Динамические системы, вып. 20 (2006), 3–19

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Об устойчивости решений линейных нестационарных систем управления с обратной связью

В.Е. Белозеров, М.В. Корнеев
Днепропетровский национальный университет,
Днепропетровск 49050. *E-mail: belozvye@mail.ru*

Аннотация. Для линейной нестационарной системы управления, коэффициенты которой являются непрерывными на интервале $[0, \infty)$ (и, возможно неограниченными при $t \to \infty$) дробно-рациональными функциями, найдены достаточные условия существования ограниченной линейной обратной связи по выходу обеспечивающей асимптотическую устойчивость тривиального решения замкнутой системы. Приводятся примеры.

1. Введение

Пусть вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ системы управления описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

а вектор выхода (наблюдений) $\mathbf{y}(t)$ – уравнением

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t), \ \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p, \tag{1.2}$$

где $n \geq m$ и $n \geq p$ (самая распространенная в приложениях ситуация); $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$– матрицы дробно-рациональных функций, аналитических на интервале $[0, \infty)$.

Задача 1. *Предположим, что закон управления $\mathbf{u}(t)$ системой (1.1), (1.2) формируется в виде линейной обратной связи по выходу: $\mathbf{u}(t) = K(t)\mathbf{y}(t)$. Требуется построить непрерывную на интервале $[0, \infty)$ матрицу $K(t) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ (возможно неограниченную при $t \to \infty$) указанной обратной связи, удовлетворяющую условиям:*

1)$\forall t \in [0, \infty)$ существует константа $M > 0$ такая, что $\|\mathbf{u}(t)\| < M$;

2)тривиальное решение замкнутой системы управления

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t) + B(t)K(t)C(t))\mathbf{x}(t) \tag{1.3}$$

будет асимптотически устойчивым.

Для решения поставленной задачи необходимо будет привести пару матриц $A(t)$ и $B(t)$ к некоторому каноническому виду. Хорошо известно [1], как построить каноническую форму для постоянных матриц A и B. Покажем, что такая же каноническая форма (при некоторых ограничениях) может быть построена и для переменных во времени матриц $A(t)$ и $B(t)$.

Пусть q – целое неотрицательное число. Введем в рассмотрение линейный оператор

$$(A(t) - d/dt)^q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

действие которого задается формулой

$$(A(t) - d/dt)^q \mathbf{x}(t) = (A(t) - d/dt)^{q-1} \circ (A(t) - d/dt)\mathbf{x}(t).$$

Например, $(A(t) - d/dt)\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)$; $(A(t) - d/dt)^2\mathbf{x}(t) = (A(t) - d/dt)(A(t)-d/dt)\mathbf{x}(t) = (A(t)-d/dt)(A(t)\mathbf{x}(t)-\dot{\mathbf{x}}(t)) = A^2\mathbf{x}(t)-\dot{A}(t)\mathbf{x}(t)-2A(t)\dot{\mathbf{x}}(t)+\ddot{\mathbf{x}}(t)$.

Предположим, что $\forall t \in [0, \infty)$ и некоторой аналитической на этом же интервале матрицы $T(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ выполняется условие $\det T(t) \neq 0$.

Представим число n в следующем виде: $n = km + l = l(k + 1) + (m - l)k$, где $n \geq m > l \geq 0$, $k > 0$, k и l – целые числа. Введем обозначения: $\nu_1 = ... = \nu_l = k+1$, $\nu_{l+1} = ... = \nu_m = k$. (Ясно, что $\nu_1 + ... + \nu_m = n$.)

Обозначим столбцы матрицы $B(t)T(t)$ через $\mathbf{b}_1(t), ..., \mathbf{b}_m(t)$ и построим функциональную $(n \times n)$-матрицу

$$S(t) = (\mathbf{b}_1(t), ..., (A(t) - d/dt)^{\nu_1}\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t), ..., (A(t) - d/dt)^{\nu_2}\mathbf{b}_2(t), ...,$$

$$\mathbf{b}_m(t), ..., (A(t) - d/dt)^{\nu_m}\mathbf{b}_m(t)).$$

Предположим, что для определенной выше на полуинтервале $[0, \infty)$ матрицы $T(t)$ имеет место неравенство $\det S(t) \neq 0$. Тогда по формуле

$$\mathbf{f}_i(t) = (\underbrace{0, ..., 0\ 1}_{\nu_1+...+\nu_i} 0, ..., 0)S^{-1}(t)$$

однозначно определяются вектор-строки $\mathbf{f}_i$, где в вектор-строке $(0, ..., 0\ 1\ 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ единица стоит на месте с номером $\nu_1 + ... + \nu_i; i = 1, ..., m$.

Введем в рассмотрение матричный линейный оператор

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_1(t)(A(t) - d/dt) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_1(t)(A - d/dt)^{\nu_1 - 1} \\ - - - - - - - - \\ \vdots \\ - - - - - - - - \\ \mathbf{f}_m(t) \\ \mathbf{f}_m(t)(A - d/dt) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m(t)(A - d/dt)^{\nu_m - 1} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Для дальнейшего необходимо будет найти матрицу $P(t)$ оператора $\mathbf{P}(t)$ в исходном базисе пространства $\mathbb{R}^n$. С этой целью введем обозначение: $P^{-1}(t) = (\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_n(t))$ и воспользуемся тождеством $P(t) \cdot P^{-1}(t) = E_n$. Тогда для определения столбца $\mathbf{x}_1(t)$ будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(t)\mathbf{x}_1(t) = 1, \\ \mathbf{f}_1(t)(A(t)\mathbf{x}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_1(t)) = 0, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \mathbf{f}_1(t)(A(t) - d/dt)^{\nu_1 - 1}\mathbf{x}_1(t) = 0, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \mathbf{f}_1(t)(A(t) - d/dt)^{\nu_m - 1}\mathbf{x}_1(t) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Продифференцируем первое из уравнений системы (1.4) и подставим во второе. Тогда будем иметь: $\dot{\mathbf{f}}_1(t)\mathbf{x}_1(t) = -\mathbf{f}_1(t)\dot{\mathbf{x}}_1(t)$ и $[\mathbf{f}_1(t)A(t) + \dot{\mathbf{f}}_1(t)]\mathbf{x}_1(t) = 0$. Аналогично, дифференцируя первое из уравнений системы (1.4) два раза, а второе уравнений – один раз, получим $\ddot{\mathbf{f}}_1(t)\mathbf{x}_1(t) + 2\dot{\mathbf{f}}_1(t)\dot{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{f}_1(t)\ddot{\mathbf{x}}_1(t) = 0$, $\dot{\mathbf{f}}_1(t)A(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{f}_1(t)\dot{A}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{f}_1(t)A(t)\dot{\mathbf{x}}_1(t) + \ddot{\mathbf{f}}_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dot{\mathbf{f}}_1(t)\dot{\mathbf{x}}_1(t) = 0$. Подставляя последнее соотношение в третье уравнение системы (1.4), после некоторых преобразований, будем иметь

$$[\mathbf{f}_1(t)A^2(t) + 2\dot{\mathbf{f}}_1(t)A(t) + \mathbf{f}_1(t)\dot{A}(t) + \ddot{\mathbf{f}}_1(t)]\mathbf{x}_1(t) = 0$$

или

$$[(\mathbf{f}_1(t)A(t) + \dot{\mathbf{f}}_1(t))A(t) + \frac{d}{dt}(\mathbf{f}_1(t)A(t) + \dot{\mathbf{f}}_1(t))]\mathbf{x}_1(t) = 0.$$

Введем обозначения: $\mathbf{z}_1^{(1)}(t) = \mathbf{f}_1(t), \mathbf{z}_2^{(1)}(t) = \mathbf{f}_1(t)A(t) + \dot{\mathbf{f}}_1(t) = \mathbf{z}_1^{(1)}(t)A(t) + \dot{\mathbf{z}}_1^{(1)}(t)$, $\mathbf{z}_3^{(1)} = \mathbf{z}_2^{(1)}(t)A(t) + \dot{\mathbf{z}}_2^{(1)}(t), ..., \mathbf{z}_1^{(2)}(t) = \mathbf{f}_2(t)$, $\mathbf{z}_2^{(2)} = \mathbf{z}_1^{(2)}(t)A(t) + \dot{\mathbf{z}}_1^{(2)}(t)$ и так далее. Тогда несложно заключить, что любая строка матрицы $P(t)$ может быть записана в форме

$$\mathbf{z}_{j+1}^{(i)} = \mathbf{z}_j^{(i)}(t)A(t) + \dot{\mathbf{z}}_j^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbf{z}_1^{(i)}(t) = \mathbf{f}_i(t), j = 1, ..., \nu_i - 1; i = 1, ..., m.$

Если теперь в правой части системы (1.4) заменить столбец $(1\ 0\ ...\ 0)^T$ на столбец $(0\ ...\ 0\ 1\ \ 0\ \ ...\ 0)^T$, где единица расположена на i-м месте, то в силу операций дифференцирования вид этого постоянного столбца не будет влиять на конечную форму матрицы $P(t)$. Таким образом, матрица оператора $\mathbf{P}(t)$ может быть представлена в виде

$$P^T(t) = ((\mathbf{z}_1^{(1)})^T, ..., (\mathbf{z}_{\nu_1}^{(1)})^T, ..., (\mathbf{z}_1^{(m)})^T, ..., (\mathbf{z}_{\nu_m}^{(m)})^T) \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{1.5}$$

Докажем теперь невырожденность матрицы $P(t)$. Для этого воздействуем оператором $\mathbf{P}(t)$ на матрицу $S(t)$. Тогда получим

$$\mathbf{P}(t) \circ S(t) = P(t) \cdot S(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & \dots & Q_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m1}(t) & \dots & Q_{mm}(t) \end{pmatrix},$$

где $Q_{ij}(t) \in \mathbb{R}^{\nu_i\times\nu_j}; i, j = 1, ..., m.$

Структуру матрицы $P(t)S(t)$ проще всего пояснить на конкретном примере, который бы учитывал все ньюансы общего случая.

Пусть, например, $n = 8, m = 3, \nu_1 = \nu_2 = 3, \nu_3 = 2$. Тогда

$$P(t)S(t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ \underline{1} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{0} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & * & 0 & * \\ \underline{0} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{1} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 1 & * \end{array}\right),$$

где знаком $*$ обозначены несущественные для дальнейшего элементы.

Непосредственное вычисление определителя матрицы $P(t)S(t)$ показывает, что его величина равна 1 или -1. Таким образом, матрица $P(t)$ обратима, если таковой является матрица $S(t)$. Обобщение этого утверждения на произвольные натуральные числа n и m $(n \geq m)$ осуществляется без труда.

Построим матрицу $S(t)$ и предположим, что $\det S(t) \neq 0\ \forall t \in [0, \infty)$. Тогда можно построить матрицу $P(t)$ вида (1.5), для которой $\det P(t) \neq 0\ \forall t \in [0, \infty)$. Заметим, что матрица $P(t)$ вообще говоря не является матрицей Ляпунова (она может быть неограниченной).

Введем в системе (1.1) замены переменных $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ по формулам $\mathbf{x}(t) = P^{-1}(t)\mathbf{z}(t)$ и $\mathbf{u}(t) = G^{-1}(t)\mathbf{v}(t)$, где матрица $G(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $(\forall t \in [0, \infty)\ \det G(t) \neq 0)$ будет определена ниже. Тогда вместо системы (1.1) получим систему

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t))\mathbf{z}(t) + P(t)B(t)G^{-1}(t)\mathbf{v}(t) =$$

$$= A_c(t)\mathbf{z}(t) + B_c(t)\mathbf{v}(t). \tag{1.6}$$

Легко проверить, что в новых базисах пространств $\mathbb{R}^{n\times n}$ и $\mathbb{R}^{m\times m}$ матрицы $A(t)$ и $B(t)$ принимают форму:

$$A_c(t) = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}(t) & \dots & A_{mm}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$B_c(t) = P(t)B(t)G(t) = \begin{pmatrix} B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{mm} \end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

где

$$A_{ii}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{i,\eta_{i-1}+1}(t) & -a_{i,\eta_{i-1}+2}(t) & \dots & -a_{i,\eta_i}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i\times\nu_i};$$

$$\eta_0 = 0, \eta_1 = \nu_1, \eta_2 = \nu_1 + \nu_2, ..., \eta_i = \nu_1 + ... + \nu_i;$$

$$A_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ -a_{i,\delta_{j-1}+1}(t) & \dots & -a_{i,\delta_j}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i\times\nu_j};$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = \nu_1, \delta_2 = \nu_1 + \nu_2, ..., \delta_i = \nu_1 + ... + \nu_j;\ B_{ii} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_i}.$$

Здесь целые положительные числа ν_i принимают два значения: $\nu_i = k+1$, если $i = 1, ..., l$ и $\nu_i = k$, если $i = l+1, ..., m$, где k – целая часть числа n/m, а $l = n - km$; $i, j = 1, ..., m$.

Заметим, что из условия $\det S(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,\infty)$ вытекает, что $\mathrm{rank} B(t) = m$ $\forall t \in [0,\infty)$. Тогда невырожденная на полуинтервале $[0,\infty)$ матрица $G(t)$ находится из решения матричного уравнения $P(t)B(t) = B_c(t)G(t)$, где матрица $B_c(t) = B_c$ не зависит от времени. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что для системы (1.1) выполнено условие :* $\det S(t) \neq 0$ *для некоторой невырожденной достаточное число раз дифференцируемой матрицы* $T(t)$ *и всех точек интервала* $[0,\infty)$. *Тогда для всех* $t \in [0,\infty)$ *существуют обратимые матрицы* $P(t)$ *и* $G(t)$ *такие, что матрицы* $A_c(t)$ *и* $B_c(t)$ *определены и непрерывны на интервале* $[0,\infty)$ *и имеют структуру матриц (1.7) и (1.8).*

2. Обратная связь по состоянию

Везде в этом разделе предполагается, что $C(t) = E_n$, где E_n – единичная матрица порядка n.

Введем в систему (1.6) обратную связь по формуле $\mathbf{v}(t) = K_c(t)\mathbf{z}(t)$, где $K_c(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда будем иметь уравнение замкнутой системы в виде $\dot{\mathbf{z}}(t) = (A_c(t) + B_c(t)K_c(t))\mathbf{z}(t)$. При этом матрица $A_c(t) + B_c(t)K_c(t)$ имеет структуру матрицы $A_c(t)$, а ее строки с номерами $\nu_1, \nu_1 + \nu_2, ..., \nu_1 + ... + \nu_m = n$ таковы

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{11}(t) & \dots & -\alpha_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -\alpha_{m1}(t) & \dots & -\alpha_{mn}(t) \end{pmatrix} + K_c(t). \tag{2.1}$$

Предположим, что матрица (2.1) должна совпадать с произвольной постоянной матрицей $H_c \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда необходимая для этого матрица $K_c(t)$ определяется из соотношения

$$K_c(t) = H_c - \begin{pmatrix} -\alpha_{11}(t) & \dots & -\alpha_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ -\alpha_{m1}(t) & \dots & -\alpha_{mn}(t) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в качестве H_c можно взять такую матрицу, чтобы постоянная матрица $A_{c1} = A_c(t) + B_cK_c(t)$ имела любой наперед заданный спектр (в частности, была бы гурвицевой).

После вычисления матрицы $K_c(t)$ осталось вернуться к исходным базисам пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Для этого следует заменить $K_c(t)$ на $K(t) = G^{-1}(t)K_c(t)P(t)$.

Здесь важно обратить внимание на одно обстоятельство: замкнутая система $\dot{\mathbf{z}}(t) = (A_c(t) + B_cK_c(t))\mathbf{z}(t)$ будет устойчивой в новом базисе пространства $\mathbb{R}^n$, но в исходном базисе замкнутая система $\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t)+B(t)K(t))\mathbf{x}(t)$ может оказаться неустойчивой. Для того, чтобы избежать этого нужно потребовать ограниченности решения $\mathbf{x}(t) = P^{-1}(t)\mathbf{z}(t)$.

Если матрица $(A_c(t)+B_cK_c(t))$ постоянна и гурвицева, то координаты вектора $\mathbf{z}(t)$ имеют вид $z_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} w_{ij}(t)\exp(\beta_j t)$, где $w_{ij}(t)$ – полиномы и $\beta_j < 0$ – желаемые собственные числа; $i = 1, ..., n$. Тогда легко проверяется, что если элементы матриц $P(t)$ и $P^{-1}(t)$ – дробно-рациональные функции, то координаты вектора $\mathbf{x}(t)$ имеют вид $x_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n}(s_{ij}(t))/d(t)\exp(\beta_j t)$, где $s_{ij}(t)$ и $d(t) = \det P(t)$ – полиномы; $i = 1, ..., n$. Таким образом, если $d(t) \neq 0$ на $[0, \infty)$, то решение $\mathbf{x}(t)$ ограничено.

Далее, управление $\mathbf{u}(t) = K(t)\mathbf{x}(t)$ представляет собой вектор, все координаты которого имеют вид $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_{ij}(t))/d(t)\exp(\beta_j t)$, где $p_{ij}(t)$ – полиномы. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{u}(t) = 0$. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Предположим, что для системы (1.1) условие* $\det S(t) \neq 0$ *выполняется для некоторой невырожденной на* $[0, \infty)$ *матрицы* $T(t)$ *с дробно-рациональными элементами и всех точек интервала* $[0, \infty)$. *Тогда существует такая непрерывная на* $[0, \infty)$ *матрица* $K(t)$ *с дробно-рациональными элементами, что тривиальное решение системы* $\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t) + B(t)K(t))\mathbf{x}(t)$ *глобально асимптотически устойчиво и* $\lim\limits_{t\to\infty} \|K(t)\mathbf{x}(t)\| = 0$.

3. Пример синтеза по состоянию

Рассмотрим линейную систему (1.1), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ B(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t+1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Найдем ограниченную обратную связь по состоянию $\mathbf{u}(t) = K(t)\mathbf{x}(t)$, $K(t) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ такую, что замкнутая этой обратной связью система была глобально асимптотически устойчива.

Составим матрицу

$$S(t) = (\mathbf{b}_1, A(t)\mathbf{b}_1(t) - \dot{\mathbf{b}}_1(t), \mathbf{b}_2(t)) = \begin{pmatrix} t & 2t-3 & 0 \\ t+1 & 2t+2 & 0 \\ 2 & 5t+1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$.

Тогда

$$S^{-1}(t) = \frac{1}{3(t+1)} \begin{pmatrix} 2(t+1) & -(2t-3) & 0 \\ -(t+1) & t & 0 \\ (5t-3)(t+1) & -(5t^2-3t+6) & 3(t+1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1(t) = \frac{1}{3(t+1)}(-t-1, t, 0),\ \mathbf{f}_2(t) = \frac{1}{3(t+1)}((5t-3)(t+1), -5t^2+3t-6, 3(t+1)).$$

Составляем матрицу

$$P(t) = \frac{1}{3(t+1)^2} \begin{pmatrix} -(t+1)^2 & t(t+1) & 0 \\ -(t^2+3t+2) & t^2+t+1 & 2t^2+3t+1 \\ (t+1)(5t^2+2t-3) & -(t+1)(5t^2-3t+6) & 3(t+1)^2 \end{pmatrix};$$

тогда

$$\dot{P}(t) = \frac{1}{3(t+1)^3} \begin{pmatrix} 0 & t+1 & 0 \\ t+1 & t-1 & t+1 \\ 5(t+1)^3 & -(5t^3+15t^2+t-9) & 0 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицы $B(t)$ и $A(t)$ к каноническому виду (1.8), (1.7):

$$B_c(t) = P(t)B(t)G^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & (2t+1)/(3(t+1)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & (2t+1)/(3(t+1)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_c(t) = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{70t^4+43t^3+133t^2+36t+63}{9(t+1)^2} & \dfrac{10t^2+8t+9}{3(t+1)} & -\dfrac{(14t-3)(t^2+t+1)}{9(t+1)^2} \\ -\dfrac{35t^3-26t^2+81t-12}{3(t+1)} & 0 & -\dfrac{7t^2-4t+3}{3(t+1)} \end{pmatrix}.$$

Выбираем матрицу $K_c(t)$ обратной связи так, чтобы матрица $A_c(t)+B_c(t)K_c(t)$ удовлетворяла двум условиям: она должна быть постоянной и гурвицевой. В качестве такой матрицы обратной связи можно взять, например, матрицу

$$K_c(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{70t^4+43t^3+133t^2+36t+63}{9(t+1)^2} & -\dfrac{10t^2+8t+9}{3(t+1)} & \dfrac{14t^3+20t^2+29t+6}{9(t+1)^2} \\ -6+\dfrac{35t^3-26t^2+81t-12}{3(t+1)} & -11 & -6+\dfrac{7t^2-4t+3}{3(t+1)} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c(t)+B_c(t)K_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix};$$

собственные числа этой матрицы отрицательны: $\mu_1=-1, \mu_1=-2, \mu_1=-3$.

Матрица $K(t)$ обратной связи в исходных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$K(t) = G^{-1}(t)K_c(t)P(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{85t^3+73t^2-87t-56}{9(t+1)^2} & -\dfrac{35t^2+13t-47}{3(t+1)} \\ -\dfrac{(5t+4)(17t^3-t^2+11t+10)}{9(t+1)^3} & \dfrac{35t^3-t^2+8t+19}{3(t+1)^2} \\ -\dfrac{20t^3-75t^2-99t-23}{9(t+1)^2} & \dfrac{7t^2-44t-26}{3(t+1)} \end{pmatrix}^T,$$

а матрица замкнутой системы, в исходном базисе пространства $\mathbb{R}^3$, такова:

$$A(t)+B(t)K(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{85t^4+73t^3-69t^2-20t+18}{9(t+1)^2} & -\dfrac{t(5t+4)(17t^3-t^2+11t+10)}{9(t+1)^3} \\ \dfrac{85t^3+73t^2-78t-47}{9(t+1)} & -\dfrac{85t^4+63t^3+42t^2+76t+31}{9(t+1)^2} \\ \dfrac{65t^3+20t^2-36t+47}{9(t+1)^2} & -\dfrac{65t^4+15t^3+54t^2+80t+14}{9(t+1)^3} \end{pmatrix.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} -\dfrac{20t^4-75t^3-90t^2-5t+9}{9(t+1)^2} \\ -\dfrac{20t^3-75t^2-108t-32}{9(t+1)} \\ -\dfrac{10t^3-57t^2+3t+32}{9(t+1)^2} \end{array} \Bigg).$$

Согласно теореме 2 положение равновесия системы $\dot{\mathbf{x}}(t)=(A(t)+B(t)K(t))\mathbf{x}(t)$ глобально асимптотически устойчиво. (При этом матрица $(A(t)+B(t)K(t))$ непрерывна на $[0,\infty)$ и неограничена при $t\to\infty$, но $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{u}(t)\|=\lim\limits_{t\to\infty}\|K(t)\mathbf{x}(t)\|=0$.)

4. Обратная связь по выходу

В этом разделе предполагается, что обратная связь формируется по выходу: $\mathbf{u}(t)=K(t)\mathbf{y}(t)$. Основной результат, который будет в конце концов доказан, содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $mp>n$ *и* $\forall t\in[0,\infty)$ $\det S(t)\neq 0$, $\operatorname{rank} C(t)=p$ *и матрицы*

$$C(t)B(t), C(t)(A(t)-d/dt)B(t), ..., C(t)(A(t)-d/dt)^{n-1}B(t) \tag{4.1}$$

– линейно независимы. Тогда для почти всех матриц $A(t)$, $B(t)$ *и* $C(t)$ *существует непрерывная на* $[0,\infty)$ *матрица* $K(t)$ *такая, что тривиальное решение системы (1.3) асимптотически устойчиво и* $\lim\limits_{t\to\infty}\|K(t)\mathbf{y}(t)\|=0$.

Доказательство. Из условия (4.1) следует, что $\forall t\geq 0$

$$\operatorname{rank}(B(t),(A(t)-d/dt)B(t),...,(A(t)-d/dt)^{n-1}B(t))=n.$$

Можно считать, что матрицы $A(t)$ и $B(t)$ приведены к виду (1.7), (1.8) (при этом матрица $C(t)$ перейдет в матрицу $C_c(t)=C(t)P^{-1}(t))=(\mathbf{c}_1(t),...,\mathbf{c}_n(t))\in\mathbb{R}^{p\times n}$.

Пусть $m\leq p$. (При $m\leq p$ – заменим $A(t),B(t)$ и $C(t)$ на $A(t)^T,C(t)^T$ и $B(t)^T$.)

Введем обозначения

$$g_{ii}(t,\mu)=a_{i,\nu_1(t)+...+\nu_{i-1}+1}(t)\mu^{\nu_i}+...+a_{i,\nu_1+...+\nu_i}(t)\mu,$$

$$g_{ij}(t,\mu)=a_{i,\nu_1+...+\nu_{j-1}+1}(t)\mu^{\nu_j}+...+a_{i,\nu_1+...+\nu_j}(t)\mu \text{ (при } i\neq j),$$

$$H(t,\mu)=(\mathbf{c}_1(t)\mu^{\nu_1},...,\mathbf{c}_{\nu_1}(t)\mu,...,\mathbf{c}_{\nu_1+...+\nu_{m-1}+1}(t)\mu^{\nu_m},...,\mathbf{c}_{\nu_1+...+\nu_m}(t)\mu)\in\mathbb{R}^{p\times m},$$

где $i,j=1,...,m$; $\nu_1+...+\nu_m=n$.

Составим матрицу

$$G(t,\mu)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,\mu) & \dots & g_{1m}(t,\mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(t,\mu) & \dots & g_{mm}(t,\mu) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times m}.$$

Тогда для фиксированных чисел n, m, p и нестационарных матриц $A_c(t)$, $B_c(t)$ и $C_c(t)$ можно получить нестационарный аналог известной формулы 6.19 [1, с.166]:

$$\det(E_m + G(t,\mu) - K(t)H(t,\mu)) =$$

$$= \det\left((E_m|K(t)) \cdot \begin{pmatrix} E_m + G(t,\mu) \\ -H(t,\mu) \end{pmatrix} \right) = 1 + g_n(\mu), \tag{4.2}$$

где $1 + g_n(\mu) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - \mu\mu_i^{-1})$ – желаемый постоянный характеристический многочлен замкнутой системы; $\mu_i \neq 0,\ i = 1, ..., n$.

Для доказательство теоремы необходимо показать существование вещественного решения $K_c(t) = K(t)$ уравнения (4.2). Разобьем это доказательство на несколько частей.

1) Так как $mp > n$ и $p \geq m$, то легко проверить, что существует такая обратимая матрица $E_{m+p} + N(t) \in \mathbb{R}^{(m+p)\times(m+p)}$, для которой выполняется равенство

$$(E_{m+p} + N(t)) \begin{pmatrix} E_m + G(t,\mu) \\ -H(t,\mu) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + g_{11}(t,\mu) & g_{12}(t,\mu) & \ldots & g_{1m}(t,\mu) \\ g_{21}(t,\mu) & 1 + g_{22}(t,\mu) & \ldots & g_{2m}(t,\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(t,\mu) & g_{m2}(t,\mu) & \ldots & 1 + g_{mm}(t,\mu) \\ h_{11}(t,\mu) & h_{12}(t,\mu) & \ldots & h_{1m}(t,\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p-m,1}(t,\mu) & h_{p-m,2}(t,\mu) & \ldots & h_{p-m,m}(t,\mu) \\ h_{p-m+1,1}(t,\mu) & h_{p-m+1,2}(t,\mu) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p,1}(t,\mu) & h_{p,2}(t,\mu) & \ldots & 0 \end{pmatrix} = F(t,\mu) \in \mathbb{R}^{(m+p)\times m}.$$

2) Используя матрицу $F(t,\mu)$, перепишем равенство (4.2) в следующей форме

$$\det\left((E_m|K_c(t)) \cdot (E_{m+p} + N(t))^{-1} \cdot F(t,\mu) \right) = 1 + g_n(\mu)$$

или

$$\det((L_1(t,K_c)|L_2(t,K_c)) \cdot F(t,\mu)) = 1 + g_n(\mu), \tag{4.3}$$

где $(L_1(t,K_c)|L_2(t,K_c)) = (E_m|K(t)) \cdot (E_{m+p} + N(t))^{-1}$ и матрицы $L_1(t,K_c) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $L_2(t,K_c) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ линейно зависят от $K_c(t) \in \mathbb{R}^{m\times p}$.

Одновременно с уравнением (4.3) рассмотрим уравнение

$$\det\Big((L_1(t,K_c)|L_2(t,K_c)) \cdot F(t,\mu)\Big) = 0. \tag{4.4}$$

Заметим, что решением (4.4) будет матрица $(L_1(t, K_c)|L_2(t, K_c)) = (0|W(t))$, где $W(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – любая обратимая на интервале $[0, \infty)$ матрица и $0 \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Тогда решением уравнения

$$\det\left((X(t)|Y(t)) \cdot \begin{pmatrix} E_m + G(t,\mu) \\ -H(t,\mu) \end{pmatrix} \right) = 0,\ X(t) \in \mathbb{R}^{m\times m},\ Y(t) \in \mathbb{R}^{m\times p}, \quad (4.5)$$

будет матрица $(X_0(t)|Y_0(t)) = (0|W(t)) \cdot (E_{m+p} + N(t))$, для которой выполняется условие: $\det(X_0(t)) = 0$. (Заметим, что матрица $(X_0(t)|Y_0(t))$ всегда может быть сделана полиномиальной. Кроме того, выбором матрицы $W(t)$ всегда можно сделать так, чтобы $\mathrm{rank} X_0(t) = m - 1$.)

3) Так как $\mathrm{rank} X_0(t) = m - 1$, то с помощью подходящей полиномиальной матрицы $G(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ можно добиться того, что в матрице $Q(t)(X_0(t)|Y_0(t))$ m-й столбец будет нулевым. Другими словами

$$Q(t) \cdot X_0(t) = \begin{pmatrix} D(t)|0 \\ --- \\ **\,*|0 \end{pmatrix}, D(t) \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)} \text{ и } \forall t \text{ rank } D(t) = m - 1.$$

4) Будем считать, что матрица $(X_0(t)|Y_0(t))$ заменена на $Q(t)(X_0(t)|Y_0(t))$. (Ясно, что матрица $Q(t)(X_0(t)|Y_0(t))$ также будет решением (4.5).) Рассмотрим уравнение

$$\det\left((\epsilon E_m + X(t)|Y(t)) \cdot \begin{pmatrix} E_m + G(t,\mu) \\ -H(t,\mu) \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \det((\epsilon E_m + X(t))(E_m + G(t,\mu) - Y(t)H(t,\mu)) =$$
$$= \det(\epsilon E_m + X(t) + (\epsilon E_m + X(t))G(t,\mu) - Y(t)H(t,\mu)) =$$
$$= \det(\epsilon E_m + X(t))(1 + g_n(\mu)), \quad (4.6)$$

которое при $\epsilon = 0$ и $\det X(t) = 0$ имеет то же решение $(X_0(t)|Y_0(t))$, что и (4.5).

Легко проверяется, что $\det(\epsilon E_m + X(t)) = \epsilon \det(\epsilon E_{m-1} + D(t))$. Тогда, в силу пункта 3), при $\epsilon = 0$ $\epsilon E_m + X(t) = X_0(t)$ и $\det(\epsilon E_{m-1} + D(t)) = \det D(t) \neq 0$. Следовательно, параметр $\epsilon > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы $\forall t \in [0, \infty)$ $\det(E_m + \frac{1}{\epsilon}X(t)) \neq 0$. Тогда уравнение (4.6) перепишется следующим образом

$$\det(E_m + G(t,\mu) - \frac{1}{\epsilon}(E_m + \frac{1}{\epsilon}X(t))^{-1}Y(t)H(t,\mu)) = 1 + g_n(\mu), \quad (4.7)$$

Если теперь ввести обозначение

$$K_c(t) = \frac{1}{\epsilon}(E_m + \frac{1}{\epsilon}X(t))^{-1}Y(t),$$

то уравнение (4.7) перепишется в виде (4.2).

5) Докажем существование решения уравнения (4.7) (а значит и (4.2)). Для этого:

– находим матрицу $(X_0(t)|Y_0(t))$;

– фиксируем малый параметр $\epsilon > 0$;

– считаем элементы $y_{11} = y_1, ..., y_{1p} = y_p$, $y_{21} = y_{p+1}, ..., y_{2,p} = y_{2p}$, $y_{31} = y_{2p+1}$,...,$y_{i,j} = y_n$ матрицы $Y(t)$ неизвестными, а оставшиеся $mp - n$ элементов назначаем равными соответствующим элементам матрицы $Y_0(t)$;

– придаем параметру μ в уравнении (4.6) n различных вещественных значений $\mu_1, ..., \mu_n$;

– раскрываем каждое из получившихся уравнений; в итоге будем иметь систему $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ n уравнений $f_1(t, y_1, ..., y_n) = 0, ..., f_n(t, y_1, ..., y_n) = 0$ от n неизвестных. (Здесь приняты обозначения $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$);

– решаем уравнение $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ с помощью какой-либо итерационной процедуры (например, методом Ньютона). В качестве начального приближения выбираем вектор $\mathbf{y}_0$, составленный из первых n элементов матрицы $Y_0(t)$, где соответствие между элементами вектора $\mathbf{y}_0$ и элементами матрицы $Y_0(t)$ определено выше. Тогда для любого фиксированного $t^* \in [0, \infty)$ последовательные итерации вычисляются по формуле

$$\mathbf{y}_{k+1}(t^*) = \mathbf{y}_k(t^*) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_k(t^*))\right)^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}_k(t^*)), k = 0, 1, 2, ...,$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_k(t^*)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица Якоби, вычисленная в точке $\mathbf{y}_k(t^*)$. Процесс прекращается по достижении заданной точности δ: $\|\mathbf{y}_k\| < \delta$. (Отметим, что $\forall t \in [0, \infty)$ легко получить нестационарный аналог известной формулы 6.17[1, с.166]:

$$\det(E_n - \mu(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))) = \det(E_m + G(t, \mu) - K_c(t)H(t, \mu)).$$

Тогда, как показано в [1, с.90], матрица Якоби системы $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ представляет собой матрицу, полученную развертыванием каждой из матриц (4.1) в столбец размера mn. Следовательно, из условий теоремы 3 следует, что $t^* \in [0, \infty)$

$$\mathrm{rank} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_k(t^*)) = n.$$

Это доказывает корректность приведенной выше итерационной процедуры.)

– если процесс расходится, то уменьшаем число $\epsilon > 0$ и повторяем указанную процедуру снова; так при $\epsilon = 0$ существует точное решение $(X_0(t)|Y_0(t))$ системы (4.5), то в силу непрерывной зависмости решения от малого параметра ϵ теорема о неявной функции [3, с.24] утверждает, что для некоторого достаточно малого $\epsilon > 0$ указанный итерационный процесс начнет сходиться;

– вычисляем матрицу обратной связи $K_c(t)$ по формуле

$$K_c(t) = \frac{1}{\epsilon}(E_m + \frac{1}{\epsilon}X_0(t))^{-1}Y_k(t),$$

где $Y_k(t)$ – матрица, у которой первые n элементов представляет вектор $\mathbf{y}_k(t)$, а последние $mp-n$ элементов совпадают с соответствующими элементами матрицы $Y_0(t)$. (Ясно, что в общем случае мы получим не функциональную матрицу $K_c(t)$, а последовательность числовых матриц $K_c(t_0^*), K_c(t_1^*), ...$)

6)Мы получили, что в условиях теоремы 3, для тройки матриц $A_c(t), B_c(t)$ и $C_c(t)$, представленых в каноническом виде, выбором обратной связи $K_c(t)$ корни характеристического полинома $\det(E_n - \mu(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t)))$ могут быть сделаны любыми наперед заданными.

Для дальнейшего необходимо выяснить структуру матрицы $K_c(t)$.

Обозначим через $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, t\}$ некоторое конечное расширение поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ с помощью трансцендентного элемента t. (Элементы $\mathbb{F}$ это всевозможные рациональные дроби, числители и знаменатели которых состоят из многочленов от t с коэффициентами из $\mathbb{R}$.)

Теперь введем проективное грассманово многообразие $\mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p)$ всех m-мерных подпространств в пространстве $\mathbb{F}^{m+p}$ [1, 4]. Известно [1, 4], что существует вложение

$$\mathbf{g} : \mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p) \to \mathbb{F}\mathbf{P}^d$$

грассманова многообразия в проективное пространство $\mathbb{F}\mathbf{P}^d$ размерности $d = C_{m+p}^m - 1$, которое позволяет отождествить точки из $\mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p)$ некоторыми точками из $\mathbb{F}\mathbf{P}^d$.

Составим матрицу

$$U(t) = \left(\wedge^m \begin{pmatrix} E_m + G(t, \mu_1) \\ -H(t, \mu_1) \end{pmatrix}, ..., \wedge^m \begin{pmatrix} E_m + G(t, \mu_n) \\ -H(t, \mu_n) \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{F}^{(d+1)\times n},$$

где символ $\wedge^m(...)$ означает m-ю внешнюю степень соответствующей матрицы [1].

Найдем множество $L = \{\mathbf{x}(t)\}$ всех решений системы уравнений $\mathbf{x}(t)U(t) = 0$, где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{F}^{d+1}$ – вектор-строка. Очевидно L – линейное пространство, однозначно определенное матрицами $A_c(t), B_c(t)$ и $C_c(t)$. Тогда соотношение (4.2) определяет центральную проекцию

$$\phi : \mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p) - L \to \mathbb{F}\mathbf{P}^n$$

Напомним [1, с. 102], что точка $(C_c(t), A_c(t), B_c(t)) \in \mathbb{F}^{n^2+nm+pn}$ называется общей (неособой), если и только если $L \bigcap \mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p) = 0$. В случае же, если имеет место неравенство $L \bigcap \mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p) \neq 0$, то точка $(C_c(t), A_c(t), B_c(t))$ называется особой.

Когда точка $(C_c(t), A_c(t), B_c(t))$ является общей, то центральная проекция ϕ является конечным морфизмом $\mathbb{G}r_{\mathbf{F}}(m, m+p) \to \mathbb{F}\mathbf{P}^n$ [1, с.57] и, следовательно, порядок l грассманова многообразия $\mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p)$ может быть вычислен по известной формуле [1,4]:

$$l = \deg \mathbb{G}r_{\mathbb{F}}(m, m+p) = \frac{1! \cdot 2! \cdot ... \cdot (m-1)! \cdot (mp)!}{p! \cdot (p+1)! \cdot ... \cdot (m+p-1)!}. \qquad (4.8)$$

Тогда из формулы (4.8) немедленно вытекает, что коэффициенты матрицы $K_c(t)$ принадлежат некоторому алгебраическому расширению $\sqrt{\mathbb{F}}$ степени l поля $\mathbb{F}$ [2]. (Элементы поля $\sqrt{\mathbb{F}}$ представляют собой рациональные комбинации некоторых радикалов из дробно-рациональных функций степени не выше, чем l .)

Как показано в [1, с.102] для того, чтобы задача синтеза имела вещественное решение достаточно, чтобы тройка матриц $(C_c(t), A_c(t), B_c(t))$ была бы особой. Кроме того, там же доказано, что в случае $mp > n$ управляемая и наблюдаемая система (1.6) с выходом $\mathbf{y}(t) = C_c(t)\mathbf{z}(t)$ для почти всех матриц $A_c(t), B_c(t)$ и $C_c(t)$ является особой. Следовательно, в условиях теоремы 3 существует решение $K_c(t) \in (\sqrt{\mathbb{F}})^{m\times p}$.

7)Предположим, что все корни полинома $1+g_n(\mu)$ – отрицательны (для простоты мы опускаем случай комплексно-сопряженных корней с отрицательными вещественными частями). Таким образом получаем, что $\forall t \in [0,\infty)$ матрица $A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t)$ – гурвицева. Тогда существует невырожденная на $[0,\infty)$ матрица $V(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что

$$V(t)(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))V^{-1}(t) = V_0 + V_1(t),$$

где $V_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – постоянная диагональная матрица, а $V_1(t) = \dot{V}(t)V(t)^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица с элементами из $(\sqrt{\mathbb{F}})^{m\times p}$ (см. пункт 6). (Невырожденность $V(t)$ следует из того, что эта матрица составлена из собственных векторов матрицы $(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))$, все собственные числа которой постоянны и различны.)

Можно проверить, что $\lim\limits_{t\to\infty} V_1(t) = 0$. Поэтому, согласно [5, с.114], все решения системы

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = (V(t)(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))V^{-1}(t) + \dot{V}(t)V^{-1}(t))\mathbf{w}(t)$$

асимптотически устойчивы. Следовательно, таковыми же являются и решения системы $\dot{\mathbf{z}}(t) = (A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))\mathbf{z}(t)$.

С помощью преобразования $P(t)$ (формула (1.5)) вернемся к исходному базису пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица $A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t)$ перейдет в матрицу

$$P^{-1}(t)(A_c(t) + B_c(t)K_c(t)C_c(t))P(t) - P^{-1}(t)\dot{P}(t) = A(t) + B(t)K(t)C(t).$$

Следовательно, вектор $\mathbf{x}(t)$ решений системы $\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t) + B(t)K(t)C(t))\mathbf{x}(t)$ имеет вид: $\mathbf{x}(t) = P^{-1}(t)\mathbf{z}(t)$ и потому $\mathbf{x}(t)$ ограничен на $[0,\infty)$ (см. доказательство теоремы 2).

Аналогично доказательству теоремы 2, управление $\mathbf{u}(t) = K(t)C(t)\mathbf{x}(t)$ представляет собой вектор, все координаты которого имеют вид $\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}(t)\exp(\beta_j t)$, где $r_{ij}(t)$ – алгебраические функции от дробно-рациональных функций и $\beta_j < 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{u}(t) = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} \|K(t)\mathbf{y}(t)\| = \lim\limits_{t\to\infty} \|K(t)C(t)\mathbf{x}(t)\| = 0$. Это утверждение и завершает доказательство теоремы 3. □

5. Пример синтеза по выходу

Пусть некоторая система управления имеет те же матрицы A и B, что и в разделе 3, а уравнение выхода (1.2) задается матрицей

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

С помощью матрицы $P(t)$ перейдем от тройки $C(t), A(t), B(t)$ к тройке $C_c(t), A_c(t)$, $B_c(t)$, где матрицы $A_c(t), B_c(t)$ те же, что и в разделе 3, а матрица $C_c(t)$ имеет вид

$$C_c(t) = C(t)P^{-1}(t) = \frac{1}{3(t+1)} \begin{pmatrix} 10t^2-7t-6 & -3(t+1) & 2t+1 \\ -(5t^2-2t+15) & 6(t+1) & -(t-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Тогда $G(t,\mu) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{70t^4+43t^3+133t^2+36t+63}{9(t+1)^2}\mu^2 - \frac{10t^2+8t+9}{3(t+1)}\mu, & \frac{(14t-3)(t^2+t+1)}{9(t+1)^2}\mu \\ \frac{35t^3-26t^2+81t-12}{3(t+1)}\mu^2, & \frac{7t^2-4t+3}{3(t+1)}\mu \end{pmatrix};$$

$$-H(t,\mu) = -\frac{1}{3(t+1)} \begin{pmatrix} (10t^2-7t-6)\mu^2 - 3(t+1)\mu, & (2t+1)\mu \\ -(5t^2-2t+15)\mu^2 + 6(t+1)\mu, & -(t-1)\mu \end{pmatrix}.$$

Выберем матрицы X_0 и Y_0 в виде

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

Назначим коэффициенты матриц X_0 и Y_0 таким образом, чтобы $\det(X_0G(t,\mu) - Y_0H(t,\mu)) \equiv 0$. Для этого достаточно выполнения условий

$$x_{11}\frac{(14t-3)(t^2+t+1)}{9(t+1)^2} - y_{11}\frac{3(2t+1)(t+1)}{9(t+1)^2} + y_{12}\frac{3(t+1)(t-1)}{9(t+1)^2} = 0,$$

$$x_{21}\frac{(14t-3)(t^2+t+1)}{9(t+1)^2} - y_{21}\frac{3(2t+1)(t+1)}{9(t+1)^2} + y_{22}\frac{3(t+1)(t-1)}{9(t+1)^2} = 0.$$

Последние равенства могут быть удовлетворены, если положить, например, $x_{11} = 1,\ x_{21} = 0,\ y_{12} = 0$. Тогда

$$y_{11} = \frac{(14t-3)(t^2+t+1)}{3(2t+1)(t+1)},\ y_{21} = -t+1,\ y_{22} = -2t-1.$$

Таким образом

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{(14t-3)(t^2+t+1)}{3(2t+1)(t+1)} & 0 \\ -t+1 & -2t-1 \end{pmatrix}.$$

Исходя из вида матрицы $K_c(t)$ выбираем начальное приближение в виде

$$K_{c0}(t) = \begin{pmatrix} 1/(\epsilon+1) & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{(14t-3)(t^2+t+1)}{3(2t+1)(t+1)} & 0 \\ -t+1 & -2t-1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $g_3(\mu) = 1 + 6\mu + 11\mu^2 + 6\mu^3$. Воспользуемся уравнением (4.7). Тогда после приравнивания коэффициентов слева и справа при одинаковых степенях μ получим систему уравнений

$$f_1(t, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}) = 6, f_2(t, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}) = 11, f_3(t, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}) = 6 \quad (5.1)$$

относительно неизвестных элементов $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ матрицы $K_c(t)$. Для того, чтобы система (5.1) была разрешима при любом полиноме $g_3(\mu)$ достаточно, чтобы ее матрица Якоби (при $K_c(t) \equiv 0$)

$$J(t) = \frac{1}{9(t+1)^2} \left(\begin{array}{cc|} 9+18t+9t^2 & -27-54t-27t^2 \\ 27+36t-9t^3 & 27+45t-9t^2-27t^3 \\ 6+54t+120t^2+72t^3 & 33+27t+21t^2+27t^3 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cc} -3-9t-6t^2 & -3+3t^2 \\ 12+15t+15t^2+6t^3 & 3+21t+24t^2+18t^3 \\ -15-54t-72t^2-48t^3 & -6-42t-33t^2-18t^3 \end{array} \right)$$

имела ранг 3 для любых $t \geq 0$.

Легко проверить, что подматрица $J_{124}(t)$ матрицы $J(t)$, расположенная в первом, втором и четвертом столбцах имеет определитель

$$\det J_{124}(t) = -\frac{1}{9(t+1)^3}(189t^5 + 595t^4 + 908t^3 + 785t^2 + 463t + 96).$$

Ясно, что $\det J_{124}(t) \neq 0 \ \forall t[0, \infty)$. Следовательно, $\forall t \in [0, \infty)$ $\mathrm{rank} J(t) = 3$.

Теперь можно найти матрицу $K_c(t)$ для ряда значений $t \geq 0$. Для этого используем итерационную процедуру пункта 5 раздела 4.

Пусть $\epsilon = 0.03$. Тогда матрица начального приближения имеет вид

$$K_{c0}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{(14t-3)(t^2+t+1)}{3.09(2t+1)(t+1)} & 0 \\ -(t-1)/0.03 & -(2t+1)/0.03 \end{pmatrix}.$$

Для такого начального приближения получены следующие матрицы обратных связей:

$t = 0$

$$A_c(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 1/3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_c(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_c(0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1/3 \\ -5 & 2 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$K_c(0) = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 29.61 & -54.38 \end{pmatrix};$$

$t = 1$

$$A_c(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -115/12 & 9/2 & -11/12 \\ -13 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_c(1) = B_c(0), C_c(1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_c(1) = \begin{pmatrix} -16.1969 & 0 \\ -51.3939 & 5.4762 \end{pmatrix};$$

$t = 2$

$$A_c(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2131/81 & 65/9 & -175/81 \\ -326/9 & 0 & -23/9 \end{pmatrix}, \; B_c(2) = B_c(0),$$

$$C_c(2) = \begin{pmatrix} 20/9 & -1 & 5/9 \\ -31/9 & 2 & -1/9 \end{pmatrix}, \; K_c(2) = \begin{pmatrix} -37.0085 & 0 \\ -84.9625 & 4.2643 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратной связи в исходном базисе выглядит так: $K(t) = G^{-1}(t)K_c(t)$.

Для того, чтобы для данной системы управления получить удовлетворительное решение задачи синтеза в виде последовательности числовых матриц $K(t_0), K(t_1)$, ..., $K(t_s)$, ..., нужно использовать мелкий шаг по времени: $\Delta t = t_{i+1} - t_i \sim 10^{-5}$.

Список цитируемых источников

1. *Белозеров В.Е., Капустян В.А.* Геометрические методы модального управления. – Киев: Наукова думка, 1999. – 260 с.
2. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
3. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия. – М.: Мир, 1979. – 256 с.
4. *Wang X.* Pole placement by static output feedback // Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control. – 1992. – Vol.2, №2. – P.205 – 218.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.:, Наука, 1967. – 472 с.

Получено 14.06.2006