

УДК 539.3

Плоская периодическая контактная задача для упругой многослойной плиты

Е. В. Величко, А. К. Приварников

Запорожский национальный университет,
Запорожье 69063.

E-mail: velichko_ev@mail.zp.ua, privarnikovak@mail.ru

Аннотация. Предлагается способ решения контактной задачи о вдавлении периодической системы одинаковых гладких штампов с плоскими подошвами в упругую многослойную плиту. На другую границу плиты действует периодическая система нагрузок. Деформация плиты плоская. Для построения интегрального уравнения задачи относительно контактных напряжений используются ранее введенные матрицы податливости многослойных плит. Предложен приближенный метод решения уравнения. Приведены численные результаты для трехслойной плиты.

1. Постановка проблемы и обзор публикаций

Пусть на верхнюю границу бесконечной упругой многослойной плиты действует периодическая система одинаковых гладких штампов с плоскими подошвами, а на другую границу действует уравнивающая ее периодическая система нормальных нагрузок (рис. 1). Требуется определить контактные давления под штампами.

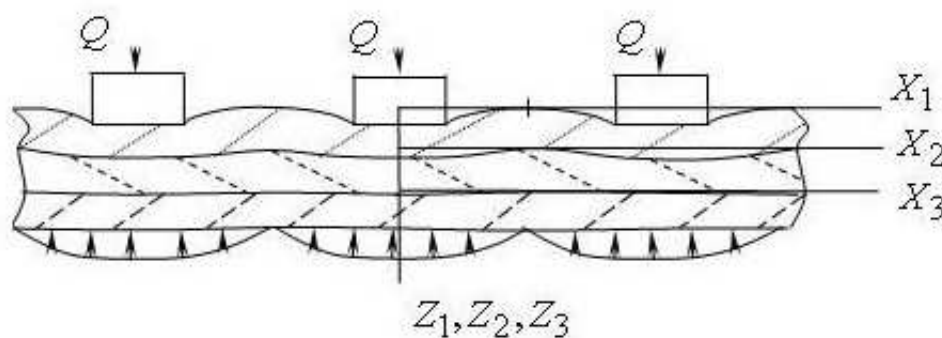


Рис. 1. Периодическая контактная задача для трехслойной плиты

Плита состоит из конечного числа упругих невесомых, изотропных, сцепленных между собой бесконечно длинных слоев. Деформация многослойной плиты

плоская. Расстояние между серединами соседних участков контакта равно $2l$. Длина подошвы каждого штампа — $2a$. На каждый штамп действует нормальная сила Q , направленная вдоль оси симметрии штампа. Каждый слой будем характеризовать толщиной h , модулем сдвига μ и величиной $\omega = 0,5/(1 - \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Периодические контактные задачи для упругой полуплоскости рассмотрены в классической монографии [1]. Горячева И.Г. и Торская Е.В. рассматривали пространственную периодическую контактную задачу о действии системы одинаковых цилиндрических штампов на упругий слой, сцепленный с упругим полупространством [2]. Бурнаева В.В. и Романенко Л.Г. исследовали периодическую задачу о вдавлении системы упругих полос в упругую полосу [3].

Для произвольных многослойных оснований периодическая контактная задача плоской теории упругости рассматривалась Ильманом В. М. и Приварниковым А. К. [4]. Позднее Приварников А. К. и Столярчук И. А. [5] возвратились к этой задаче. Приведенное в статье [5] решение базируется на методе функций податливости с использованием формулы суммирования Пуассона. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Статьи, посвященные контактной задаче плоской теории упругости о действии периодической системы одинаковых штампов с плоскими подошвами на многослойную плиту с любым конечным числом слоев, не удалось обнаружить. Для вывода интегрального уравнения поставленной задачи авторы используют матрицы податливости, введенные в [6].

2. Деформация многослойной плиты

Нумерацию слоев в плите проводим сверху вниз. В каждом слое вводим локальную декартову систему координат с началом на верхней границе слоя, как указано на рисунке. Все величины, которые относятся к слою с номером m , будем обозначать соответствующим верхним индексом. В тех случаях, когда номер слоя не указан, речь идет о произвольном слое плиты.

Считаем, что закон распределения нормальных нагрузок на нижней границе плиты описывается четной функцией $g(x)$, $x \in (-l, l)$. Граничные условия, заданные на одном периоде $(-l, l)$, имеют вид

$$\tau_{XZ}^1(x, 0) = 0, \quad w^1(x, 0) = 0, \quad |x| < a < l, \quad (2.1)$$

$$\sigma_z^n(x, h^n) = g(x), \quad \tau_{XZ}^n(x, h^n) = 0, \quad - \int_{-l}^l g(x) dx = Q. \quad (2.2)$$

Нужно определить функцию $\sigma(x) = \sigma_z^1(x, 0)$, $x \in (-a, a)$ которая описывает закон распределения нормальных напряжений под штампом. Заметим, что при указанных допущениях функции w^m , σ_z^m — четные по переменной x , а функции u^m , τ_{XZ}^m — нечетные ($m = 1, 2, \dots, n$).

В дальнейшем для удобства все линейные размеры будем относить к длине периода, который считаем равным 2π , то есть полагаем $l = \pi$. С учетом этого напряжения и перемещения в плите представим в виде тригонометрических рядов:

$$u^m = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^m(z) \sin(kx), \quad w^m = \frac{W_0^m(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} W_k^m(z) \cos(kx),$$

$$\sigma_z^m = \frac{\Lambda_0^m(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^m(z) \cos(kx), \quad \tau_{XZ}^m = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^m(z) \sin(kx).$$

Введем вспомогательные последовательности m -го слоя $\alpha_k^m, \delta_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$, которые связаны с коэффициентами разложения в ряды Фурье напряжений и перемещений на верхней границе этого слоя:

$$\sigma_z^m(x, 0) = 0.5\alpha_0^m + \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k^m \cos(kx), \quad \tau_{xz}^m(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k^m \sin(kx),$$

$$\mu^m w^m(x, 0) = 0.5\beta_0^m + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^m \cos(kx), \quad \mu^m u^m(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^m \sin(kx).$$

В работе [6] показано, что имеют место следующие соотношения:

$$\mu^m W_0^m = (1 - \omega^m)\alpha_0^m z + \beta_0^m,$$

$$2\mu^m W_k^m = \alpha_k^m (-\omega^m \bar{z} \bar{C} + (2 - \omega^m) \bar{S}) + 2\beta_k^m (\bar{C} - \omega^m \bar{z} \bar{S}) + 2\gamma_k^m ((1 - \omega^m) \bar{S} - \omega^m \bar{z} \bar{C}) - \delta_k^m \omega^m \bar{z} \bar{S}$$

Здесь $\bar{z} = kz$, $\bar{S} = sh(kz)$, $\bar{C} = ch(kz)$. Пользуясь условиями (2.1), построим вспомогательные последовательности α_k^1, δ_k^1 для первого слоя и последовательности $\alpha_k^{n+1}, \delta_k^{n+1}$ для нижней границы n -го слоя:

$$\alpha_k^1 = \frac{1}{k\pi} \int_{-a}^a \sigma(s) \cos ksd s, \quad \delta_k^1 = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{XZ}^1(s, 0) \sin ksd s = 0,$$

$$\alpha_k^{n+1} = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \cos ksd s, \quad \delta_k^{n+1} = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_{XZ}^n(s, h_n) \sin ksd s = 0. \quad (2.3)$$

В [6] было показано, что члены вспомогательных последовательностей β_k^1, α_k^1 и α_k^{n+1} связаны между собой соотношениями:

$$\beta_k^1 = \left(-\frac{1}{2\omega^1} + a_k\right)\alpha_k^1 + b_k\alpha_k^{n+1},$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Числа $a_k - \frac{1}{2\omega^1}$ и b_k являются левыми верхними элементами матриц A_k^1 и B_k^1 соответственно. Эти матрицы определяются при помощи рекуррентных формул [6]

$$B_k^m = (\Delta^m Q_k^m - A_k^{m+1} N_k^m)^{-1} B_k^{m+1},$$

$$A_k^m = (\Delta^m Q_k^m - A_k^{m+1} N_k^m)^{-1} (A_k^{m+1} M_k^m - \Delta_m P_k^m), \quad m = n-1, \dots, 1.$$

Здесь

$$M_k^m = \begin{pmatrix} C - \omega p S & -\varpi S - \omega p C \\ -\varpi S + \omega p C & C + \omega p S \end{pmatrix}, \quad N_k^m = 2\omega \begin{pmatrix} S - pC & -pS \\ pS & S + pC \end{pmatrix},$$

$$Q_k^m = \begin{pmatrix} C - \omega p S & \varpi S - \omega p C \\ \varpi S + \omega p C & C + \omega p S \end{pmatrix}, \quad P_k^m = \begin{pmatrix} (1 - 0.5\omega)S - pC & -0.5\omega p S \\ 0.5\omega p S & (1 - 0.5\omega)S + pC \end{pmatrix}.$$

$$\Delta^m = \frac{\mu^{m+1}}{\mu^m}, \quad p = kh^m, \quad C = \operatorname{ch} p, \quad S = \operatorname{sh} p, \quad \omega = \omega^m, \quad \varpi = 1 - \omega.$$

Исходными для начала процесса являются матрицы:

$$B_k^n = (N_k^n)^{-1}, \quad A_k^n = (N_k^n)^{-1} M_k^n = -B_k^n M_k^n.$$

3. Вывод интегральных уравнений задачи

Рассмотрим выражение $w^1(x, 0) - \frac{\beta_0^1}{2\mu^1}$, отличающееся на константу от функции, описывающей нормальные перемещения точек верхней границы плиты:

$$\mu^1 w^1(x, 0) - \frac{\beta_0^1}{2} = I = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^1 \cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle (-\frac{1}{2\omega^1} + a_k) \alpha_k^1 + b_k \alpha_k^{n+1} \rangle \cos kx \quad (3.1)$$

Подставим в эту формулу вместо членов вспомогательных последовательностей их выражения (2.3) и используем равенство [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ks \cos kx}{k} = -\frac{1}{4} \ln(4(\cos s - \cos x)^2).$$

Учтем, что для $x \in [-a, a]$ левая часть формулы (3.1) есть константа. Получим тогда интегральное уравнение относительно контактных напряжений $\sigma(x)$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sigma(s) \langle \frac{1}{4\omega^1} \ln(2|\cos s - \cos x|) + l(x, s) \rangle ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) L(x, s) ds = \tilde{C}. \quad (3.2)$$

Здесь \tilde{C} — неизвестная константа,

$$l(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \cos ks \cos kx, \quad L(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos ks \cos kx.$$

Ряды для $l(x, s)$ и $L(x, s)$ быстро сходятся при любых значениях x, s , т. к. коэффициенты $a_k = O((kh^1)^2 \exp(-2kh^1))$, $b_k = O(kh^1 \exp(-kh^1))$ при $k \rightarrow \infty$ [6]. Интегральное уравнение (3.2) нужно дополнить условием равновесия плиты

$$\int_{-a}^a \sigma(s) ds = -Q. \quad (3.3)$$

Сделаем замену переменных в уравнениях (3.2), (3.3):

$$t = \frac{2(1 - \cos s)}{1 - \cos a} - 1, \quad t = \frac{2(1 - \cos x)}{1 - \cos a} - 1.$$

Получим интегральное уравнение относительно новой неизвестной функции $f(t)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \langle \ln |y - t| + r(y, t) \rangle dt + R(y) = \tilde{C} \quad (3.4)$$

с дополнительным условием

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{Q}{2\omega}. \quad (3.5)$$

В записи этих уравнений использованы следующие обозначения:

$$f(t) = \frac{\sin^2(0.5a)}{2\omega^1} \frac{\sigma(s(t))}{\sin s}, \quad r(y, t) = 4\omega^1 l(x(y), s(t)) + \ln(1 - \cos(a)),$$

$$R(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(s) L(x(y), s) ds,$$

$$s = \arccos(1 - 0.5t(1 - \cos(a))), \quad x = \arccos(1 - 0.5y(1 - \cos(a)))$$

4. Приближенное решение интегрального уравнения

Приближенное решение интегрального уравнения (3.4) относительно функции $f(t)$ с дополнительным условием (3.5) ищем в виде

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{i=0}^k f_i T_i(t). \quad (4.1)$$

Здесь $T_i(t)$ — полиномы Чебышева первого рода. Подставим (4.1) в (3.5), воспользуемся свойством ортогональности полиномов Чебышева и получим $f_0 = Q/(4\pi\omega)$. Для определения остальных неизвестных f_i и \tilde{C} подставим (4.1) в (3.4) и потребуем выполнения точного равенства левой и правой частей полученного приближенного равенства в $m+1$ точках интервала $(-1, 1)$. В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\frac{f_i}{f_0}$ и \tilde{C}

$$\tilde{C} + \sum_{i=1}^m P_i(y_j) \frac{f_i}{f_0} = P_0(y_j).$$

Здесь

$$P_0(y) = -R(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(y,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad P_i(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_i(t)r(y,t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{T_i(t)}{i},$$

$i = 1, 2, \dots, m$, y_j , $j = 1, \dots, m+1$ узлы коллокации из интервала $(-1, 1)$. По найденным f_i искомая функция $\sigma(x)$ может быть представлена приближенной формулой

$$\sigma(x) \approx \frac{2\omega \cos(x/2)}{\sqrt{\sin^2(a/2) - \sin^2(x/2)}} \sum_{i=0}^k f_i T_i\left(\frac{2(1 - \cos x)}{1 - \cos a}\right).$$

В качестве узлов y_i можно взять узлы квадратурной формулы Гаусса для промежутка $[-1, 1]$ с весом $w(x) = 1$. Число узлов m увеличивается до тех пор, пока два последовательных приближения решения контактной задачи не совпадут в пределах заданной точности. Численные эксперименты показали, что получаемые приближенные значения контактных напряжений под штампами практически не зависят от способов выбора узлов, подобных указанному.

5. Примеры

Приведем результаты решения контактной задачи для трехслойной плиты со следующими параметрами: толщины слоев $h^1 = h^3 = 0.5$, $h^2 = 1$, коэффициенты $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0.7$. Длина каждого штампа $2a = \pi$. Нормальные напряжения на нижней границе плиты постоянные, то есть $g(x) = -1$ и $Q = 2\pi$.

Графики нормальных давлений $q(x) = -\sigma(x)$ под штампом для случаев, когда модули сдвига двух внешних слоев совпадают: $\mu^1 = \mu^3 = \mu$, а модуль сдвига второго слоя принимает одно из трех значений: $\mu^2 = 100\mu$, $\mu^2 = 10\mu$, $\mu^2 = \mu$, приведены на рисунках 2, 3 и 4 соответственно. В последнем случае имеем дело фактически с однослойной плитой толщины 2.

Контактные давления под штампами для однослойной плиты при увеличении ее толщины до бесконечности будут стремиться к соответствующим контактным давлениям под штампами для задачи о действии периодической системы штампов на упругую полуплоскость. На рис. 5, для сравнения, приведен график контактных давлений под одним из штампов с плоской подошвой периодической системы штампов, действующих на упругую полуплоскость, которые подсчитаны по формуле Садовского [1].

Если модуль сдвига верхнего слоя намного больше модуля сдвига среднего слоя, в области контакта возникают растягивающие нормальные напряжения σ_z (рис. 2). Для непериодической контактной задачи этот эффект исследован в статье [8]. Наличие системы штампов приводит к тому, что может быть несколько зон, в которых контактные давления отрицательны. Этот эффект требует дальнейшего изучения.

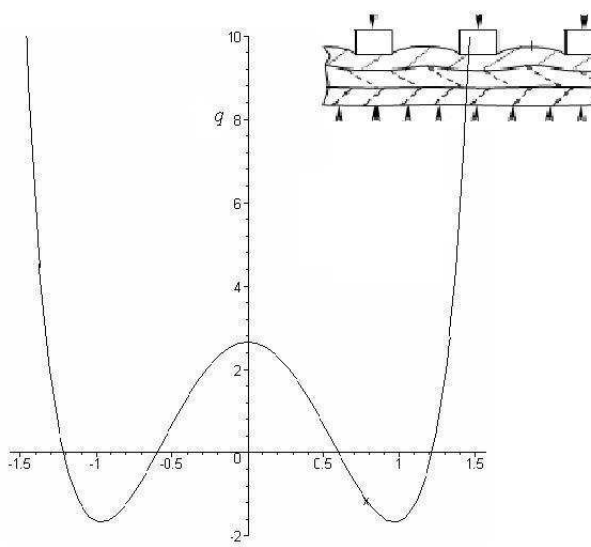


Рис. 2.

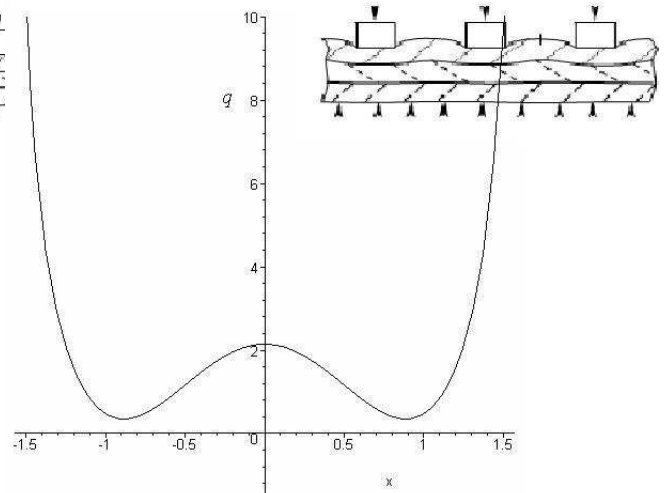


Рис. 3.

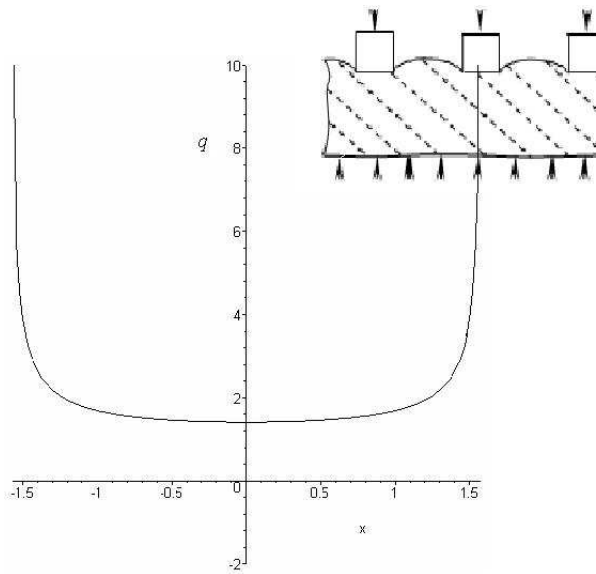


Рис. 4.

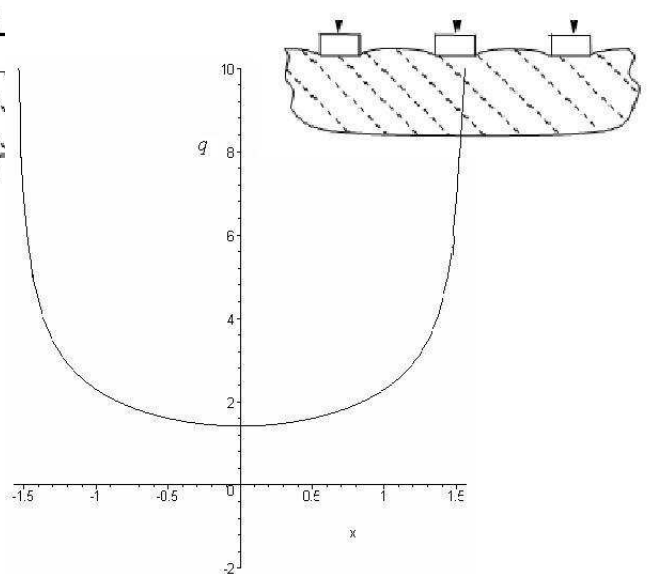


Рис. 5.

Список цитируемых источников

1. *Галин Л.А.* Развитие теории контактных задач в СССР // Под ред. Л.А.Галина. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
2. *Горячева И.Г., Торская Е.В.* Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. — 1995. — Т. 16, №4. — С. 642–652.
3. *Бурнаева В.В., Романенко Л.Г.* Периодическая задача о вдавливании системы упругих полуполос в полосу // Изв. РАН Мех. Тверд. тела. — 1999. — 6.— С. 12–19.
4. *Ильман В.М., Приварников А.К.* Плоская периодическая контактная задача для многослойного упругого основания. В кн.: Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск, 1971. — С. 36–57.
5. *Приварников А.К., Столярчук І.А.* Дія періодичної системи штампів на багатшарову основу // Вісник ЗДУ: Серія фізико-математичні науки. — 1998. — №2— С. 105–110.
6. *Величко О.В.* Плоска деформація пружної багатшарової плити під дією періодичної системи навантажень // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. — 2004. — №6 — Вип. 8., Т. 1 — С. 162–170.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
8. *Матушко Ю.О., Приварников А.К.* Деформирование гладким штампом неограниченной упругой плиты, спаянной с упругим полупространством // Теорет. и прикладная механика. — 2003. — Вып.38. — С. 15–19.

Получена 15.08.2007