

УДК 539.375

Дискретно-линейчатые пластические зоны в окрестности углового выреза в среде с задержкой текучести при антиплоской деформации

М. В. Кривень

Луцкий государственный технический университет

E-mail: mkryven@gmail.com

Аннотация. Исследована начальная стадия формирования полос пластичности в окрестности углового выреза в материале с задержкой текучести при продольном сдвиге. Определено количество полос, углы между полосами и длины полос в зависимости от уровня нагрузки.

Введение

Возникновение пластической полосы (линии локализованных пластических деформаций) во время деформации сдвига в материале с задержкой текучести происходит при условии, что напряжения сдвига достигают верхнего предела текучести k_1 . Дальнейшее же развитие полос происходит под действием напряжений сдвига равных нижнему пределу текучести $k_0 < k_1$. Значение $k_1 - k_0$ собственно и определяет зуб на диаграмме $\sigma - \epsilon$, обуславливающий задержку текучести [1,2].

Возникновению и развитию пластических полос (ПП) в окрестности острия трещины в материале с задержкой текучести свойственны некоторые особенности, отличающие схему развития дискретных ПП от теоретически предсказанной в случае идеально упруго-пластического тела.

В настоящей работе исследовано влияние угла раскрытия клинообразного выреза и величины задержки текучести на возникновение ПП. В связи с нестабильностью величины верхнего (в отличие от нижнего) предела текучести, представляет интерес исследование его влияния на форму и характеристики дискретно-линейчатой пластической зоны в окрестности выреза.

1. Постановка задачи

Пусть напряженно-деформированное состояние тела с клинообразным вырезом $\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha$, $\rho > 0$, $-\infty < z < \infty$ обусловлено однородными сдвиговыми

напряжениями на бесконечности, асимптотика которых аналогична известной [3] для случая линейно-упругого тела:

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = K|y|^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o(|y|^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}) \quad (|y| \rightarrow \infty), \quad (1.1)$$

где 2α — раскрытие угла выреза, K — коэффициент размерности $H_M^{-2+\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}$ аналогичный интенсивности напряжений для трещины, который в случае дефекта бесконечных размеров соответствует нагрузке, приложенной к телу.

Вследствие концентрации напряжений от вершины выреза развиваются ПП (рис. 1, пример пяти полос). Определим их количество, длины, углы между полосами, а также интегральную характеристику пластической зоны в целом — разрыв смещения в вершине выреза.

Краевая задача в напряжениях для данного случая приобретает следующую формулировку:

$$\begin{aligned} \pm \tau_{xz} \sin \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha &= 0 \quad (y = \pm x \operatorname{tg} \alpha, x < 0), \\ -\tau_{xz} \sin \gamma_j + \tau_{yz} \cos \gamma_j &= k_0 \quad (y = x \operatorname{tg} \gamma_j, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq d_j \quad (j = \overline{1, n})), \\ \tau_{yz}(0, y) &= K|y|^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o(|y|^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}) \quad (|y| \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где n — количество ПП, γ_j — углы между полосами и осью абсцисс, d_j — длина j -той полосы (первой считаем полосу, образующую наименьший угол с верхним берегом выреза, остальные перенумерованы по часовой стрелке).

Первое условие в (1.2) обозначает отсутствие внешних нагрузок на сторонах выреза, второе — состояние в ПП, третье — задает уровень нагрузки (асимптотику напряжений на бесконечности).

Поскольку максимальное сдвиговое напряжение в теле не может превышать верхнего предела текучести, должно также выполняться условие

$$\max_n \tau_{nz} \leq k_1, \quad (1.3)$$

которое при этом может достигаться не далее как в отдельных точках.

2. Исследование дискретно-линейчатой пластической зоны

Сформулируем задачу (1.2)–(1.3) относительно аналитической в упругой части тела функции напряжений $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ($\zeta = x + iy$). На границе

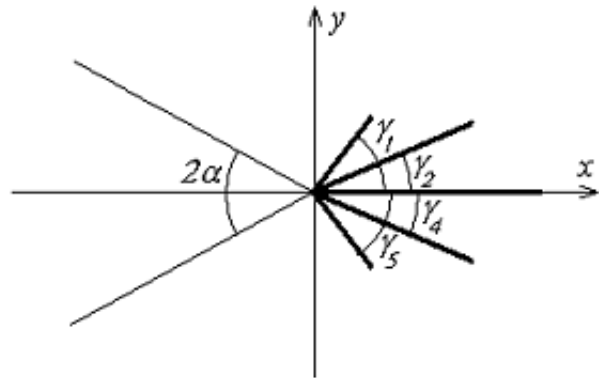


Рис. 1.

области аналитичности D (угол $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$, разрезанный вдоль соответствующих ПП отрезков ($\arg \zeta = \gamma_j, |\zeta| \leq d_j$) (рис. 1)), вследствие соотношений (1.2) должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tau(\zeta) \exp(i\gamma_j) &= k_0 \quad (\arg \zeta = \gamma_j \pm 0, |\zeta| \leq d_j \quad (j = \overline{1, n})), \\ \arg \tau(\zeta) &= \pm \frac{\pi}{2} \pm \alpha \quad (\arg \zeta = \pm \pi \mp \alpha), \\ \tau(\zeta) &= K \zeta^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o(\zeta^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}) \quad (\zeta \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение краевой задачи (2.1) должно удовлетворять условию

$$|\tau(\zeta)| < k_1 \quad (\zeta \in D). \quad (2.2)$$

Равенства (2.1), (2.1) определяют область D , являющуюся образом области G в плоскости τ . Согласно первому условию в (2.1), берега разрезов, соответствующих ПП, отображаются на отрезки, составляющие

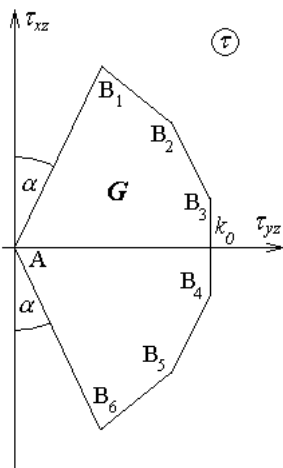


Рис. 2.

углы γ_j с действительной осью и отдаленные на расстояние k_0 от начала координат. Согласно второму — стороны выреза отображаются на отрезки, образующие с действительной осью углы $\mp \frac{\pi}{2} \pm \alpha$, вершины которых, согласно третьему условию в (2.1), совпадают с началом координат. Неравенство (2.2) свидетельствует, что область G не выходит за пределы круга $|\tau| \leq k_1$. В результате приходим к выводу, что область G является прямолинейным $n + 2$ -угольником, две стороны которого — радиусы окружности $|\tau| = k_1$, а остальные — хорды этой же окружности, касательные к окружности $|\tau| = k_0$. На рис. 2 область G изображена для случая пяти ПП. Уже из самой формы области следует, что при выполнении соотношений

$$\frac{k_0}{\cos \frac{\pi-2\alpha}{n}} \leq k_1 < \frac{k_0}{\cos \frac{\pi-2\alpha}{n+1}},$$

у вершины выреза должно возникнуть n ПП. Когда же

$$k_1 = k_0 \cos^{-1} \frac{\pi - 2\alpha}{2n}, \quad (2.3)$$

то есть, когда $\frac{\pi - 2\alpha}{2 \arccos(k_0/k_1)}$ равно целому числу n , получим n ПП. При этом углы между парами соседних полос одинаковы и равны $(\pi - 2\alpha)/n$, а j -тая полоса составляет с осью абсцисс угол

$$\gamma_j = (n + 1 - 2j) \frac{\pi - 2\alpha}{2n} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Поскольку конформное отображение, выполняемое функцией $\tau(\zeta)$ известно, то последнюю можно найти непосредственным построением этого отображения. С этой целью введем вспомогательную комплексную плоскость t . Функцию $\tau(\zeta)$ будем искать в параметрическом виде:

$$\tau = \tau(t), \quad \zeta = \zeta(t) \quad (\zeta \in H, H = \{Imt > 0\}),$$

подбирая $\tau(t)$ и $\zeta(t)$ таким образом, чтобы взаимосоответствующим точкам на границе областей D и G соответствовал общий прообраз на границе полуплоскости H . Пусть точкам $\tau = 0$, $\tau = k_1 \exp(-i(\pi/2 - \alpha))$ и $\tau = k_1 \exp(i(\pi/2 - \alpha))$ действительной оси плоскости H соответствуют $t = \infty$, $t = -1$ и $t = 1$. Остальным вершинам многоугольника G соответствуют точки $t = a_j$ ($j = \overline{1, (n+1)/2}$) отрезка $[-1, 1]$, координаты которых подлежат определению. Поскольку область G является прямоугольным многоугольником, функцию $\tau(t)$ можно представить при помощи интеграла Кристоффеля-Шварца:

$$\tau(t) = k_0 + \frac{k_0 \operatorname{tg}((\pi - 2\alpha)/(2n))}{\int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta} e^{i(\pi/2 - \alpha)} \int_0^t F_\tau(\eta) d\eta, \quad (2.4)$$

где

$$F_\tau(t) = (t^2 - a_1^2)^{\frac{2\alpha}{n\pi} - \frac{1}{n}} * \dots * \left(t^2 - a_{\frac{n-1}{2}}^2\right)^{\frac{2\alpha}{n\pi} - \frac{1}{n}} (t^2 - 1)^{\frac{\alpha}{n\pi} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}}$$

(под нецелой степенью комплексной переменной будем понимать аналитическую функцию, действительную и положительно определенную для таких же значений ее аргумента).

В случае, когда пределы текучести удовлетворяют соотношениям (2.3), длины сторон многоугольника G , соответствующих пластическим полосам, равны $2k_0 \operatorname{tg}((\pi - 2\alpha)/(2n))$. Поскольку в плоскости t стороны многоугольника G , соответствующие пластическим полосам, отображаются на отрезки $[a_j, a_{j+1}]$, учитывая формулу (2.4), получим систему уравнений для параметров a_j :

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} |F_\tau(\eta)| d\eta = 2 \quad (j = \overline{1, (n-1)/2}), \quad a_1 = -1, \quad a_{(n+1)/2} = 1. \quad (2.5)$$

Решение системы (2.5) найдем методом последовательных приближений при помощи следующего сходящегося алгоритма:

$$a_j^{(m+1)} = a_j^{(m)} + (a_{j+1}^{(m)} - a_j^{(m)}) \left(1 - \frac{\int_{a_j^{(m)}}^{a_{j+1}^{(m)}} |\tilde{F}_\tau(\eta)| d\eta}{2 \int_0^{a_1^{(m)}} |\tilde{F}_\tau(\eta)| d\eta} \right) \quad \left(j = \overline{1, \frac{n-1}{2}} \right). \quad (2.6)$$

Здесь функция $\tilde{F}_\tau(\eta)$ отличается от $F_\tau(\eta)$ только заменой a_j на $a_j^{(m)}$. Начальные приближения

$$a_j^{(0)} = \sin \frac{\pi}{\pi-2\alpha} \frac{(\pi-2\alpha)(2j-1)}{2n} \quad (j = \overline{1, (n-1)/2})$$

являются образами точек $\tau = \exp(i(-\frac{\pi}{2} + \alpha + j\frac{\pi-2\alpha}{n}))$, полученными при отображении сектора $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \arg \tau < \frac{\pi}{2} - \alpha$ на полуплоскость H , которое переводит $\tau = 0$, $\tau = k_1 \exp(-i(\pi/2 - \alpha))$ и $\tau = k_1 \exp(i(\pi/2 - \alpha))$ в точки $t = \infty$, $t = -1$ и $t = 1$. Признаком окончания алгоритма является совпадение правых и левых частей каждого из уравнений системы (2.6) с точностью до ε (малого по сравнению с единицей). В настоящей работе полагалось $\varepsilon = 0,0001$.

Теперь для получения функции $\zeta(t)$ конформно отображим область H на область D (рис. 1), так чтобы отрезки $[a_j, a_{j+1}]$ отображались на берега $n+1-j$ пластической полосы, а стороны угла $\text{Im} \zeta = -\pi + \alpha, 0 < \rho < +\infty, \text{Im} \zeta = \pi - \alpha, 0 < \rho < +\infty$ — на лучи $-\infty < \text{Re} t < -1, \text{Im} t = 0, 1 < \text{Re} t < \infty, \text{Im} t = 0$. Данное отображение можно определить с точностью до постоянного множителя, зависящего от нагрузки, действующей на бесконечности (позже определим его на основании асимптотики функции $\tau(\zeta)$ на бесконечности). При фиксированной нагрузке оно существует только при конкретных значениях глубин разрезов d_j , выражающих длины ПП.

$$\zeta = -Me^{-i\alpha}(t^2 - 1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{\alpha}{n\pi}} \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} (t^2 - a_j^2)^{\frac{\pi-2\alpha}{n\pi}}. \quad (2.7)$$

Оценим асимптотику функции $\tau(\zeta)$ на бесконечности (бесконечно отдаленной точки плоскости t). Из формулы (2.7) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\zeta = -Me^{-i\alpha} t^{\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi}} + o(t^{\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi}}),$$

а из формулы (2.4), что

$$\tau = -\frac{k_0 \text{tg}((\pi-2\alpha)/(2n))}{\int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta} e^{i(\pi/2-\alpha)t^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}}} + o(t^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}})$$

Поэтому, при $\zeta \rightarrow \infty$ получим

$$\tau = -\frac{k_0 \text{tg}((\pi-2\alpha)/(2n))}{\int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta} \left(\frac{M}{\zeta}\right)^{\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o(\zeta^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}}) \quad (2.8)$$

откуда найдем выражение для константы M , через параметр нагрузки K , входящий в формулу (1.1):

$$M = \left(\frac{K}{k_0} \text{ctg} \frac{\pi-2\alpha}{2n} \int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta \right)^{\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi-2\alpha}}.$$

Из формулы (2.8) определим длины ПП. Начальным точкам полос в плоскости t соответствуют точки a_j . На отрезке $[a_j, a_{j+1}]$, соответствующем $n-j+1$ -ой полосе $|\zeta|$ являющейся функцией t достигает максимума. Причем

$$d_{n-j+1} = \max_{[a_j, a_{j+1}]} |\zeta(t)|.$$

Поэтому, а также вследствие формулы (2.7)

$$d_{n-j+1} = |\zeta(t)|_{t=b_j} \quad (j = \overline{1, (n-1)/2}), \quad (2.9)$$

где b_j — решения уравнения

$$2t \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{\alpha}{n\pi} \right) \frac{1}{t^2 - 1} + \frac{\pi - 2\alpha}{n\pi} \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{t^2 - a_j^2} \right) = 0$$

Общий разрыв смещения g_0 в вершине выреза определяется парциальными g_j , привносимыми каждой из ПП. Поскольку g_j являются относительными смещениями точек, принадлежащих берегам полос и совпадающих с вершиной выреза, согласно известным формулам [4], получим

$$g_j = \frac{1}{\mu} \int_{L_j} \tau(\zeta) d\zeta,$$

где μ — модуль сдвига материала, L_j — контур, охватывающий j -тую полосу. Поскольку в плоскости t j -той полосе соответствует отрезок $[a_{n-j}, a_{n+1-j}]$, интегрируя по берегам полосы и перейдя к переменной t согласно формуле (2.7) получим

$$g_j = \frac{k_0 \operatorname{tg}((\pi - 2\alpha)/(2n))}{\mu \int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta} M(a_{n+1-j} - a_{n-j}). \quad (2.10)$$

Общий разрыв смещения в вершине выреза

$$g_0 = \frac{2k_0 \operatorname{tg}((\pi - 2\alpha)/(2n))}{\mu \int_0^{a_1} |F_\tau(\eta)| d\eta} M. \quad (2.11)$$

Формулы (2.9)–(2.11) позволяют изучить изменение формы дискретно-линейчатой пластической зоны (количество полос), а также значений парциальных разрывов пластических полос и общего разрыва смещения в вершине выреза при изменении верхнего предела текучести, однако, из-за зависимости асимптотики напряжений на бесконечности от величины угла выреза, не дают возможности исследовать влияние на качественную картину ПП значения угла выреза.

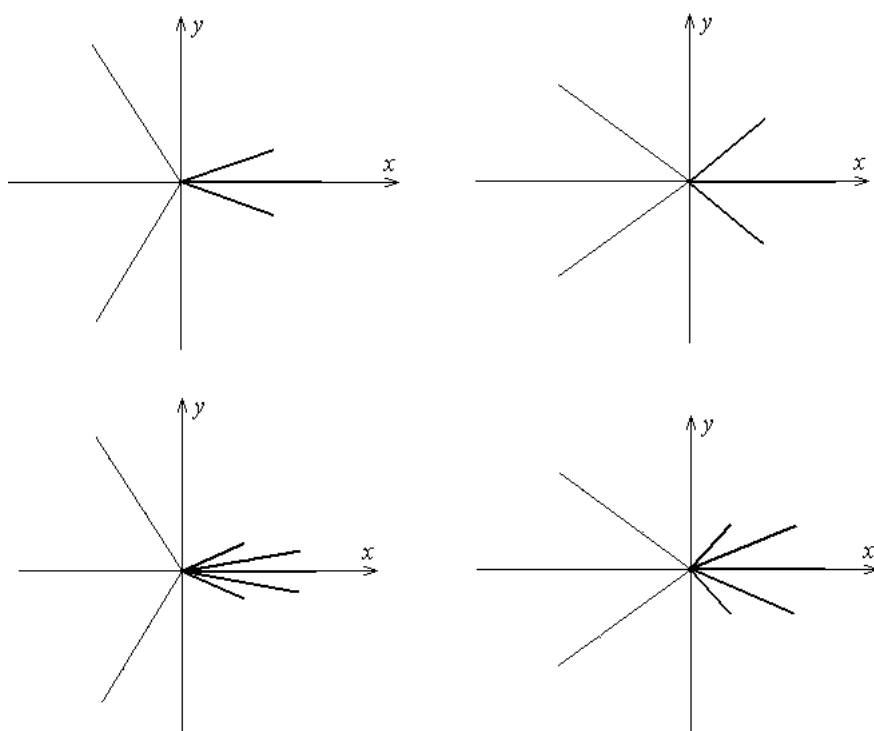


Рис. 3.

Формы дискретно-линейчатых пластических полос у вершины выреза с углом $\alpha = 30^\circ$ для среды с верхними пределами текучести $k_1 = 1,06418k_0$ и $k_1 = 1,02234k_0$ и с углом $\alpha = 60^\circ$ для среды с верхними пределами текучести $k_1 = 1,015426k_0$ и $k_1 = 1,005508k_0$ приведены на рис. 2. Значения пределов текучести подобраны такими, что в окрестности вершин обоих вырезов при большей задержке появляются 3 ПП, а при меньшей — 5. На рисунке сохранены пропорции длин полос для зон с одинаковыми величинами угла выреза.

Список цитируемых источников

1. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2 — М.: Мир, 1975. — С. 336–520.
2. *Кристал М. М.* Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор). Часть 1. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // ФММ. — 2004. — Т. 7, № 5. — С. 5–29.
3. *Кривень В. А.* Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень // Доп. АН УРСР. Сер.А. — 1983. — № 2. — С. 31–34.
4. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. Т. 2 — М.: Мир, 1975. — С. 204–335.

Получено 1.10.2006