков видно, что при выбранных параметрах наименьшими являются вклады поперечных волн и поверхностной волны, которые с ростом H убывают, и при достаточно малых H практически исчезают. Существенные относительные вклады в излучение вносят продольные волны P и P_{orig} . Относительный энергетический вклад продольной P -волны возрастает от нуля, достигая некоторого максимума, и затем убывает. Относительный вклад «отдельной» продольной волны P_{orig} в окрестности нуля имеет максимальное значение, и затем, достигая минимума (превосходящего величину вклада P -волны), снова возрастает практически до единицы. Близкое

к единице значение w^{orig} и стремящиеся к нулю значения относительных энергетических вкладов всех остальных волн при $H \rightarrow 0$ понятно из ранее описанного поведения абсолютных вкладов всех этих волн в окрестности нуля (рис.3б). Заметим, что в самой точке $H = 0$ значения относительных вкладов всех типов волн не определены, т.к. в случае а) при $H = 0$ абсолютные вклады всех типов волн исчезают (рис. 2а,б).

Дадим объяснение графиков, изображающих вклады продольных волн P и P_{orig} . Как было показано выше, в области $|z| \leq h$ или $0 < |\vartheta| \leq \arcsin(h/R)$ основной вклад в излучение дает продольная волна P_{orig} , а в области $|z| > h$ или $(\arcsin(h/R) \leq |\vartheta| \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ — P - и S -волны.

Если оценить в общем волновую картину, которую дает решение задачи, то можно констатировать, что при $h = 0$ в случае сосредоточенной нагрузки волновое поле содержит неотделимые продольные и поперечные объемные волны и поверхностную волну. При $h > 0$ появляется дополнительная — «отдельная» продольная волна. С увеличением площади кольца нагружения (линейно увеличивая h) вклад в энергию излучения волны P_{orig} возрастает, а всех остальных волн убывает, наконец, когда $h \rightarrow \infty$, все волны кроме «отдельной» продольной волны исчезают.

Полученная структура волнового поля и распределение относительных вкладов в излучение различных типов волн объясняется теорией дифракции волн. Пучок волн перемещений, излучаемый поверхностью полости при заданном граничном условии задачи, не может оставаться параллельным, уходящим в бесконечность и ограниченным в области $|z| \leq h$ из-за дифракции. В силу дифракции пучок расширяется и его угловой разброс определяется отношением длины излучаемой волны к линейному размеру источника⁸[2]:

$$\vartheta_{\text{диф.}} = \lambda_1/2h. \quad (4.1)$$

Из записанного соотношения сразу следует, что при $h \rightarrow \infty$ угловой разброс, связанный с дифракцией исчезает: $\vartheta_{\text{диф.}} \rightarrow 0$. В таком случае, как известно из решения данной задачи и [3], существует только одна продольная волна — P_{orig} , и, следовательно, исчезнувшие неотделимые P - и S -волны являются дифракционными. Из (4.1) также видно, что при малых длинах волн по сравнению с размером источника дифракция проявляется слабо. Дифракция усиливается с уменьшением размера источника относительно длины волны. В частности, при $h \rightarrow 0$ из соотношения (4.1) следует, что угловой разброс неограниченно возрастает, т.е. дифракционные волны преобладают. Это соответствует полученному решению задачи: когда нагрузка на поверхности полости становится сосредоточенной по окружности, продольная волна P_{orig} отсутствует, но остаются поверхностная волна Био и неотделимые P - и S -волны.

Поскольку оценка энергетических вкладов неотделимых P - и S -волн, а также продольной волны P_{orig} была проведена на основе асимптотических выражений

⁸Т.к в упругой среде излучаются продольные и поперечные волны, то в соотношении (4.1) взята большая из длин волн — $\lambda_1 > \lambda_2$.

в дальней зоне ($R \gg a$), то представляется возможным на основе положений теории дифракции проанализировать их связь с параметрами источника и среды. Дифракция начинает проявляться, как только на большом расстоянии от источника приближенно выполняется соотношение:

$$R\vartheta_{\text{диф.}} \geq 2h, \quad (4.2)$$

которое в терминах введенных выше безразмерных величин можно записать в виде

$$H^2\Omega \leq \pi k/2\varepsilon, \quad (4.3)$$

где $k = k_2/k_1 = \sqrt{(1-\nu)/(0.5-\nu)}$, ν — коэффициент Пуассона.

При фиксированных значениях параметров Ω, ν, ε из неравенства (4.3) можно приближенно определить граничный линейный размер источника

$$H_0 \cong \sqrt{\pi k/2\varepsilon \Omega}, \quad (4.4)$$

при котором появляется дифракция, и при его уменьшении ($H < H_0$) нарастает, а при увеличении ($H > H_0$) — ослабевает. Так для $\Omega = 5$, $\nu = 0.35$ и $\varepsilon = 0.005$ ($R = 200a$) мы получим $H_0 \approx 11.5$. Действительно, из рис.4а видно, что при уменьшении линейных размеров области нагружения от величины, близкой к полученной из соотношения (4.4), вклад в энергию излучения дифракционных P - и S -волн возрастает (именно эти волны согласно (3.9), (3.10) распространяются в области $|z| > h$). Напротив, при H , больших полученного значения, вклад дифракционных волн убывает и преобладает энергия волны P_{orig} (которая распространяется в области $|z| < h$). При данной оценке, надо также учитывать, что для расчетов использовались асимптотические выражения справедливые при условиях: $R \gg a$, $R \gg 2h$, или в терминах введенных безразмерных величин: $\varepsilon \ll 1$, $2\varepsilon H \ll 1$.

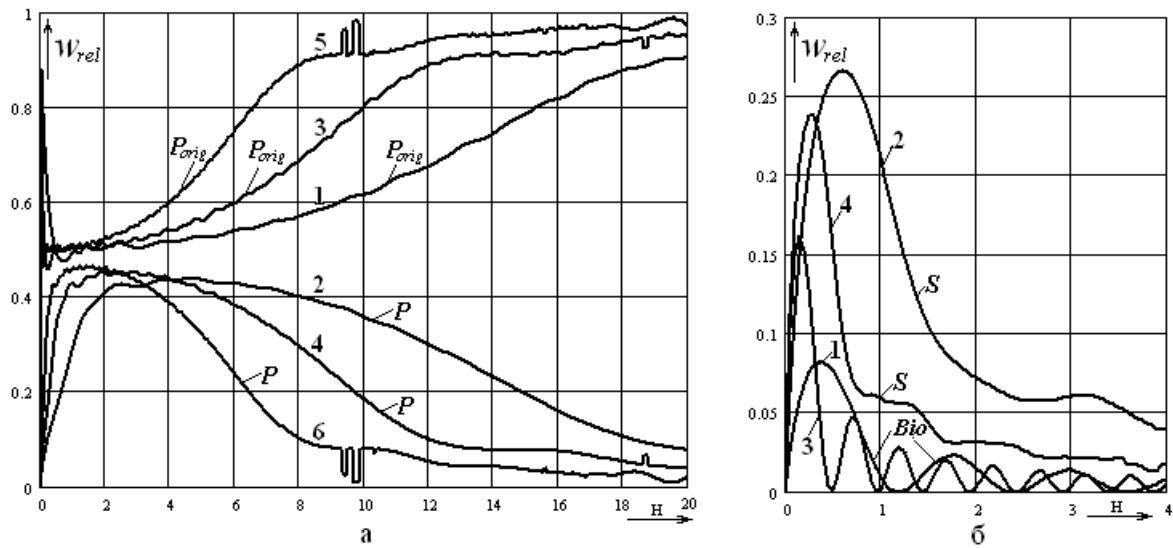


Рис. 5. Зависимость относительных энергетических вкладов в излучение всех типов волн от ширины кольца нагружения при $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$ для различных Ω . а — относительные значения энергетических вкладов продольных волн P и P_{orig} . Линии 1,2; 3,4 и 5,6 соответствуют частотам $\Omega = 2.6$; 6.2; 14.2. б — относительные значения энергетических вкладов S -волн и поверхностных волн Био. Линии 1,2 и 3,4 соответствуют частотам $\Omega = 2.6$; 6.2.

На рис.5а представлены зависимости энергетических вкладов продольных волн P и P_{orig} от величины H для $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$ и различных значений частоты Ω . Линии 1,2; 3,4 и 5,6 соответствуют частотам $\Omega = 2.6$; 6.2; 14.2, при которых (4.4) дает граничные линейные размеры области нагрузки — $H_0 \approx 16$; 10; 7. Из графиков видно, что для заданных параметров ν , ε , H дифракция проявляется сильнее (вклад P -волны более близок к вкладу P_{orig}) с убыванием частоты Ω . Этот же факт непосредственно следует из неравенства (4.3) и имеет простое физическое объяснение. Уменьшение произведения $H\Omega = \pi k(2h/\lambda_1)$ в (4.3), возможное в этом случае только благодаря уменьшению Ω , с другой стороны, эквивалентно росту длины излучаемых волн в сравнении с размером источника и тогда из (4.1) следует, что дифракция усиливается.

На рис.5б представлены зависимости относительных энергетических вкладов S -волн и ПВ Био от величины H при $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$ и $\Omega = 2.6$; 6.2. Энергетические вклады этих волн проявляются при небольших значениях линейного размера источника. При заданных параметрах вклад S -волн не превышает 24–27%, а ПВ Био — 8–16%. Заметим, что здесь и далее, для всех частотных зависимостей минимальное значение частоты Ω полагалось близким к запирающей частоте, ниже которой не генерируются поверхностные волны [10].

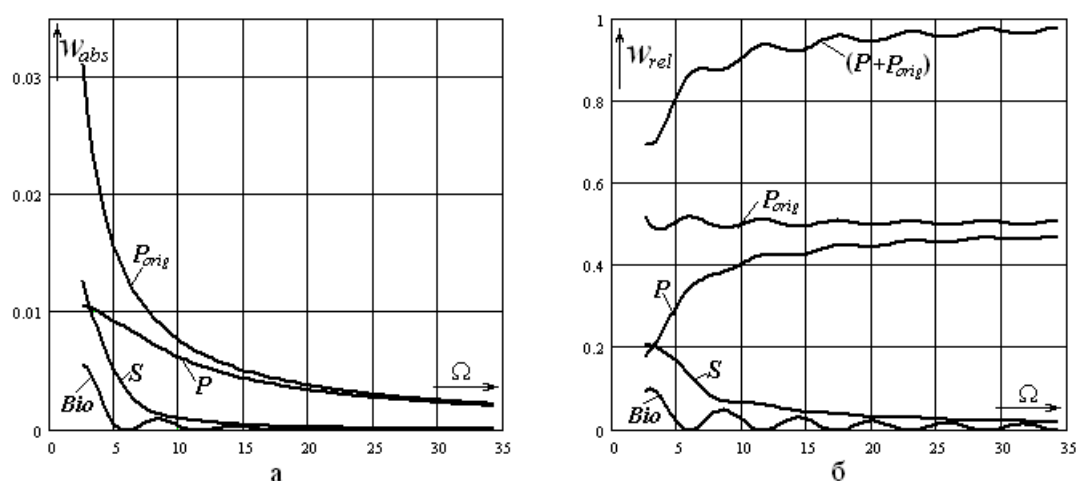


Рис. 6. Зависимости абсолютных (а) и относительных (б) энергетических вкладов в излучение всех типов волн от частоты Ω при $\nu = 0.2$, $\varepsilon = 0.005$, $H = 0.5$.

Частотные зависимости абсолютных и относительных энергетических вкладов в излучение всех типов волн для $\nu = 0.2$, $\varepsilon = 0.005$, $H = 0.5$ показаны на рис.6. Из графиков (рис.6б) видно, что с ростом Ω вклады S -волн и ПВ Bio быстро убывают, а суммарный вклад продольных волн P и P_{orig} стремится к единице.

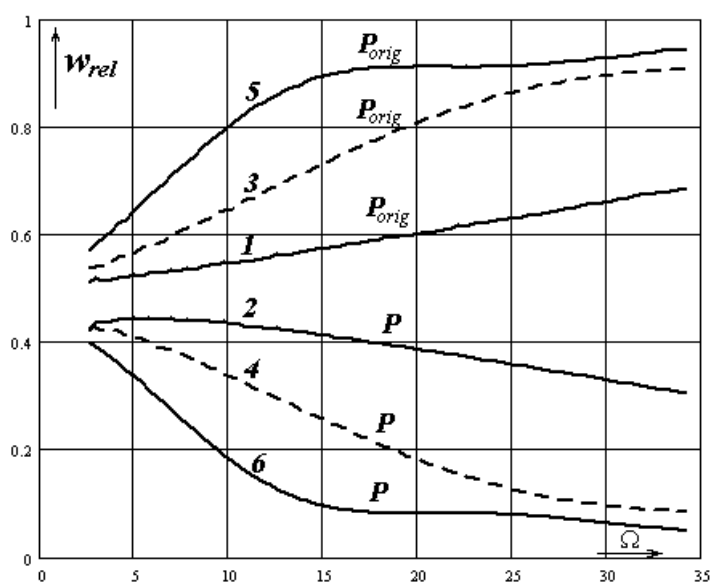


Рис. 7. Зависимости относительных энергетических вкладов в излучение продольных волн P и P_{orig} от частоты Ω при $\nu = 0.2$, $\varepsilon = 0.005$ для различных H . Линии 1,2; 3,4 и 5,6 соответствуют ширине кольца нагружения $H = 3$; 5; 7.

На рис.7 показаны частотные зависимости относительных энергетических вкладов в излучение продольных волн P и P_{orig} для $\nu = 0.2$, $\varepsilon = 0.005$ при раз-

личных значениях H . Линии 1,2; 3,4 и 5,6 соответствуют линейным размерам области нагружения $H = 3; 5; 7$ ⁹. Представленные кривые также можно объяснить дифракционным расхождением волны P_{orig} . При фиксированных значениях параметров H, ν, ε из неравенства (4.3) можно приближенно определить граничное значение частоты

$$\Omega_0 \cong \pi k / 2\varepsilon H^2, \tag{4.5}$$

при котором появляется дифракция, и при убывании частоты ($\Omega < \Omega_0$) нарастает, а при увеличении ($\Omega > \Omega_0$) — ослабевает. Для значений $H = 3; 5; 7$ из (4.5) получим соответственно граничные значения — $\Omega_0 \approx 57; 20.5; 10.5$. Из графиков на рис.7 видно, что при фиксированной частоте Ω , с уменьшением H (кривые 6,4,2) энергетический вклад P -волны, отвечающей за дифракцию, возрастает. Это же следует из (4.3): уменьшение левой части неравенства при заданном значении частоты происходит за счет H , а это, как было показано выше, эквивалентно увеличению длины волны по отношению к размеру источника и росту расхождения основной волны P_{orig} .

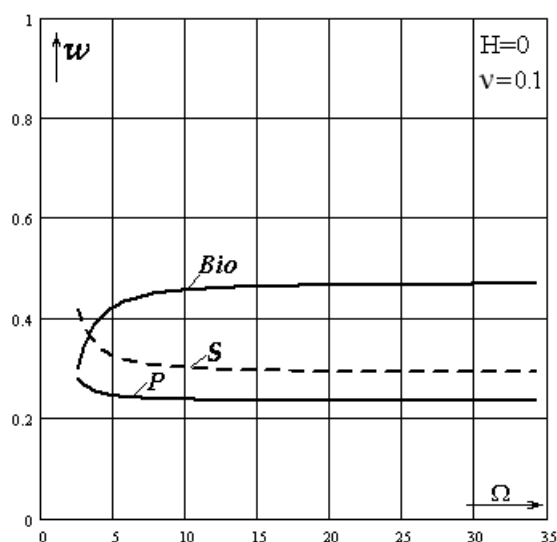


Рис. 8. Частотные зависимости относительного распределения вкладов мощностей излучения по типам волн при сосредоточенной по окружности нагрузке. В таком случае источник генерирует волны Био и неразделимые P - и S -волны. Коэффициент Пуассона среды $\nu = 0.1$.

Приведем результаты расчетов для случая б) — **постоянство вектора погонной силы на границе полости**. В этом случае выражения (2.2) и (3.9), (3.10), которые следуют из (2.3), остаются пригодными для расчета вкладов в мощность излучения P -волн, S -волн и ПВ Био. Действительно, в указанных выражениях можно просто полагать $F = \text{const}$, независимо от величины h . В случае

⁹Вклады поперечных и поверхностных волн здесь не рассматриваются, т.к. при данных значениях H они практически исчезают.

сосредоточенного воздействия, заменяя в выражении (2.1) величину $f_0 = \text{const}$ на функцию $f_0(h)$ и требуя, чтобы

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 4\mu h f_0(h) = Q = \text{const}, \quad (4.6)$$

мы выполним условие постоянства силы, действующей на поверхность полости. В этом случае выражение (2.4) для расчета \overline{W}^{orig} нельзя использовать по причине, описанной в разделе 2. Для получения приближенной формулы расчета вклада в излучение волны P_{orig} на интервале $0 \leq h \leq b$, предполагающем вектор силы постоянным, помимо условия (4.6), потребуем, чтобы функция $\overline{W}^{orig}(h)$ удовлетворяла условию непрерывности в точке $h = 0$ справа:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \overline{W}^{orig}(h) = \overline{W}^{orig}(0) = 0, \quad (4.7)$$

а в точке $h = b$ условию:

$$\lim_{h \rightarrow b-} F(h) = \lim_{h \rightarrow b-} 4\mu h f_0(h) = 4\mu b f_0 = Q = \text{const}. \quad (4.8)$$

Условие (4.8) позволяет определить граничное значение силы, которое при ее концентрации будет сохраняться.

Для $h > b$, мы будем по-прежнему предполагать, что согласно (2.1) сила $F \sim h$ и напряжение на границе полости остается постоянным, поэтому здесь будем использовать формулу (2.4). Таким образом, мы будем полагать сохранение вектора силы неизменным, начиная от некоторого значения $h = b$. Выполняя условия (4.6)–(4.8), мы получим приближенное выражение для расчета \overline{W}^{orig} :

$$\overline{W}^{orig}(h)/2\pi a \approx \frac{\omega}{\mu} Q^2 [E(0) - E(h)], \quad (4.9)$$

где

$$\frac{\omega}{\mu} Q^2 E(h) \approx \left[\overline{W}^{Bio}(h) + \overline{W}^{(P)}(h) + \overline{W}^{(S)}(h) \right] / 2\pi a, \quad (4.10)$$

слагаемые правой части (4.10) определены выражениями (1.10), (3.9), (3.10). При вычислении $\overline{W}^{orig}(h)$ для $h < b$ мы будем использовать формулу (4.9), а для $h > b$ — формулу (2.4). Значение b определяется из условия равенства правых частей выражений (2.4) и (4.9).

На рис.8 приведены зависимости относительных мощностей излучения различных типов волн при сосредоточенной по окружности нагрузке от безразмерной частоты Ω при $\nu = 0.1$. Как было показано выше, в случае сосредоточенной нагрузки энергия источника идет на излучение поверхностных волн на полости и на излучение неразделимых продольных и поперечных объемных волн. Из рис.8 следует, что в этом случае поверхностная волна Bio уносит от 30% до 50% всей энергии излучения, продольная волна — 22–25%, поперечная волна — 30–40%.

На рис.9 показаны изменения абсолютных энергетических вкладов в излучение всех типов волн в зависимости от H для $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$, $\Omega = 2.6$ — а,

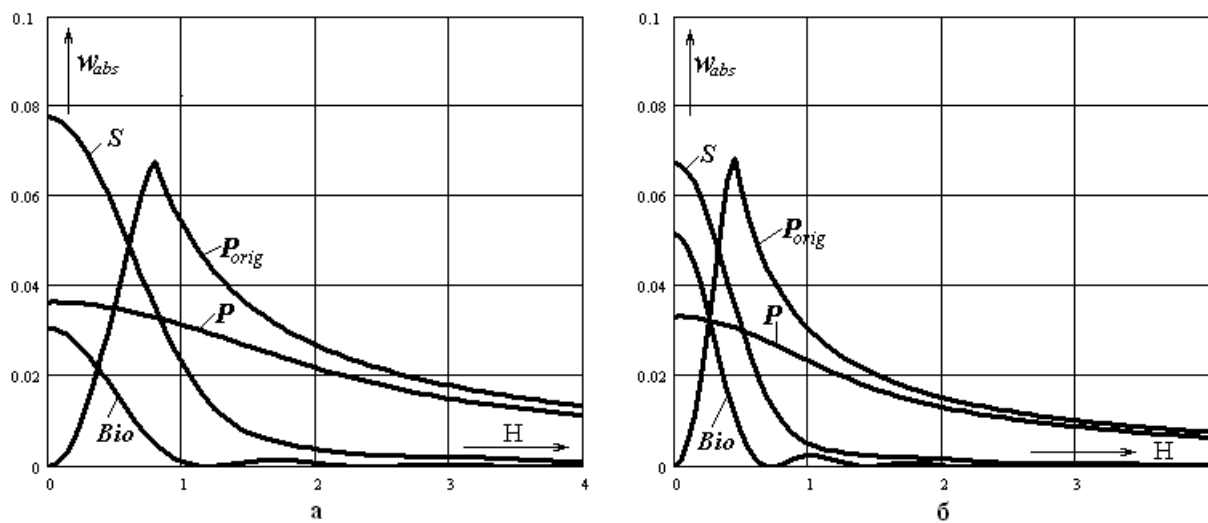


Рис. 9. Зависимости абсолютных энергетических вкладов в излучение всех типов волн от ширины H кольца нагружения при постоянстве вектора погонной силы на интервале $0 \leq h \leq b$; $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$; а — $\Omega = 2.6$; б — $\Omega = 4.2$.

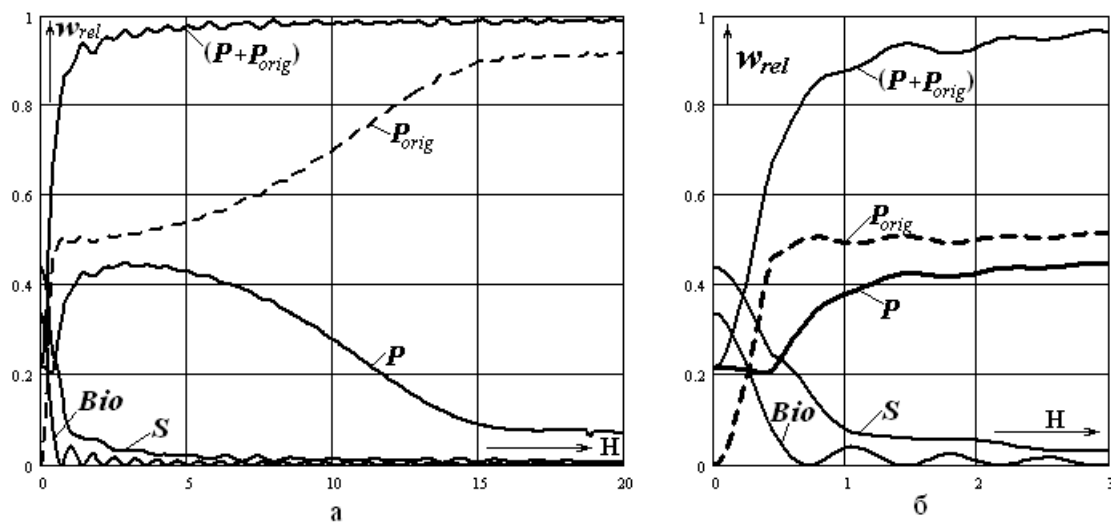


Рис. 10. Зависимости относительных энергетических вкладов в излучение всех типов волн от ширины H кольца нагружения при постоянстве вектора погонной силы на интервале $0 \leq h \leq b$; $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$, $\Omega = 4.2$; а — на интервале $0 \leq H \leq 20$; б — для $0 \leq H \leq 3$.

$\Omega = 4.2$ — б. Из графиков видно, что в отличие от случая постоянного напряжения на границе полости, когда с уменьшением H абсолютные вклады всех типов убывают до нуля (рис.3), здесь при концентрации нагрузки ($H \rightarrow 0$) вклады ПВ Био и неразделимых P - и S -волн возрастают, а продольной волны P_{orig} стремится к нулю. Это соответствует тому факту, что при линейном размере источника много меньшем длины волны ($2h \rightarrow 0$) согласно (4.1) явление дифракции максимально. Относительное распределение энергетических вкладов в излучение для $\nu = 0.35$, $\varepsilon = 0.005$, $\Omega = 4.2$ в зависимости от линейного размера области нагрузки показано на рис.10. Из рис.10а видно, что с ростом H расхождение волны P_{orig} уменьшается. Для $H > 15$ энергетический вклад дифракционных волн составляет менее 10%. Из рис.10б видны изменения относительных энергетических вкладов всех типов волн при концентрации нагрузки, в частности, при $H = 0$ вклад волны P_{orig} исчезает.

Заключение

В статье получено разделение энергии излучения по типам волн, вызванных гармоническим нагружением кольцевой области $|z| \leq h$ поверхности цилиндрической полости $r = a$ в бесконечной упругой среде. Показано, что энергия излучения при колебаниях поверхности полости уносится основной объемной продольной волной P_{orig} , которая распространяется в области $|z| \leq h$ или ($0 < |\vartheta| \leq \arcsin(h/R)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$); неразделимыми P - и S -волнами, распространяющимися, в основном, в области $|z| > h$ или ($\arcsin(h/R) \leq |\vartheta| \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и ПВ Био, распространяющейся вдоль поверхности полости и экспоненциально затухающей вглубь среды вдоль радиальной координаты. Полученные зависимости абсолютного и относительного распределения энергии излучения различных типов волн от волновых размеров полости $\Omega = k_2 a$ и области нагрузки $2H = 2h/a$ показывают, что решающее значение при этом играет отношение линейного размера источника волн к длине продольной волны в среде: $2h/\lambda_1$. Так в случае концентрации гармонического воздействия вдоль окружности ($h = 0$) это отношение стремится к нулю, т.е. размер источника ничтожно мал в сравнении с длиной излучаемой волны. В этом случае остается только энергетический вклад P -волн, S -волн и ПВ Био (рис.8), и как было показано аналитически, волна P_{orig} при этом не существует. Напротив, как видно из рис.10а, при $H > 16$, что соответствует отношению $2h/\lambda_1 > 10$, преобладает энергетический вклад продольной волны P_{orig} , вклад же остальных волн не превышает 10%. В другом предельном случае — $(2h/\lambda_1) \rightarrow \infty$ (линейный размер источника много больше длины волны)[3], и как было показано в [7] существует одна лишь волна P_{orig} — (2.8), а P - и S -волны исчезают. Таким образом, явление дифракции (расхождения) основной волны P_{orig} проявляется в появлении неразделимых P - и S -волн. Промежуточные значения $2h/\lambda_1$ также подтверждают дифракционный характер этих волн. Из проведенных численных расчетов, представленных в виде графиков, видно, что при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0.2 \div 0.35$ при $H > 1$ основной вклад в энергию излучения дают продольные волны ($P_{orig} + P$). Вклад S -волн и

ПВ Био сравним с энергетическими вкладами продольных волн только на небольших интервалах относительного размера источника: $0 < H < 0.5$ (рис.4б, рис.10б). Распределение энергетических вкладов различных типов волн также зависит от коэффициента Пуассона, что очевидно, в частности, из выражения (4.3), определяющего пограничные значения H и Ω отделяющих убывание и возрастание энергетических вкладов дифракционных волн.

Энергетический вклад ПВ Био в излучение, как следует из (1.10), зависит от ширины кольца нагружения $2h$ и корня $\xi_0(\Omega)$ дисперсионного уравнения, определяющего зависимость скорости ПВ от отношения длины ПВ к диаметру полости [10]. Из (1.10) очевидно, что при $h\xi_0(\Omega) = n\pi$, ($n = 1, 2, \dots$) вклад ПВ Био равен нулю, поэтому, выбирая соответствующие $H = h/a$ и Ω , можно управлять энергией поверхностной волны.

Полученные зависимости и приведенные в данной работе подходы позволяют определять параметры виброисточника для создания нужного типа волн с заранее заданными энергетическими показателями и направленностью.

Благодарности

Автор выражает свою сердечную благодарность академику НАН Украины, проф. В.Т. Гринченко и докт. физ.-мат. наук, проф. И.Т. Селезову за возможность представить и обсудить данную работу на научном семинаре Института гидромеханики НАНУ и за полезные советы и замечания в ходе ее обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
2. *Крауфорд Ф.* Берклевский курс физики. Волны. — М.: Наука, 1974. — Т. 3. 528 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2-х т. — М.: Наука, 1970. — Т. 2. 568 с.
5. *Сницер А.Р.* К проблеме излучения при вибрационных воздействиях на скважину // Материалы XIII-й международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича — Симф.: ТНУ, 2003. — С. 122–127.
6. *Сницер А.Р.* Влияние параметров цилиндрического источника упругих волн на энергию волн Био // Материалы XVI-й международной научной школы им. акад. С.А. Христиановича — Симф.: ТНУ, 2006. — С.250–255
7. *Сницер А.Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С.68–88.
8. *Biot M.A.* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // J. Appl. Physics. 1952. Vol. 23, No 9. pp. 997–1005.
9. *Miller G., Pursey H.* On the Partition of Energy between Elastic Waves in a Semi-Infinite Solid // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1955. — Vol. 233, No 1192. — pp. 55–69.
10. *Snitser A.R.* Surface Waves on a Cavity in a Semiinfinite Elastic Medium // Journal of Mathematical Sciences. — 2001. — Vol. 107, No 6. — pp. 4386–4394

11. *Snitser A.R.* Radiation problem of normal stress-loading of bore surface // 6-th International Congress on Industrial and Applied Math. // CD ICIAM 07 Program and Abstract book, P.50, ETH Zurich, Switzerland, 2007.
12. *Snitser A.R.* Radiation problem of normal stress-loading of bore surface // Proc. Appl. Math. Mech. — 2007. — Vol. 7, Iss. 1. — pp. 2040059–2040060

Получена 20.11.2008