

УДК 539.3

Изгиб цилиндрической прямоугольной защемлённой панели

А. В. Пан

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. E-mail: tsah2@ukr.net

Аннотация. Исследуется напряжённое состояние защемлённой прямоугольной пологой цилиндрической панели при действии равномерного давления. Задача приведена к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Численные оценки решения бесконечной системы получены методом улучшенной редукции. Впервые выполнено улучшение сходимости решения во всей области его определения. Решение системы проводится методом последовательных приближений.

1. Математическая модель панели

Определение 1. «Панелью» будем называть следующую граничную задачу уравнений математической физики на прямоугольнике (Π и ν — вещественные, $(\Xi_{\gamma_0}^+)^2$ — чисто мнимое, искомая функция Φ — комплексная):

- Дифференциальное уравнение: $\Delta^2 \Phi - (\Xi_{\gamma_0}^+)^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Pi$
- В качестве необходимых системе двух уравнений четвёртого порядка четырёх граничных условий выступают (через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначаем производную по нормали к границе, через $\frac{\partial}{\partial \tau}$ — производную по касательной):
 1. $Re \Phi$
 2. $Re \frac{\partial \Phi}{\partial n}$
 3. $Im((2 + \nu) \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n \partial \tau^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3})$
 4. $Im g$, где $g = -\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$

Искомая Φ при этом определяется с точностью до константы (чисто мнимой)

- Граничные условия чётны, как по x , так и по y

- Граничные условия 2. и 3. однородны

2. Пространство «панелей»

Зафиксируем какие-то ν , a , b и $\Xi_{\gamma_0}^+$. Тогда любая «панель» полностью определена значением Π и заданием функций $Re \Phi$ и $Im g$ на Γ -образной четверти границы.

Нетрудно заметить, что множество «панелей» обладает структурой линейного пространства над полем вещественных чисел. В частности, нулевым элементом пространства является «панель» с однородным уравнением и однородными граничными условиями.

Приведем несколько примеров подмножеств пространства «панелей»:

- «Панели» с однородными граничными условиями будем называть «защемлёнными панелями». Очевидно, что множество «защемлённых панелей» будет одномерным подпространством. «Защемлённую панель» с правой частью Π обозначим через ω^Π
- Ясно, что $\forall \Pi \in R : \omega^\Pi = -\Pi \cdot \omega^{-1}$, поэтому любая «защемлённая панель» ω^Π сводится к «защемлённой панели» ω^{-1}
- Подпространство «панелей» с однородным уравнением (т. е. «панели» с $\frac{p_0}{D} = 0$) обозначим через $\Omega_{homogeneous}$. Кстати, известная задача из [2], на примере которой В.Т. Гринченко описал разнообразные методы решения регулярных бесконечных систем, в том числе и метод лимитант, может служить примером объекта подпространства $\Omega_{homogeneous}$ (с $R = +\infty$)
- Подмножество «панелей» с $\Pi = 1$ (граничные условия любые) обозначим через $\Omega_{particular}$. В соответствии с общепринятой практикой, мы будем подбирать $\omega^{horizontal} \in \Omega_{particular}$ с заведомо известным решением («частное решение» «панели» ω^{-1}) и сводить «панель» ω^{-1} к «панели» $\omega \in \Omega_{homogeneous}$: $\omega^{-1} = \omega - \omega^{horizontal}$. Граничными условиями для «панели» ω будут граничные значения «панели» $\omega^{horizontal}$. Частное решение «панели» ω^{-1} нетрудно найти, если искать его зависящим только от одной из двух переменных. Так мы найдём «панель»

$$\Phi = \begin{cases} \frac{-x^2}{2 \cdot (\Xi_{\gamma_0}^+)^2}, & R < +\infty \\ \frac{(x^2 - a^2)^2}{4!}, & R = +\infty \end{cases}, \text{ которую обозначим через } \omega^{horizontal}. \text{ Альтернативой является «панель» } \Phi = \frac{(y^2 - b^2)^2}{4!}, \text{ которую обозначим через } \omega^{vertical}$$

3. Постановка задачи

Имеется защемлённая цилиндрическая панель с радиусом кривизны R , на которую снизу действует равномерное давление p_0 . Не нарушая общности, толщину

панели считаем равной единице. Коэффициент Пуассона пусть равен ν , модуль Юнга пусть равен E , жёсткость пусть равна D .

Согласно [4], математическая модель получается такой, как «защелённая панель» $\omega_{\frac{R_0}{D}}$ с $(\Xi_{\gamma_0}^+)^2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3 \cdot (1-\nu^2)}}{i \cdot R}$, при этом искомые физические величины представляются так:

1. $\frac{i \cdot (\Xi_{\gamma_0}^+)^2 \cdot R}{E} \cdot Re \Phi$ — прогиб (в направлении давления)
2. $\frac{-E}{12 \cdot (1-\nu^2)^2} \cdot Re(\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2})$ — момент
3. $-D \cdot Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3}$ — обобщённая перерезывающая сила Кирхгофа

4. Общее решение однородного уравнения

4.1. Метод суперпозиции

Введём счётное множество гармоник γ ($\gamma_m = \frac{m \cdot \pi}{b}$, где $m \in N$) и λ ($\lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{a}$, где $n \in N$). Выделим среди $\Omega_{homogeneous}$ счётное множество «однородных панелей», решающихся разделением переменных:

- «Панель» ω_{γ_0} : $\Phi = \begin{cases} A_{\gamma_0}^+ \cdot ch(\Xi_{\gamma_0}^+ \cdot x), & R < +\infty \\ \frac{i \cdot x^2}{2}, & R = +\infty \end{cases}$
- «Панель» ω_{λ_0} : $\Phi = \frac{i \cdot y^2}{2}$
- При $R < +\infty$ «панели» $\omega_{\lambda^j}^j$: $\Phi = \cos(\lambda \cdot x) \cdot A_{\lambda}^j \cdot ch(\Xi_{\lambda}^j \cdot y)$, где $\Xi_{\lambda}^{+, -} = \sqrt{\lambda^2 \pm \lambda \cdot \frac{\Xi_{\gamma_0}^+}{i}}$
- При $R < +\infty$ «панели» $\omega_{\gamma^j}^j$: $\Phi = \cos(\gamma \cdot y) \cdot A_{\gamma}^j \cdot ch(\Xi_{\gamma}^j \cdot x)$, где $\Xi_{\gamma}^{+, -} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma^2 + (\Xi_{\gamma_0}^+)^2 \pm \sqrt{4 \cdot \gamma^2 \cdot (\Xi_{\gamma_0}^+)^2 + (\Xi_{\gamma_0}^+)^4}}{2}}$
- При $R = +\infty$ «панели» ω_{λ} : $\Phi = \cos(\lambda \cdot x) \cdot (ch(\lambda \cdot y) + B_{\lambda} \cdot \lambda \cdot y \cdot sh(\lambda \cdot y))$
- При $R = +\infty$ «панели» ω_{γ} : $\Phi = \cos(\gamma \cdot y) \cdot (ch(\gamma \cdot x) + B_{\gamma} \cdot \gamma \cdot x \cdot sh(\gamma \cdot x))$

Комплексные параметры $A_{\gamma_0}^+$, A_{γ}^j , A_{λ}^j и вещественные B_{γ} , B_{λ} выбираются из граничных условий 2. и 3. в определении панели (в частности, $A_{\gamma_0}^+ = \frac{a}{(\Xi_{\gamma_0}^+)^3 \cdot sh(\Xi_{\gamma_0}^+ \cdot a)}$, $B_{\gamma} = \frac{-1}{1 + \gamma \cdot a \cdot ch(\gamma \cdot a)}$ и т. д.).

$\forall \omega \in \Omega_{homogeneous}$: «однородная панель» ω обязана как-то разлагаться по этому счётному множеству «панелей», т. е. можно записать:

$$\omega = \omega_{\lambda_0} \cdot \xi_{\lambda_0} + \begin{cases} (\omega^{regular} + \omega_{\gamma_0}) \cdot \xi_{\gamma_0}, & R < +\infty \\ \omega^{regular} + \omega_{\gamma_0} \cdot \xi_{\gamma_0}, & R = +\infty \end{cases}, \text{ где}$$

$$\omega^{regular} = \begin{cases} \sum_{\gamma=\gamma_1}^{\infty} \sum_{j=-}^+ \xi_{\gamma}^j \cdot \omega_{\gamma}^j - \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} \sum_{j=-}^+ \xi_{\lambda}^j \cdot \omega_{\lambda}^j, & R < +\infty \\ \sum_{\gamma=\gamma_1}^{\infty} \xi_{\gamma} \cdot \omega_{\gamma} - \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} \xi_{\lambda} \cdot \omega_{\lambda}, & R = +\infty \end{cases}.$$

Это разложение сводит «панель» ω к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно вещественных коэффициентов ξ_{γ_0} , ξ_{λ_0} , ξ_{λ} и ξ_{γ} (при $R = +\infty$) или ξ_{γ_0} , ξ_{λ_0} , ξ_{λ}^j и ξ_{γ}^j (при $R < +\infty$). Разложение называется «методом суперпозиции» (method of superposition) и связано с именами французских математиков XIX века Ламе (Lame) и Матьё (Mathieu) [6, раздел 3.1]. Хорошо описано в монографии [2].

В 5.1 мы покажем, что нахождение неопределённых коэффициентов ξ_{γ_0} и ξ_{λ_0} можно оставить на потом. Таким образом, главное — научиться решать подпространство «однородных панелей» с $\xi_{\gamma_0} = 0$ и $\xi_{\lambda_0} = 0$. Это подпространство обозначим через $\Omega_{regular} \subset \Omega_{homogeneous}$. Для «однородных панелей» подпространства $\Omega_{regular}$ характерно то, что для их решения необязательно знать нулевые гармоники граничных условий.

4.2. Два способа редукции «панели» типа $\Omega_{regular}$

4.2.1. Простая редукция

Определение 2. Оставим в разложении «панели» $\omega^{regular} \in \Omega_{regular}$, содержащем бесконечное множество неопределённых коэффициентов, только первые p пар неопределённых коэффициентов ($\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_p$, $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_p$) неизвестными, а остальные посчитаем нулевыми. Тогда вместо положенной бесконечной системы решать придётся лишь конечную систему. Такое упрощение «панели» $\omega^{regular}$ называем «простой редукцией» и обозначаем через $\overline{\omega^{regular}}$. Этот, пожалуй, самый элементарный способ приближённого решения бесконечной системы $\omega^{regular}$ [5, §2, Теорема IV], предложил Фурье (Fourier) ещё в 1807 г. [6, стр. 8 (раздел 2)].

Замечание. Как будет более подробно рассказано в разделе 4.2.4, приближение $\overline{\omega^{regular}} \approx \omega^{regular}$ выглядит грубо, если мы ищем производные второго и выше порядков от Φ (среди трёх наших физических величин один прогиб только их не использует).

4.2.2. Простая интерпретация метода улучшенной редукции

Определение 3. Введём для «панели» $\omega^{regular} \in \Omega_{regular}$ понятие «сопряжённой панели»: $\omega^* = \omega^{etalon} - \omega^{regular}$, где $\omega^{etalon} \in \Omega_{regular}$ — некоторая «эталонная панель» с известным решением. Теперь на право называться «простой редукцией» «панели» $\omega^{regular}$ сможет претендовать не только $\overline{\omega^{regular}}$, но и $\omega^{etalon} - \overline{\omega^*}$.

Теорема 1. *Обретя, благодаря определению 3, две «простые редукции», мы получили возможность подбирать такие коэффициенты k и k^* (решать задачу оптимизации), чтобы удовлетворялась система:*

$$\begin{cases} k \cdot \overline{\omega^{regular}} + k^* \cdot (\omega^{etalon} - \overline{\omega^*}) \approx \omega^{regular} \\ k + k^* = 1 \end{cases}$$

Именно этой возможностью пользуется метод, известный под названием «улучшенная редукция» [2], т. е. подбором коэффициентов k и k^ мы можем выйти и на то приближение «панели» ω , которое известно под названием «улучшенная редукция».*

Доказательство. Действительно, возьмём регулярную бесконечную систему, которая имеет те же коэффициенты, что регулярная система, соответствующая нашей «панели», но решение которой — константа 1. Тогда «панель», которой соответствует такая система, ведёт себя как раз, как ω^{etalon} . А в роли k^* выступает предел решения системы, соответствующей нашей «панели». \square

Замечание. Нетрудно доказать, что если у нас есть «эталонная панель» ω^{etalon} , то $\forall C \in R$: взяв за «эталонную панель» «панель» $C \cdot \omega^{etalon}$, мы никак не изменим множество возможных приближений «панели» $\omega^{regular}$. Т. е. «эталонную панель» можно задавать с точностью до умножения на скаляр.

4.2.3. Вывод «эталонной панели» из терминологии регулярных систем

Для $R = +\infty$ наша задача, как известно, уже решалась [6]. И уже тогда И.Г. Бубнову пришла в голову мысль рассмотреть регулярную бесконечную систему, что имеет решением константу 1 и играет ключевое значение для проведения улучшенной редукции, как разложение некоторой «панели» методом суперпозиции. Он попробовал просуммировать бесконечные ряды и внезапно получил для функции Φ аналитическое выражение [6, формула (21) в 3.2]. «Панель», которая соответствует выражению, выписанному И.Г. Бубновым, поразительным образом поддаётся записи в терминологии введённого нами линейного пространства с помощью некоторых частных его объектов: $4! \cdot (\omega^{vertical} - \omega^{horisontal})$. Возникает мысль, не пошла ли традиционная методика улучшенной редукции по слишком извилистому пути?

4.2.4. Вывод «эталонной панели» по критерию неустранимой погрешности простой редукции

Любая конечная комбинация «панелей» типа $\Omega_{homogeneous}$, выписанных в 4.1, будет точно решаться простой редукцией, но есть ещё один простой способ составить «панель» типа $\Omega_{homogeneous}$ — взять разность двух неодинаковых «панелей» типа $\Omega_{particular}$ (мы не случайно выписали целых две «панели» типа $\Omega_{particular}$).

Несложно доказать, что:

- При $R = +\infty$ такая разность $\omega^{vertical} - \omega^{horizontal}$ уже принадлежит подпространству $\Omega_{regular}$
- при $R < +\infty$ $\omega^{vertical} - \omega^{horizontal} - \omega_{\gamma_0} \in \Omega_{regular}$

Это и будет нашим определением «эталонной панели».

В монографии [2] впервые описан эффект: Простая редукция страдает неустрашимой никаким $p \rightarrow \infty$ погрешностью напряжений на границе, но улучшенная редукция свободна от этого недостатка. Нетрудно вывести критерий годности «панели» на роль «эталонной панели»:

«Панель» ω^{etalon} вызывает вышеупомянутый эффект тогда и только тогда, когда не поддаётся простой редукции, т. е. когда ω^{etalon} качественно отличается от ω^{etalon} .

5. Когда для однородного уравнения заданы конкретные граничные условия заземления $\omega^{horizontal}$

5.1. Отделение коэффициентов ξ_{γ_0} и ξ_{λ_0} от остальных

Лемма 1. Граничные условия для «панели» $\begin{cases} (\omega^{regular} + \omega_{\gamma_0}) \cdot \xi_{\gamma_0}, & R < +\infty \\ \omega^{regular} + \omega_{\gamma_0} \cdot \xi_{\gamma_0}, & R = +\infty \end{cases}$ с точностью до константы совпадают с нашими граничными условиями $\omega^{horizontal}$.

Доказательство. Граничные значения «панели» ω_{λ_0} представляют из себя константы. \square

Теорема 2. При $R < +\infty$ граничные условия для «панели» $\omega^{regular} - \omega_{\gamma_0}$ — граничные значения «панели» $-\omega_{\gamma_0}$.

Доказательство. Поскольку наши граничные условия $\omega^{horizontal}$ — константы, по лемме 1 граничные условия для «панели» $(\omega^{regular} + \omega_{\gamma_0}) \cdot \xi_{\gamma_0}$ — тоже константы. Значит, константами являются граничные условия для «панели» $\omega^{regular} + \omega_{\gamma_0}$, и граничными условиями для «панели» $\omega^{regular}$ являются граничные значения «панели» $-\omega_{\gamma_0}$ с точностью до константы. \square

Теорема 3. При $R = +\infty$ граничные условия для «панели» $\omega^{regular}$ совпадают с нашими граничными условиями $\omega^{horizontal}$.

Доказательство. Граничные условия «панели» ω_{γ_0} — константы, следовательно, граничные условия для «панели» $\omega^{regular}$ те же, что и для «панели»

$\begin{cases} (\omega^{regular} + \omega_{\gamma_0}) \cdot \xi_{\gamma_0}, & R < +\infty \\ \omega^{regular} + \omega_{\gamma_0} \cdot \xi_{\gamma_0}, & R = +\infty \end{cases}$, которые, согласно лемме 1, с точностью до константы совпадают с нашими граничными условиями $\omega^{horizontal}$. \square

Замечание. Что касается коэффициентов ξ_{γ_0} и ξ_{λ_0} , то они могут после решения «панели» $\omega^{regular}$ быть найдены из системы двух уравнений: одно — для $Im g_{\gamma_0}$, другое — для $Im g_{\lambda_0}$. В случае $R = +\infty$ a-priori видно, что они равны нулю.

5.2. Численные результаты

5.2.1. Замечания к графикам

Мы численно решим «защелённую панель» ω^{-1} с $a = 50$, $b = 50$, $\nu = \frac{1}{4}$ два раза. Один раз при $R = +\infty$, второй раз — при $R = 200$. Точность метода улучшенной редукции, т. е. порядок p , зададим равным 100. Графики следуют парами для сравнения случая $R = +\infty$ (слева) со случаем $R = 200$ (справа).

Несколько замечаний к графикам:

- В углах $Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3}$, а поскольку $Re \Phi = const$ на границе, $Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3} = 0$. Стало быть, в углах перерезывающая сила должна равняться нулю. Можно проконтролировать графики 3 и 5
- В углах $Re \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = Re \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}$, а поскольку $Re \Phi = const$ на границе, $Re \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0$. Стало быть, в углах и момент тоже должен равняться нулю. Можно проконтролировать графики 2 и 4
- Графики 3 и 5 для случая $R = +\infty$ — это повторённые расчёты. Аналогичные графики строились в [6]. Можно провести сравнение
- Можно проверить, уменьшаются ли амплитуды трёх наших физических величин при увеличении выпуклости панели (т. е. при уменьшении R)

5.2.2. Прогиб панели (точнее, $Re \Phi$)

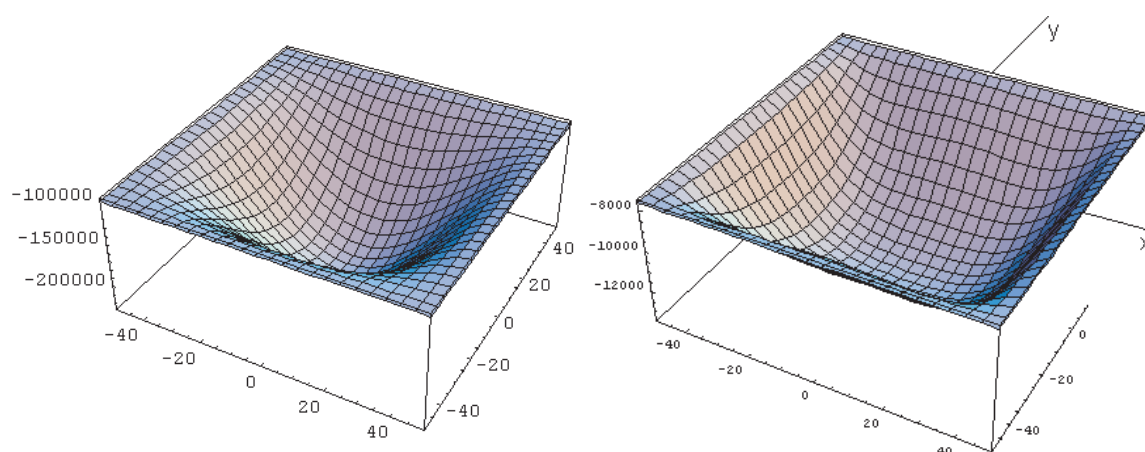


Рис. 1. Прогиб

5.2.3. Момент и перерезывающая сила на границе $y = b$ (вдоль цилиндра)

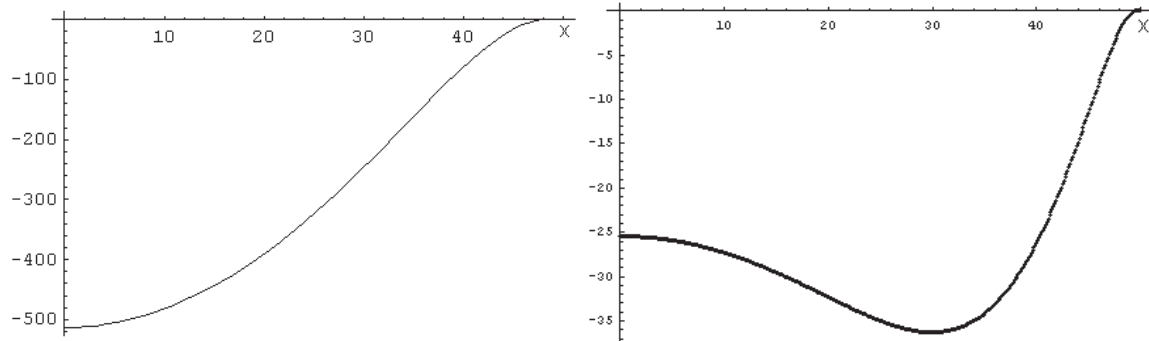


Рис. 2. Момент (точнее, $Re(\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}) = Re(\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})$)

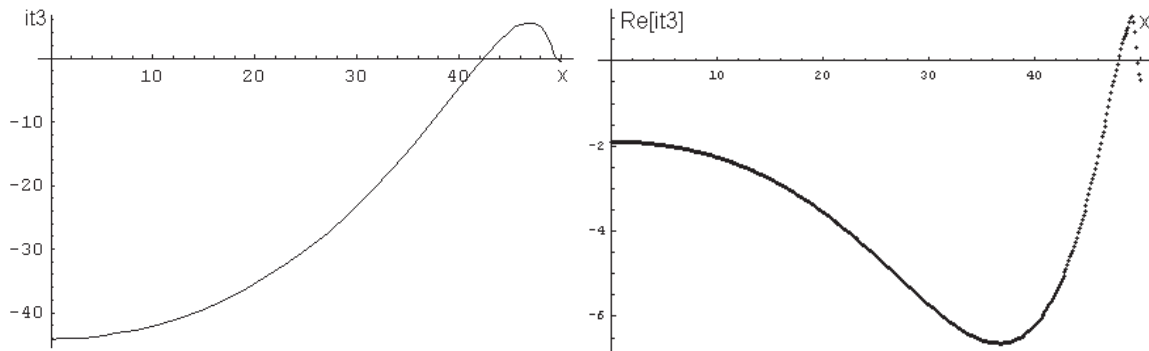


Рис. 3. Перерезывающая сила (точнее, $Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}$)

5.2.4. Момент и перерезывающая сила на границе $x = a$ (поперёк цилиндра)

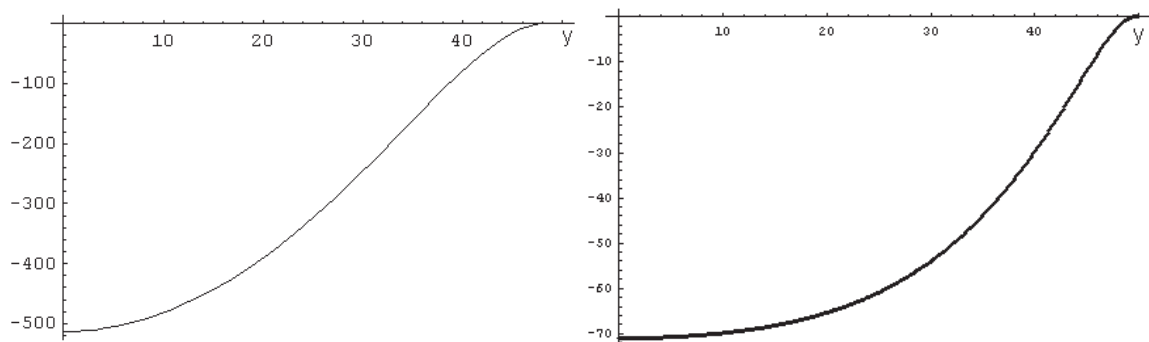


Рис. 4. Момент (точнее, $Re(\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}) = Re(\nu \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2})$)

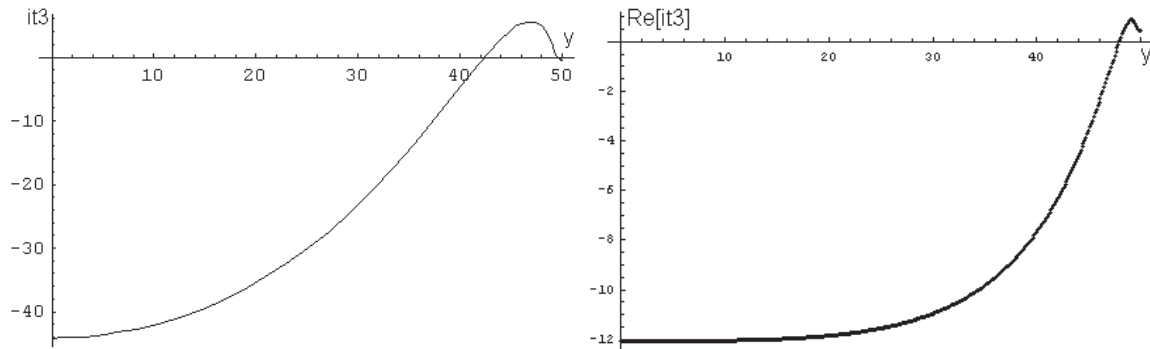


Рис. 5. Перерезывающая сила (точнее, $Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = Re \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}$)

Список цитируемых источников

1. *Maxwell J.C.* Reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress // Proc. London Math. Soc. — 1868. — № 2. — С. 102–105.
2. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К: Наукова думка, 1978. — 100 с.
3. *Коялович Б.М.* Исследования о бесконечных системах линейных уравнений // Известия физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1930. — Т. 3. — С. 41–167.
4. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И.* Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Под редакцией члена-корреспондента АН УССР А. Н. Гузя. — Киев: Наук. думка, 1974. — 272 с.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближённые методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962. — 695 с.
6. *Meleshko V.V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus 'engineering' solutions // J. Elasticity. — 1997. — № 1. — С. 1–50.

Получена 5.05.2007