Динамические системы, вып. 21 (2006), 54–60

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 512.7 : 514.7

О базисных инвариантах поля дифференциальных инвариантных рациональных функций линейчатой поверхности для действия группы $G = 2SL(2, R)$

А.М. Сухтаева, Т.М. Шамилев
Крымский инженерно-педагогический университет
Симферополь 95000

Аннотация. В работе найдена конечная система образующих дифференциального поля дифференциальных инвариантных рациональных функций линейчатой поверхности для действия группы $G = 2SL(2, R)$ и решена задача восстановления линейчатой поверхности по ним.

1. Введение

В монографии [1] изложен подход к задачам дифференциальной геометрии кривых, основанной на идеях теории инвариантов. Отличительной особенностью этого подхода является то, что рассматривается и изучается дифференциальное поле всех дифференциальных инвариантных рациональных функций кривой и пути. Это позволяет привлечь к изучению геометрии кривых методы дифференциальной алгебры. В этой связи, прежде всего, ставится задача нахождения конечного числа базисных инвариантов для различных групп и изучение соотношений между ними. Аналогичные задачи рассматривались в работах [2]–[3]. В различных областях рассматриваются и изучаются вопросы линейчатой геометрии и ее приложений, как например в работах [4]–[5]. Изучение свойств линейчатых поверхностей методами дифференциальной алгебры для действий ортогональных групп рассматривались в работах [6]–[9]. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для действия группы $SL(2, R)$.

Целью данной работы является: 1. Нахождение конечного числа образующих дифференциального поля дифференциальных инвариантных рациональных функций линейчатой поверхности для действия группы $SL(2, R)$. 2. Изучение вопроса о восстановлении линейчатой поверхности по найденным образующим.

2. Результаты

В данной работе мы будем придерживаться терминологии и обозначений принятых в работах [8] и [9].

Пусть $V = R^2$ — векторное пространство над полем вещественных чисел R. $z(t,u) = x(t,u) + uy(t,u)$ (где $x(t) = (x_1(t), x_2(t)), y(t) = (y_1(t), y_2(t))$) — линейчатая поверхность в V. $C\langle V\rangle$ — дифференциальное поле дифференциальных рациональных функций линейчатой поверхности $z(t,u)$. $(C\langle V\rangle)^G$ — подполе в $C\langle V\rangle$, состоящее из всех G - инвариантных рациональных функций для действия группы $G = SL(2,R)$. $[a,b]$ — покомпонентный определитель векторов a и b.

Теорема 1. *Дифференциальными образующими поля $(C\langle V\rangle)^G$ являются d-многочлены:*

$$[x + uy, \dot{x} + u\dot{y}], [\dot{x} + u\dot{y}, \ddot{x} + u\ddot{y}], [\dot{x} + u\dot{y}, y] \tag{2.1}$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1 ([1]). *Для любых $2n$ n-мерных векторов $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n$ многочлены*

$$[x_1x_2,\ldots,x_n], [x_0x_2,\ldots,x_n], [x_1x_0x_3,\ldots,x_n],\ldots$$
$$\ldots,[x_1x_2\ldots x_{n-1}x_0], [x_0y_2\ldots y_n],\ldots,[x_ny_2\ldots y_n]$$

удовлетворяют тождеству

$$\sum_x \pm[x_1x_2\ldots x_n][x_0y_2\ldots y_n] = 0, \tag{2.2}$$

где левая часть состоит из $n+1$ членов и является кососимметрической полилинейной формой от $x_0, x_1, \ldots, x_n$, порожденной многочленом $[x_1x_2\ldots x_n][x_0y_2\ldots \ldots y_n]$.

Лемма 2. *d-многочлены $[x + uy, y], [\dot{x} + u\dot{y}, \dot{y}]$ d-рационально выражаются через d-многочлены* (2.1)

Доказательство. Рассмотрим тождество (2.2) для системы линейчатых поверхностей и путей:
$x + uy, \dot{x} + u\dot{y}, \ddot{x} + u\ddot{y}, y$:

$$[x+uy, \dot{x}+u\dot{y}][\ddot{x}+u\ddot{y}, y] - [\ddot{x}+u\ddot{y}, \dot{x}+u\dot{y}][x+uy, y] + [\ddot{x}+u\ddot{y}, x+uy][\dot{x}+u\dot{y}, y] = 0. \tag{2.3}$$

Легко видеть, что:

$$[\ddot{x} + u\ddot{y}, x + uy] = [\dot{x} + u\dot{y}, x + uy]'_t \tag{2.4}$$

$$[\ddot{x} + u\ddot{y}, y] = [\dot{x} + u\dot{y}, y]'_t - [\dot{x} + u\dot{y}, \dot{y}] \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) получаем:

$$[\dot{x}+u\dot{y},\dot{y}][x+uy,y]-[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}][\dot{x}+u\dot{y},\dot{y}]=$$
$$[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]'_t[\dot{x}+u\dot{y},y]-[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}][\dot{x}+u\dot{y},y]'_t \quad (2.6)$$

Рассмотрим тождество (2.2) для системы линейчатых поверхностей и путей: $x+uy, y, \dot{y}, \ddot{y}$:

$$[x+uy,y][\dot{y},\ddot{y}]-[\dot{y},y][x+uy,\ddot{y}]+[\dot{y},x+uy][\dot{y},\ddot{y}]=0. \quad (2.7)$$

Легко видеть, что:

$$[x+uy,\dot{y}]=[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]'_t+[\dot{x}+u\dot{y},y]. \quad (2.8)$$

$$[x+uy,\ddot{y}]=[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]''_{tu}+[\dot{x}+u\dot{y},y]'_t-[\dot{x}+u\dot{y},y]. \quad (2.9)$$

Из (2.14), (2.7), (2.8) и (2.9) получим:

$$[\dot{x}+u\dot{y},\ddot{x}+u\ddot{y}]''_{uu}[x+uy,y]-[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]''_{uu}[\dot{x}+u\dot{y},\dot{y}]=$$
$$=[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]'''_{tuu}[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]'_u-[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]''_{uu}[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]''_{tu}+$$
$$+[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]'''_{tuu}[\dot{x}+u\dot{y},y]-[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}]''_{uu}[\dot{x}+u\dot{y},y]'_t. \quad (2.10)$$

Рассмотрим систему тождеств (2.6) и (2.10). Из этой системы d-многочлены $[x+uy,y]$ и $[\dot{x}+u\dot{y},\dot{y}]$ d-рационально выражаются через d-многочлены (2.1). □

Доказательство теоремы 1. В силу первой основной теоремы теории инвариантов группы $SL(2,R)$ абсолютные инварианты целым рациональным образом выражаются через d-многочлены вида:

$$\left[\overset{\alpha}{x}+u\overset{\alpha}{y},\overset{\beta}{x}+u\overset{\beta}{y}\right], \quad (2.11)$$

$$\left[\overset{\alpha}{x}+u\overset{\alpha}{y},\overset{\beta}{y}\right], \quad (2.12)$$

$$\left[\overset{\alpha}{y},\overset{\beta}{y}\right], \quad (2.13)$$

где $\alpha,\beta\in N\cup\{0\}=Z_0^+$, $\alpha<\beta$.

Согласно теореме 8.5 из [1] d-многочлены (2.11) и (2.12) d-рационально выражаются через d-многочлены вида:

$$[x+uy,\dot{x}+u\dot{y}],[\dot{x}+u\dot{y},\ddot{x}+u\ddot{y}],[x+uy,y][\dot{x}+u\dot{y},y].$$

d-многочлены (2.13) цело d-рационально выражаются через d-многочлены (2.11) с учетом тождества:

$$\left[\overset{\alpha}{x}+u\overset{\alpha}{y},\overset{\beta}{x}+u\overset{\beta}{y}\right]''_{uu}=\left[\overset{\alpha}{y},\overset{\beta}{y}\right]. \quad (2.14)$$

Утверждение теоремы следует из леммы 2. □

Определение. *Регулярной линейчатой поверхностью будем называть поверхность $z(t,u) = x(t) + uy(t)$, для которой* $\begin{cases} [x(t), \dot{x}(t)] \neq 0, \\ [y(t), \dot{y}(t)] \neq 0, \quad \forall t \in R \\ [x(t), y(t)] \neq 0, \end{cases}$

Рассмотрим следующие функции:

$$F_1(t,u) = f_0(t) + u(f_{11}(t) + f_{22}(t)) + u^2 f_2(t);$$

$$F_2(t,u) = g_0(t) + ug_1(t) + u^2 g_2(t);$$

$$F_3(t,u) = -f_{12}(t) - uf_2(t).$$

Теорема 2. *Пусть функции $f_i(t), f_{ij}(t), g_i(t), b_j(t)$ $(i = \overline{0,2}, j = \overline{1,2})$ — бесконечно дифференцируемые функции на R такие, что:*

1. *Для любых $t \in R$ выполнены условия:* $\begin{cases} f_0(t) \neq 0, \\ f_0(t) \neq 0, \quad \forall t \in R \\ b_1(t) \neq 0, \end{cases}$

2. *Справедливы тождества:*

$$F_2(t,u)b_1(t) - F_1(t,u)b_2(t) = (F_1(t,u))'_t F_3(t,u) - F_1(t,u)(F_3(t,u))'_t \tag{2.15}$$

$$F_1(t,u)(F_1(t,u))''_{uu} + 2F_3(t,u)((b_1(t))'_t - F_3(t,u)) - 2b_1(t)b_2(t) = 0 \tag{2.16}$$

Тогда существует единственная с точностью до $SL(2,R)$-эквивалентности регулярная линейчатая поверхность в R^2 такая, что:

$$[x + uy, \dot{x} + u\dot{y}] = f_0(t) + u(f_{11}(t) + f_{12}(t)) + u^2 f_2(t);$$

$$[\dot{x} + u\dot{y}, \ddot{x} + u\ddot{y}] = g_0(t) + ug_1(t) + u^2 g_2(t);$$

$$[\dot{x} + u\dot{y}, y] = -f_{12}(t) - uf_2(t).$$

Доказательство. Если $f_0(t) \neq 0$, то [1] существует единственный с точностью до $SL(2,R)$-эквивалентности путь $x(t)$ и путь $y(t)$ такие, что:

$$\begin{cases} [x(t), \dot{x}(t)] = f_0(t), \\ [\dot{x}(t), \ddot{x}(t)] = g_0(t), \\ [x(t), y(t)] = b_1(t), \\ [\dot{x}(t), y(t)] = f_{12}(t). \end{cases}$$

Пусть $z(t,u) = x(t,u) + uy(t,u)$ — линейчатая поверхность, пути $x(t), y(t)$ которой восставлены из условия $f_0(t) \neq 0$. Запишем тождество (2.2) для данной поверхности, для линейчатых поверхностей и векторов:

$$x + uy, \quad \dot{x} + u\dot{y}, \quad \ddot{x} + u\ddot{y}, \quad y$$

Если в качестве функций $F_i(t,u)$ взять базисные инварианты найденной линейчатой поверхности, то данное тождество совпадает с тождеством (2.15). Если взять систему линейчатых поверхностей и путей:

$$x+uy, \quad \dot{x}+u\dot{y}, \quad y, \quad \dot{y},$$

получим тождество:

$$[x+uy, \dot{x}+u\dot{y}][y,\dot{y}] - [y,\dot{x}+u\dot{y}][x+uy,\dot{y}] + [y,x+uy][\dot{x}+u\dot{y},\dot{y}] = 0,$$

которое совпадает с тождеством (2.16), если в качестве функций $F_i(t,u)$ взять базисные инварианты, полученной линейчатой поверхности. Для доказательства теоремы необходимо показать, что при заданных условиях теоремы других функций $f_{11}(t), f_2(t), g_1(t), g_2(t)$ нет.

Запишем тождество (2.15):

$$\begin{aligned}&\{f_0(t)+u(f_{11}(t)+f_{12}(t))+u^2f_2(t)\}b_2(t) = \\ &(g_0(t)+ug_1(t)+u^2g_2(t))b_1(t) - \{f_0'(t)+u(f_{11}'(t)+f_{12}'(t))+u^2f_2'(t)\}\{-f_{12}(t)-uf_2(t)\}- \\ &\qquad - \{f_0(t)+u(f_{11}(t)+f_{12}(t))+u^2f_2(t)\}\times(-f_{12}'-uf_2').\end{aligned}$$

При u^0 имеем:

$$g_0(t)b_1(t) - f_0(t)b_2(t) = -f_0'(t)f_{12}(t) + f_0(t)f_{12}'(t).$$

Откуда:

$$b_2(t) = \frac{1}{f_0(t)}\{g_0(t)b_1(t) + f_0'(t)f_{12}(t) - f_0(t)f_{12}'(t)\}.$$

Запишем тождество (2.16):

$$\begin{aligned}&\{f_0(t)+u(f_{11}(t)+f_{12}(t))+u^2f_2(t)\}\frac{1}{2}\cdot 2f_2(t)+ \\ &\qquad + (-f_{12}(t)-uf_2(t))\{(b_1(t))_t'+f_{12}(t)+uf_2(t)\} - b_1(t)b_2(t) = 0.\end{aligned}$$

При u^0 имеем:

$$f_0(t)f_2(t) - f_{12}(t)(b_1(t))_t' - (f_{12}(t))^2 - b_1(t)b_2(t) = 0.$$

Откуда:

$$f_2(t) = \frac{1}{f_0(t)}\{f_{12}(t)(b_1(t))_t' + (f_{12}(t))^2 + b_1(t)b_2(t)\}.$$

При u^1 имеем:

$$(f_{11}(t)+f_{12}(t))f_2(t) - f_{12}(t)f_2(t) - f_{12}(t)\{(b_1(t))_t' + f_{12}(t)\} = 0.$$

Откуда $f_{11}(t) = \{(b_1(t))'_t + f_{12}(t)\}$. В тождестве (2.15) при u^1 имеем:

$$g_1(t)b_1(t) - (f_{11}(t) + f_{12}(t))b_2(t) = \\ = -f_0'(t)f_2(t) - (f_{11}'(t) + f_{12}'(t))f_{12}(t) + f_0(t)f_2'(t) + (f_{11}(t) + f_{12}(t))f_{12}'(t).$$

Откуда:

$$g_1(t) = \frac{1}{b_1(t)}\{(f_{11}(t) + f_{12}(t))b_2(t) - f_0'(t)f_2(t) - \\ - (f_{11}'(t) + f_{12}'(t))f_{12}(t) + f_0(t)f_2'(t) + (f_{11}(t) + f_{12}(t))f_{12}'(t)\}.$$

В тождестве (2.16) при u^2 имеем:

$$g_2(t)b_1(t) - f_2(t)b_2(t) = -f_2'(t)f_{12}(t) - f_2(t)(f_{11}'(t) + \\ + f_{12}'(t)) + f_{12}'(t)f_2(t) + f_2'(t)(f_{11}(t) + f_{12}(t)).$$

Откуда:

$$g_2(t) = \frac{1}{b_1(t)}\{f_2(t)b_2(t) - f_2'(t)f_{12}(t) - f_2(t)(f_{11}'(t) + \\ + f_{12}'(t)) + f_{12}'(t)f_2(t) + f_2'(t)(f_{11}(t) + f_{12}(t))\}.$$

□

3. Заключение

Полученные результаты позволяют определить с точностью до $SL(2,R)$-эквивалентности линейчатую поверхность по ее базисным дифференциальным инвариантам в R^2. Следующей задачей является определение линейчатой поверхности в R^3 с точностью до $SL(2,R)$-эквивалентности по ее базисным дифференциальным инвариантам.

Список цитируемых источников

1. *Дж. Хаджиев.* Приложения теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент: ФАН, 1988. — 139 с.
2. *Сухтаева А. М.* Об эквивалентности k кривых в C^n и восстановление k кривых с точностью до G-эквивалентности по их дифференциальным инвариантам относительно действия групп $SL(n,C)$ и $GL(n,C)$ // Доклады АН УзССР. — 1987. — № 6. — С. 11–13.
3. *Manuel Gonzalez, Raquel Gonzalo, Jesus Angel Jaramilo.* Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces // J. London Math Soc. — 1999. — № 2. — С. 1–17.

4. *Кривошапко С. Н.* Торсовые поверхности и оболочки: справочник. — М: Изд-во университета дружбы народов, 1991. — 287 с.
5. *Шамилев Т. М.* О возможных значениях образующих поля дифференциальных инвариантных рациональных функций линейчатой поверхности для действия группы $G = O(3, R)$ // Динамические системы. — 2005. — No. 19. — С. 161–169.
6. *Shamilev T. M.* About forming fields of differential invariants ruled surface for action of group $G = O(3, R)$ // II літня школа з алгебри і топології. — Львів. — Долина, 2-14 липня 2004 — С. 34.
7. *Шамилев Т. М.* Восстановление пары линейчатых поверхностей в по дифференциальным ортогональным инвариантам // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Дни науки 2005". — Том 18, математика. — С. 19–20.
8. *Шамилев Т. М.* О возможных значениях образующих поля дифференциальных инвариантных рациональных функций линейчатой поверхности для действия группы $G = O(3, R)$ // Динамические системы. — 2005. — Выпуск 19. — С. 161–169.
9. *Шамілєв Т. М.* Твірні диференціального поля інваріантних диференціальних раціональних функцій лінійчатих поверхонь для дії групи $O(n, R)$ в $\mathbb{R}^n$ // Вісник київського університету, серія фіз.-мат. науки. — 2006. - Випуск №1 - с. 48-55.

Получено 06.09.2006